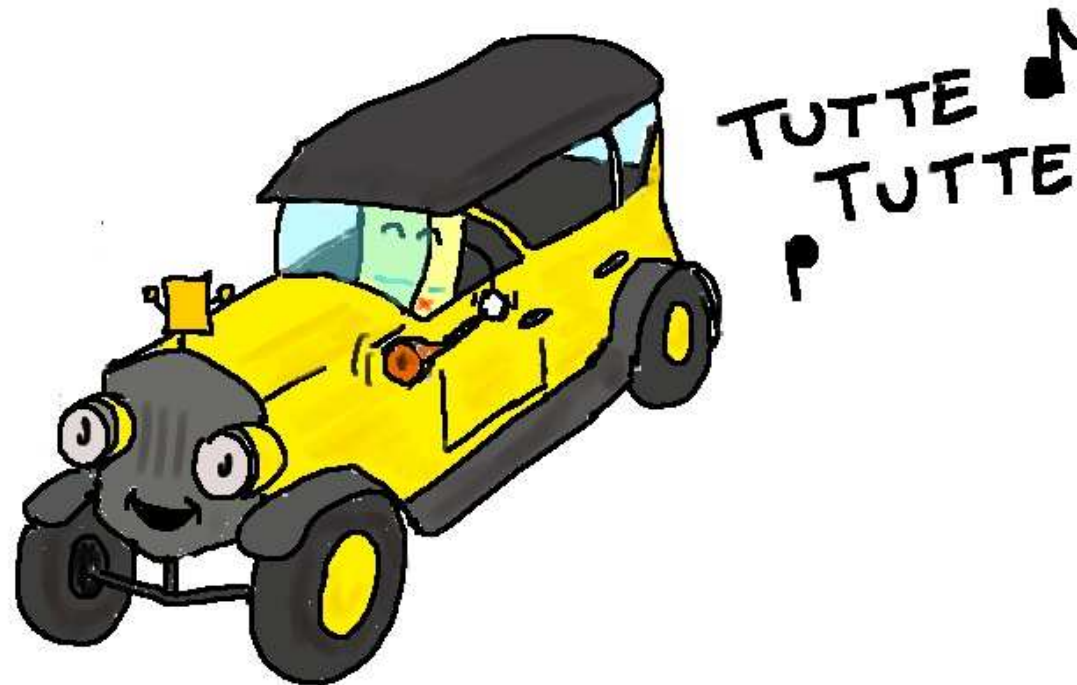


# UN CADRE GÉNÉRAL POUR L'ACTIVITÉ ET LE POLYNÔME DE TUTTE

COURTIEL Julien  
Journées de Combinatoire de Bordeaux 2014



# LE POLYNÔME DE TUTTE SOUS TOUTES LES COUTURES



# REMARQUES PRÉLIMINAIRES

Soit  $G$  un graphe,  $V(G)$  = ensemble des sommets  
 $E(G)$  = ensemble des arêtes.

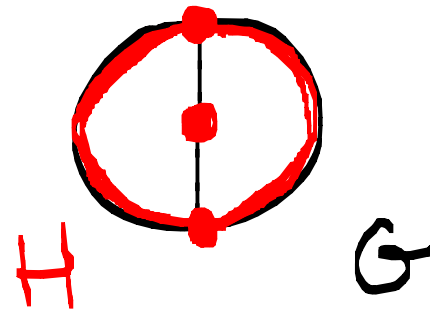
Dans tout l'exposé,  $G$  est considéré comme connexe.

$H$  est un sous-graphe

(couvrant) de  $G$  si :

$$V(H) = V(G)$$

$$E(H) \subset E(G)$$



# POLYNÔME DE TUTTE: DÉFINITION

Le polynôme de Tutte d'un graphe  $G$  est défini par:

$$T_G(x, y) = \sum_{S \text{ sous-graphe de } G} (x-1)^{cc(S)-1} (y-1)^{nc(S)}$$

[Whitney ~30 - Tutte ~50]

$cc(G)$  = nombre de composantes connexes de  $G$

$nc(G)$  = nombre cyclomatique de  $G$   
= nombre minimal d'arêtes à enlever pour que  $G$  soit acyclique  
=  $|E(G)| + cc(G) - |V(G)|$

# POLYNÔME DE TUTTE: DÉFINITION

Le polynôme de Tutte d'un graphe  $G$  est défini par:

$$T_G(x, y) = \sum_{S \text{ sous-graphe de } G} (x-1)^{cc(S)-1} (y-1)^{nc(S)}$$

[Whitney ~30 - Tutte ~50]

$cc(G)$  = nombre de composantes connexes de  $G$

$nc(G)$  = nombre cyclomatique de  $G$

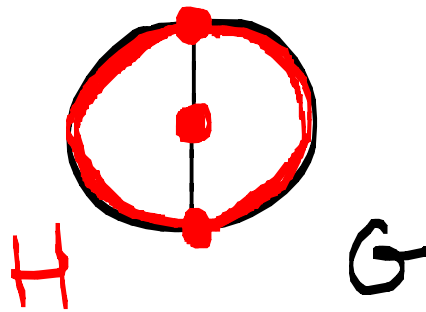
= nombre minimal d'arêtes à enlever pour que  $G$  soit acyclique

$$cc(G) = 1$$

$$nc(G) = 2$$

$$cc(H) = 2$$

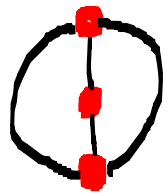
$$nc(H) = 1$$



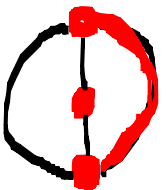
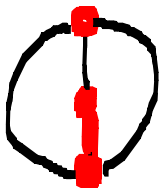
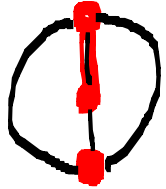
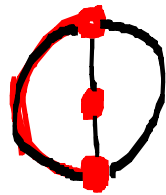
$$= |E(G)| + cc(G) - |V(G)|$$

# POLYNÔME DE TUTTE: EXEMPLE

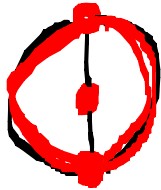
---



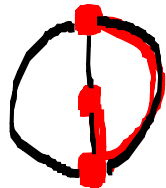
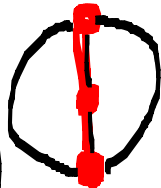
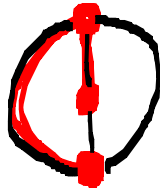
$$(x-1)^2$$



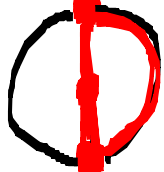
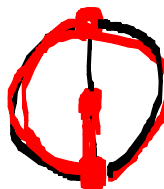
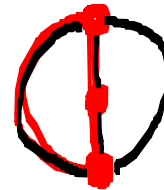
$$4(x-1)$$



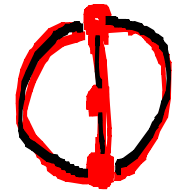
$$(x-1)(y-1)$$



$$5$$

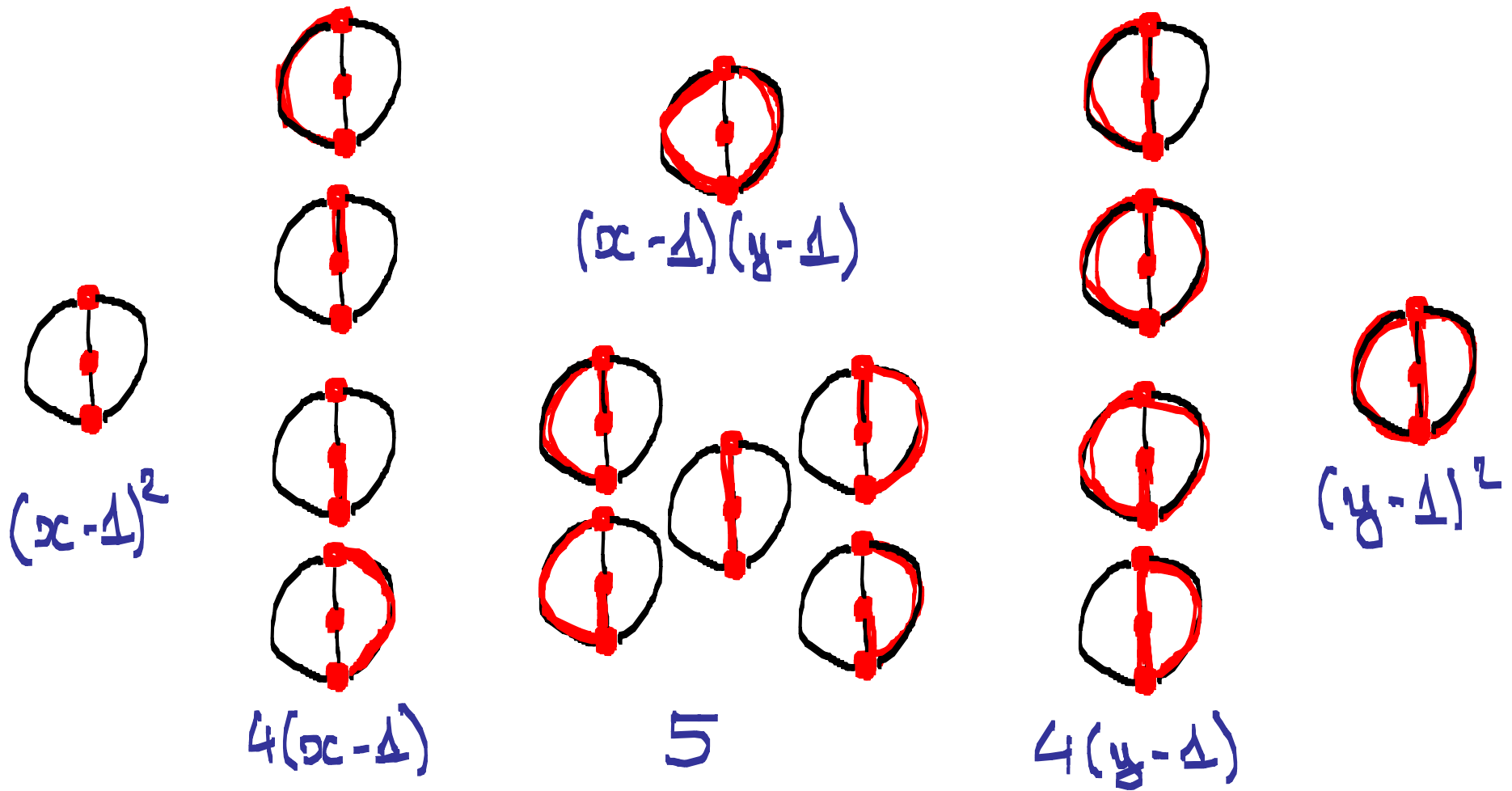


$$4(y-1)$$



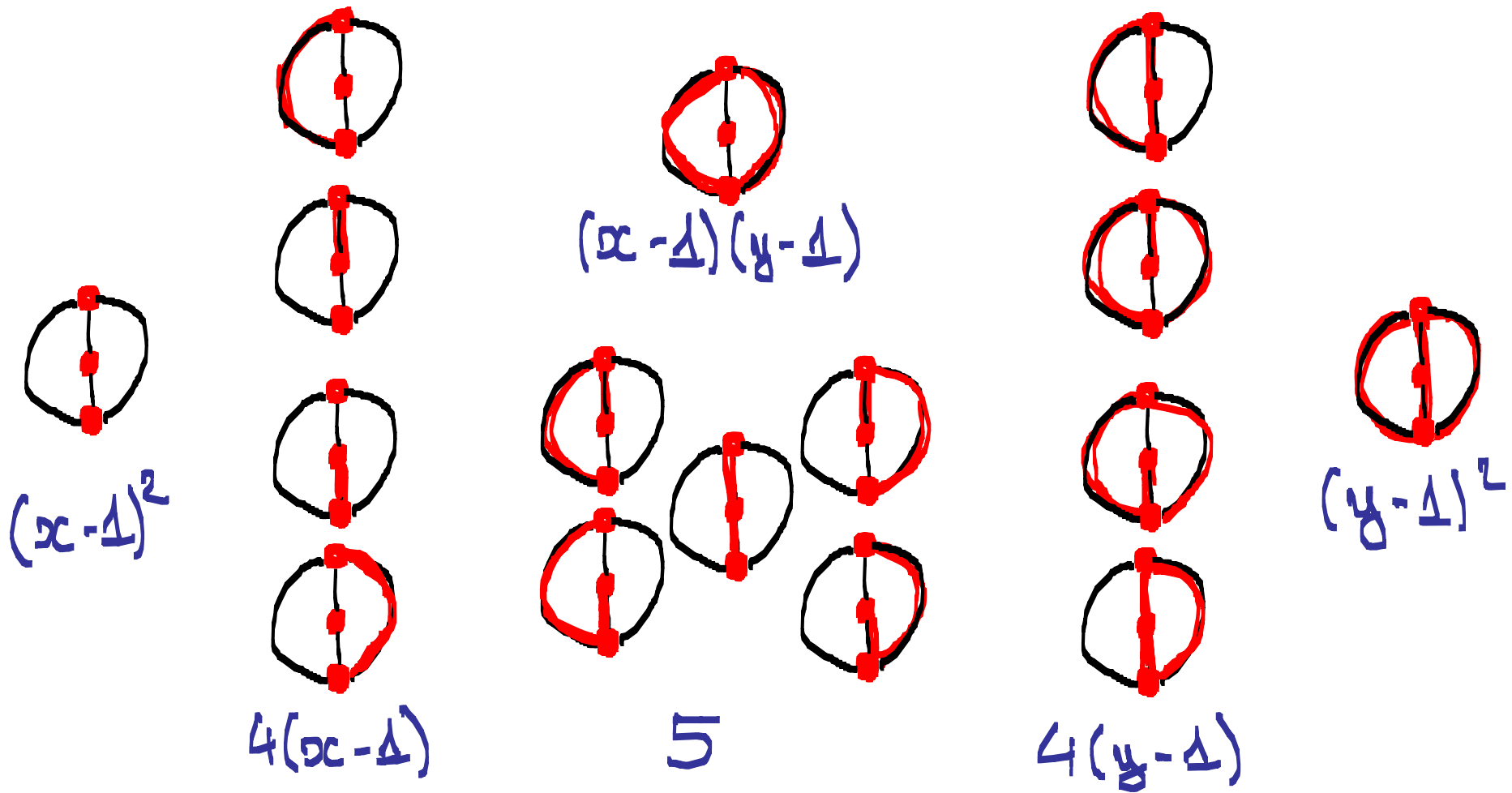
$$(y-1)^2$$

# POLYNÔME DE TUTTE: EXEMPLE



$$T_G(x, y) = (x-1)^2 + 4(x-1) + 5 + (x-1)(y-1) + 4(y-1) + (y-1)^2$$

# POLYNÔME DE TUTTE: EXEMPLE



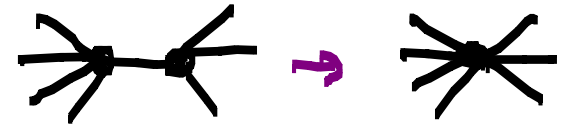
$$\begin{aligned}
 T_{\text{⊕}}(x, y) &= (x-1)^2 + 4(x-1) + 5 + (x-1)(y-1) + 4(y-1) + (y-1)^2 \\
 &= x^2 + x + xy + y + y^2
 \end{aligned}$$



# POLYNÔME DE TUTTE: RÉCURRENCE

Soient  $G$  un graphe,  $e$  une arête de  $G$

contracté  $(G, e) =$  graphe  $G$  où  $e$   
a été contracté

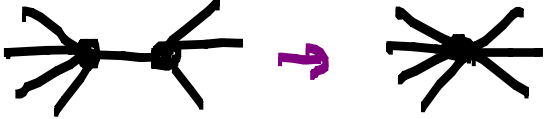



supprime  $(G, e) =$  graphe  $G$  où  $e$   
a été supprimée



# POLYNÔME DE TUTTE: RÉCURRENCE

Soient  $G$  un graphe,  $e$  une arête de  $G$

contracté  $(G, e)$  = graphe  $G$  où  $e$  a été contracté 

supprime  $(G, e)$  = graphe  $G$  où  $e$  a été supprimée 

$$T_G(x, y) = \begin{cases} T_{\text{contracté}(G, e)}(x, y) + T_{\text{supprime}(G, e)}(x, y) & \text{si } e \text{ est standard,} \\ x - T_{\text{contracté}(G, e)}(x, y) & \text{si } e \text{ est une isthme,} \\ y - T_{\text{supprime}(G, e)}(x, y) & \text{si } e \text{ est une boucle.} \end{cases}$$

isthme = arête dont la suppression déconnecte le graphe

standard = ni isthme, ni boucle.

# POLYNÔME DE TUTTE: RÉCURRENCE

Corollaire:  $T_G(x, y) \in \mathbb{N}[x, y]$

$$T_G(x, y) = \begin{cases} T_{\text{contracté}}(G, e)(x, y) + T_{\text{supprime}}(G, e)(x, y) & \text{si } e \text{ est standard,} \\ x \cdot T_{\text{contracté}}(G, e)(x, y) & \text{si } e \text{ est une isthme,} \\ y \cdot T_{\text{supprime}}(G, e)(x, y) & \text{si } e \text{ est une boucle.} \end{cases}$$

isthme = arête dont la suppression déconnecte le graphe

standard = ni isthme, ni boucle.

# POLYNÔME DE TUTTE : SPÉCIALISATIONS

- $T_G(1, 2) =$  nombre de sous-graphes connexes
- $T_G(2, 1) =$  nombre de forêts courantes
- $T_G(1, 1) =$  nombre d'arbres courants
- $T_G(2, 0) =$  nombre d'orientations acycliques
- ...

Polynôme chromatique de  $G = \boxed{(-1)^{|V(G)|} q T_G(1-q, 0)}$

# POLYNÔME DE TUTTE : AUTRES INTÉRÊTS

- Invariance par isomorphisme
- Propriété d'universalité de suppression/contraction.  
[Brylawski - Oxley]
- Autres spécialisations :
  - modèle de Potts (physique statistique) [Fortuin - Karsten]
  - polynôme de fiabilité (théorie des réseaux) [Oxley - Welsh]
  - polynôme de Jones d'un nœud alterné - (théorie des nœuds)  
[Thistlethwaite]
  - polynôme énumérateur des poids (théorie des codes) [Greene]
  - configurations récurrentes du tas de sable [Cori, le Borgne]

# ACTIVITÉS

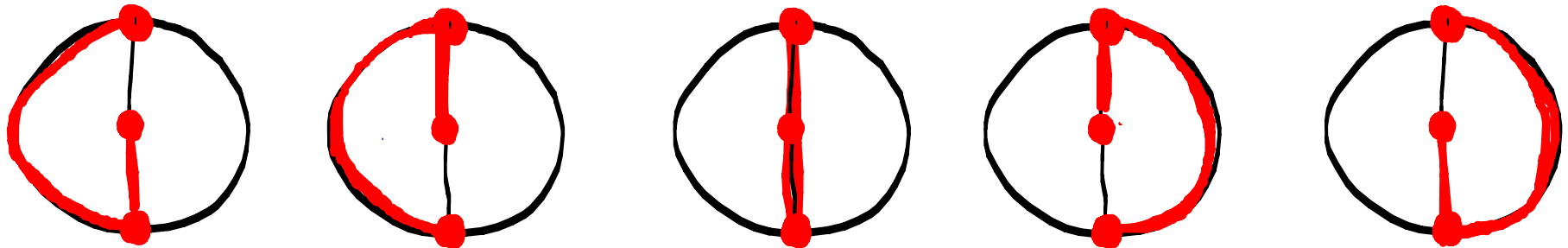


# PRINCIPE

Associer à chaque arbre couvrant un ensemble d'arêtes dites "actives" tel que :

$$T_G(x, y) = \sum_{\substack{T \text{ arbre} \\ \text{couvrant} \\ \text{de } G}} x^{i(T)} y^{e(T)}$$

où  $i(T)$  = nombre d'arêtes internes actives  
 $e(T)$  = nombre d'arêtes externes actives

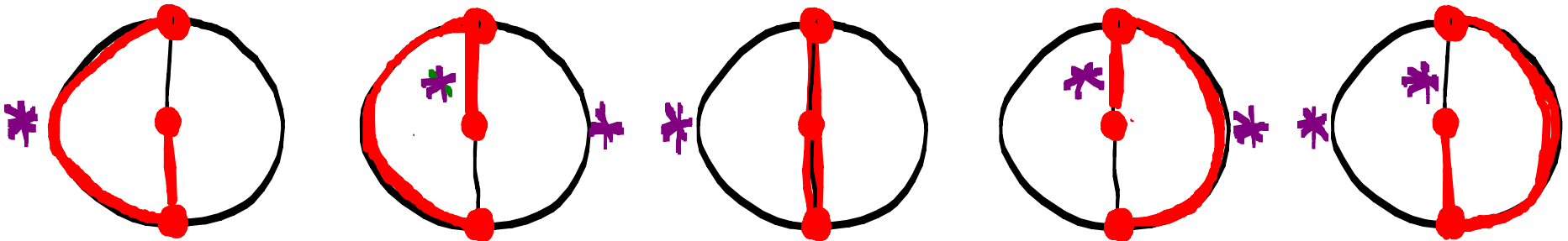


# PRINCIPE

Associer à chaque arbre couvrant un ensemble d'arêtes dites "actives" tel que :

$$T_G(x, y) = \sum_{\substack{T \text{ arbre} \\ \text{couvrant} \\ \text{de } G}} x^{i(T)} y^{e(T)}$$

où  $i(T)$  = nombre d'arêtes internes actives  
 $e(T)$  = nombre d'arêtes externes actives



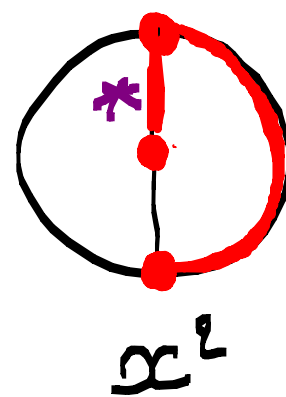
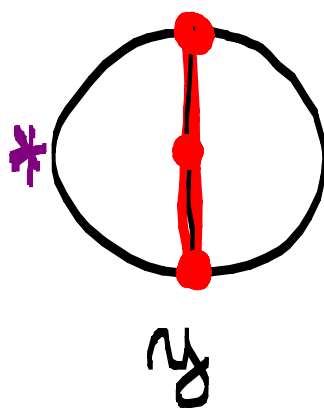
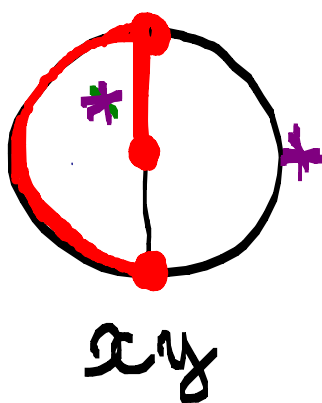
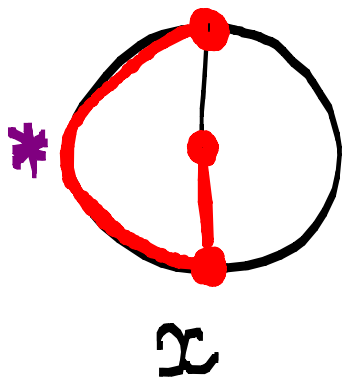


# PRINCIPE

Associer à chaque arbre couvrant un ensemble d'arêtes dites "actives" tel que :

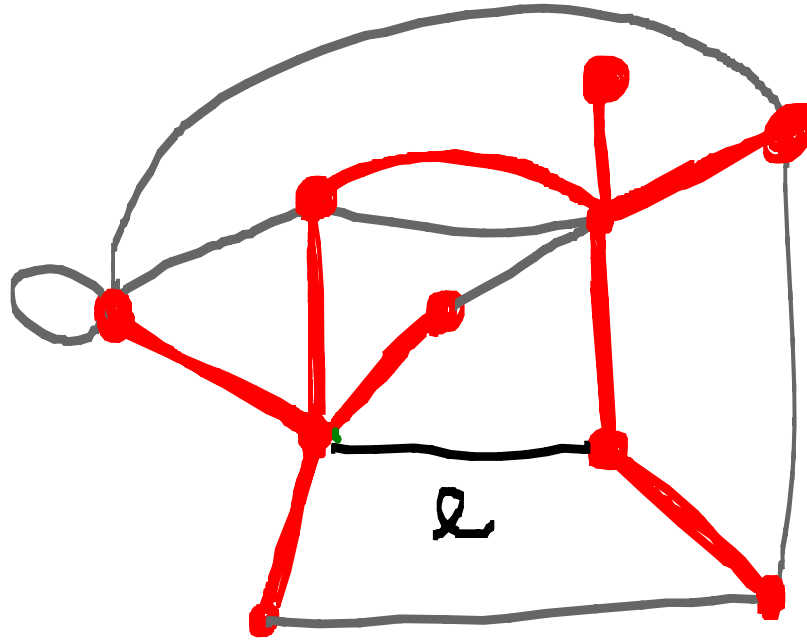
$$T_G(x, y) = \sum_{\substack{T \text{ arbre} \\ \text{couvrant} \\ \text{de } G}} x^{i(T)} y^{e(T)}$$

où  $i(T)$  = nombre d'arêtes internes actives  
 $e(T)$  = nombre d'arêtes externes actives



# CYCLE FONDAMENTAL

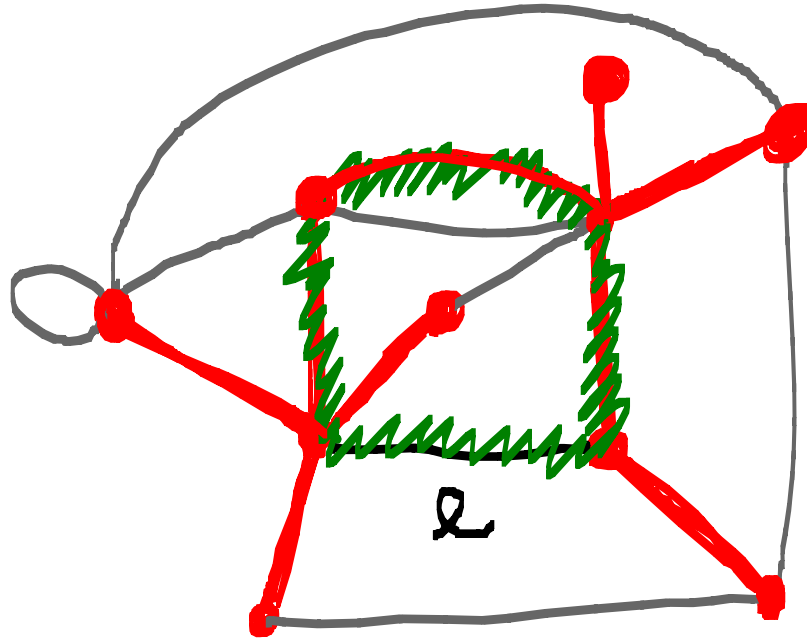
Soient  $T$  un arbre couvrant et  $e$  une arête externe,



Cycle fondamental de  $e =$   
Unique cycle inclus dans  $T \cup \{e\}$ .

# CYCLE FONDAMENTAL

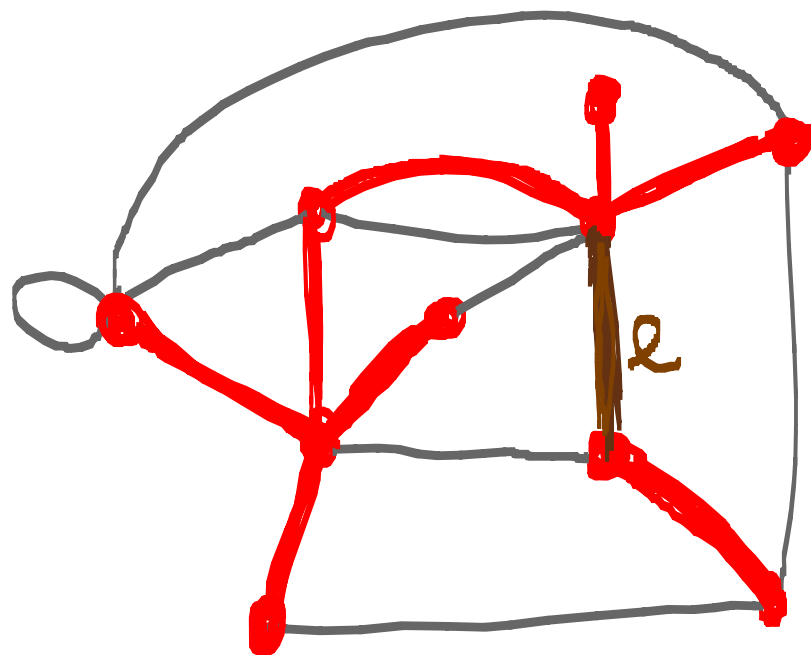
Soient  $T$  un arbre couvrant et  $e$  une arête externe,



Cycle fondamental de  $e =$   
Unique cycle inclus dans  $T \cup e$ .

# COCYCLE FONDAMENTAL

Soient  $T$  un arbre couvrant et  $e$  une arête interne,

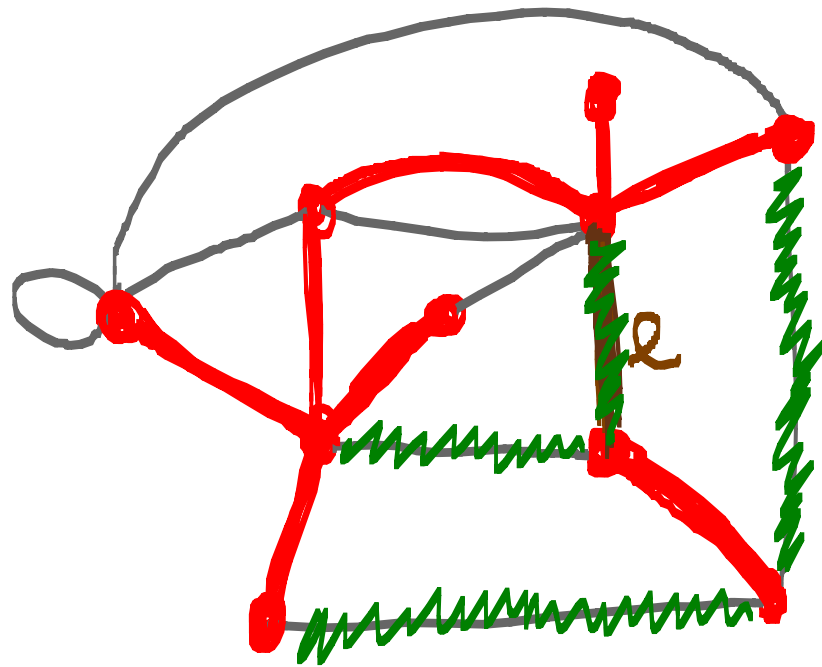


Cocycle fondamental de  $e = \underline{\underline{T \cup \{e\}}}$ .  
unique cocycle inclus dans  $\underline{\underline{T \cup \{e\}}}$ .

$\bar{X}$  = complémentaire de  $X$  dans  $G$

# COCYCLE FONDAMENTAL

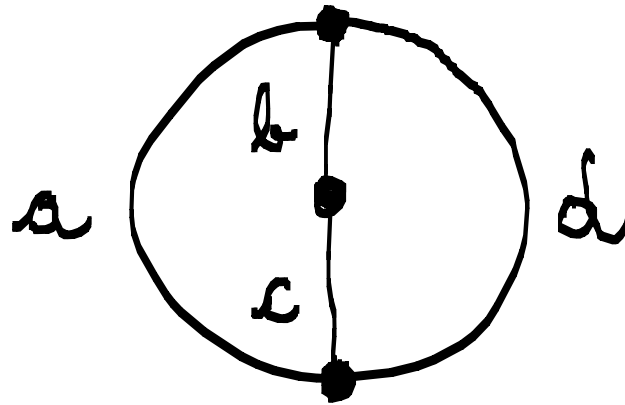
Soient  $T$  un arbre couvrant et  $e$  une arête interne,



Cocycle fondamental de  $e = \underline{\underline{T \cup \{e\}}}$ .  
unique cocycle inclus dans  $\underline{\underline{T \cup \{e\}}}$ .

$\bar{X}$  = complémentaire de  $X$  dans  $G$

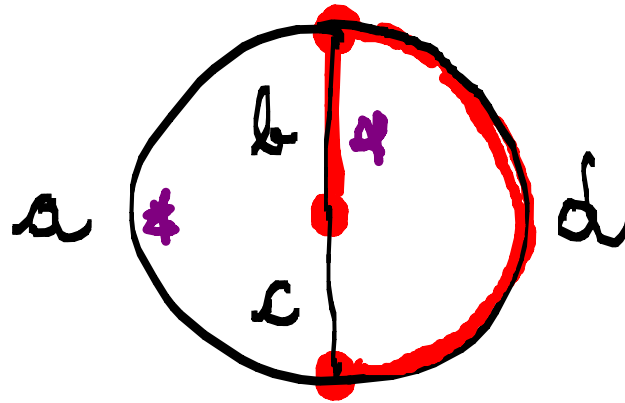
# ACTIVITÉ SELON TUTTE



On étiquette et on ordonne les arêtes :

$$a < b < c < d$$

# ACTIVITÉ SELON TUTTE



On étiquette et on ordonne les arêtes :

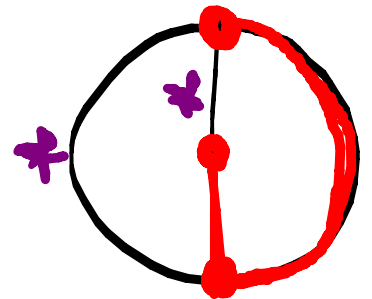
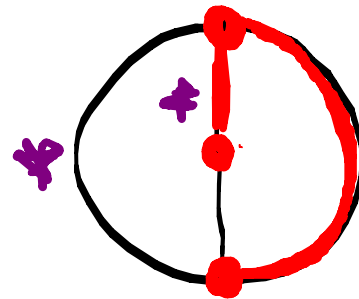
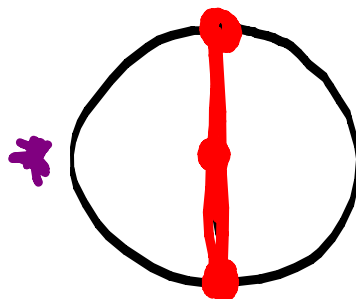
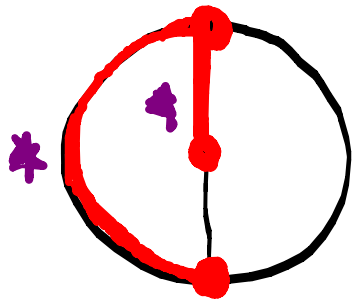
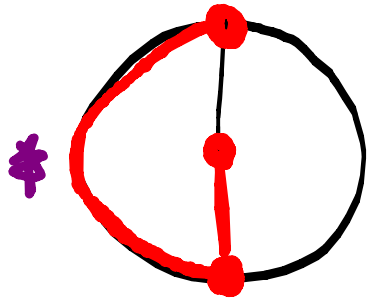
$$a < b < c < d$$

Arête active = arête minimale dans son cycle / cocycle fondamental

# ACTIVITÉ SELON TUTTE

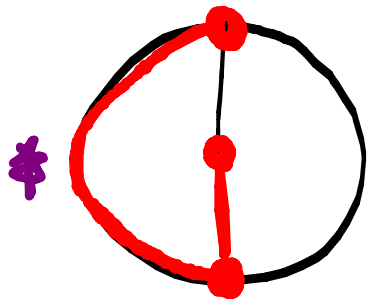


$$a < b < c < d$$

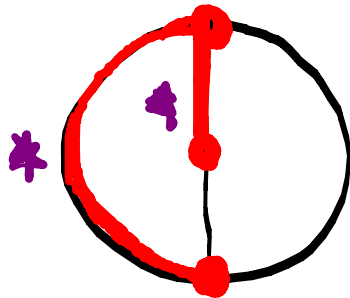




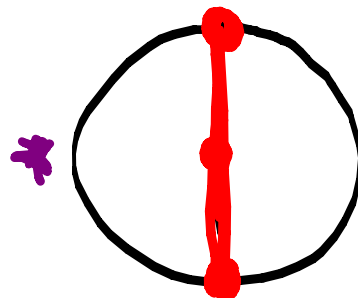
# ACTIVITÉ SELON TUTTE



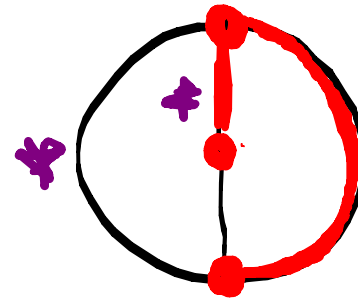
$x$



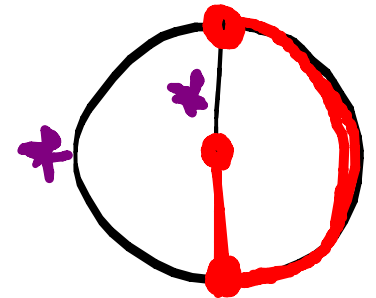
$x^2$



$y$



$xy$

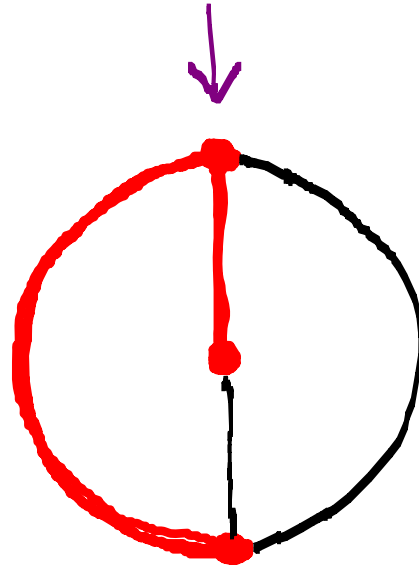


$y^2$

$$T_{\oplus}(x, y) = x^2 + x + xy + y + y^2$$

# ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + enracinement de  $G$  :



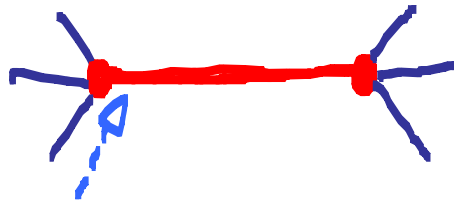
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + enracinement de  $G$  :

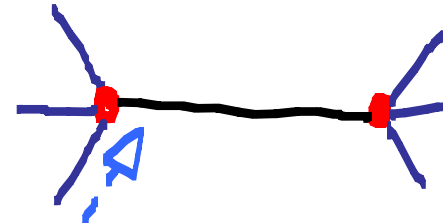


Règles :

Arête interne

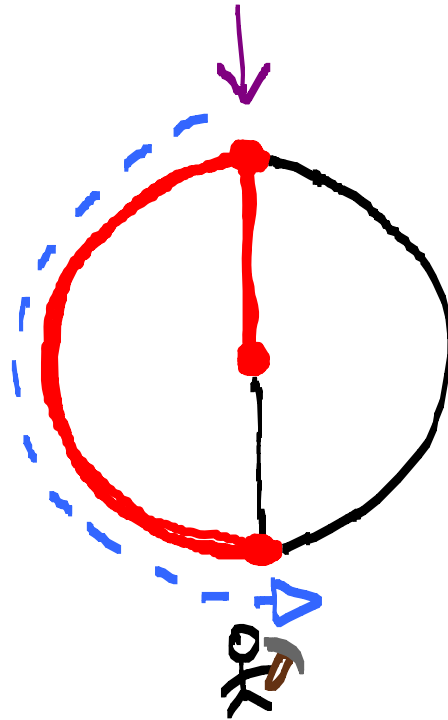


Arête externe



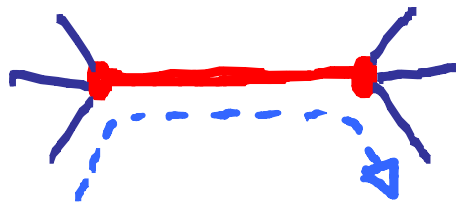
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + enracinement de  $G$  :



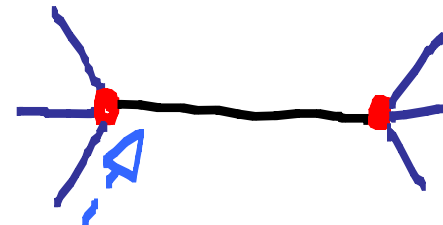
Règles :

Arête interne



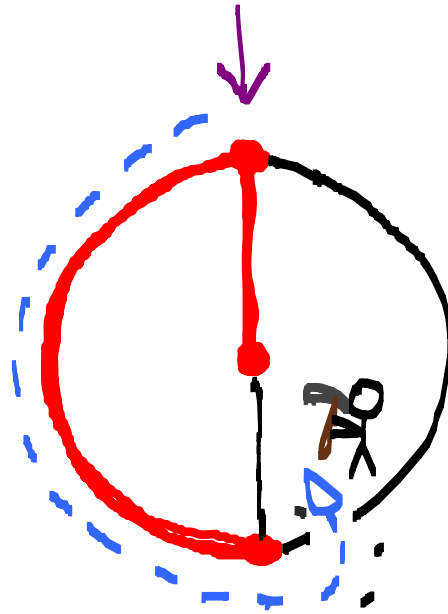
On longe -

Arête externe



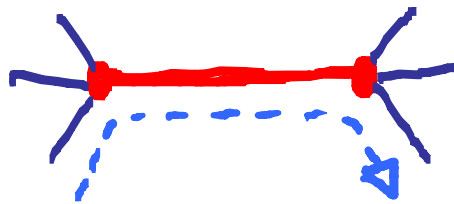
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + enracinement de  $G$  :



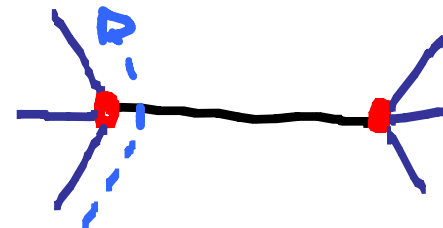
Règles :

Arête interne



On longe -

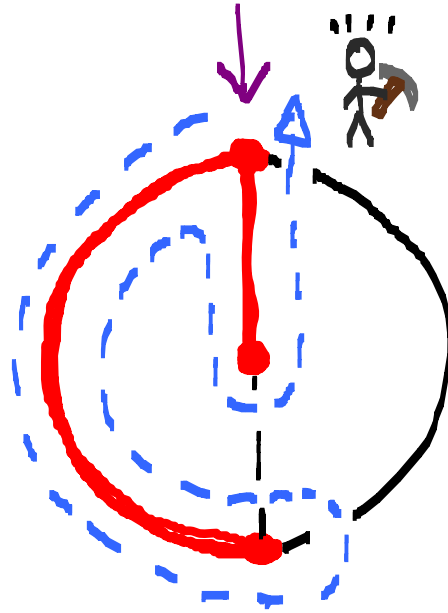
Arête externe



On traverse -

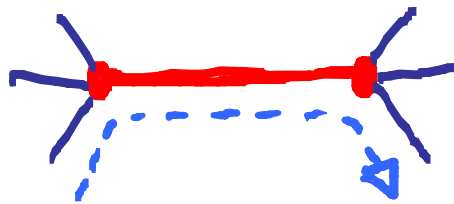
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + enracinement de  $G$  :



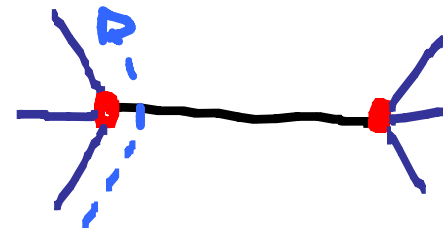
Règles :

Arête interne



On longe -

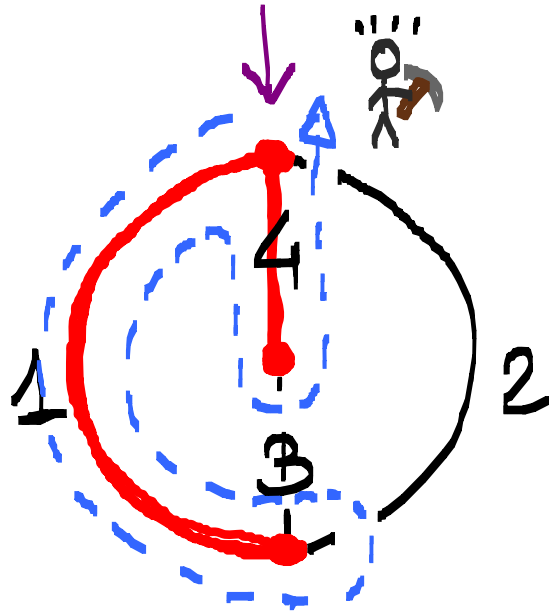
Arête externe



On traverse -

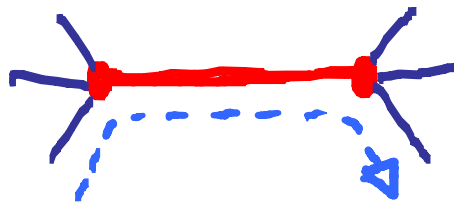
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + enracinement de  $G$  :



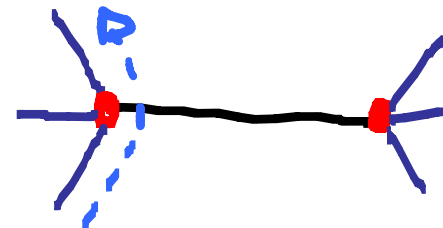
Règles :

Arête interne



On longe -

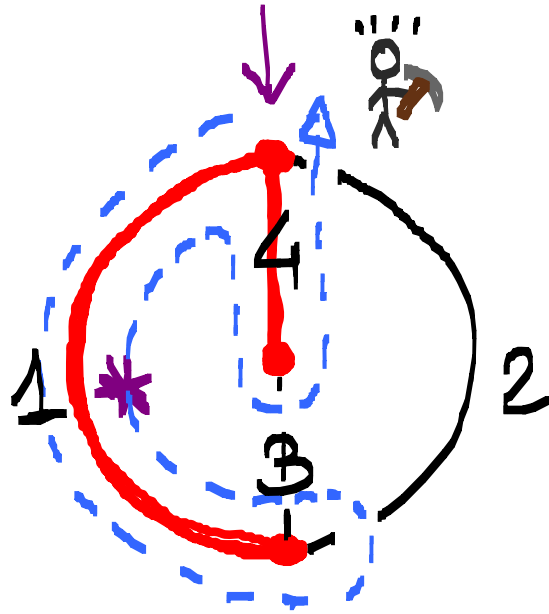
Arête externe



On traverse -

# ACTIVITÉ SELON BERNARDI: DÉFINITION

On fixe un plongement + enracinement de  $G$  :



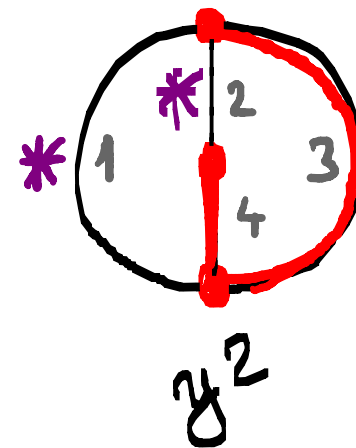
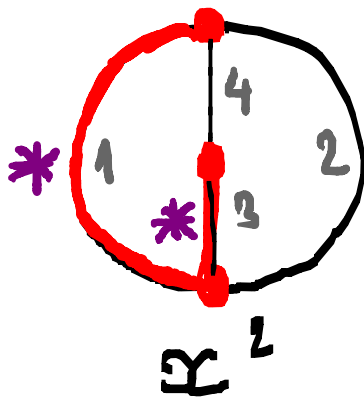
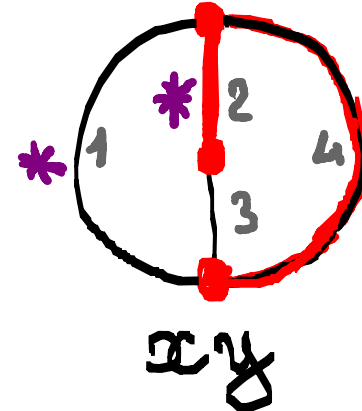
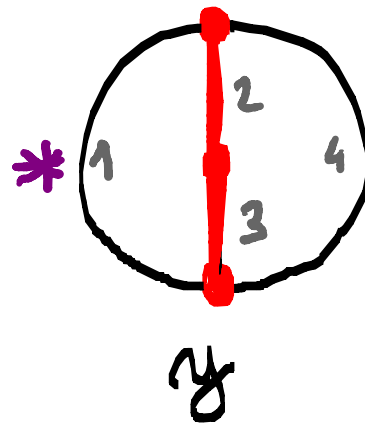
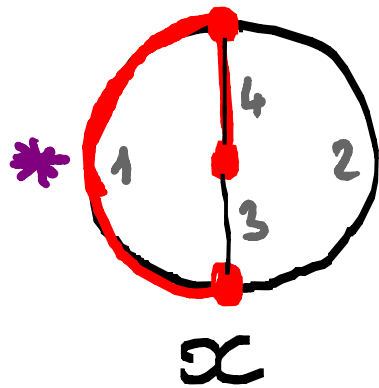
Arête active = Arête minimale dans son cycle / cocycle fondamental

(selon l'ordre de visite des arêtes lors du tour de l'arbre)



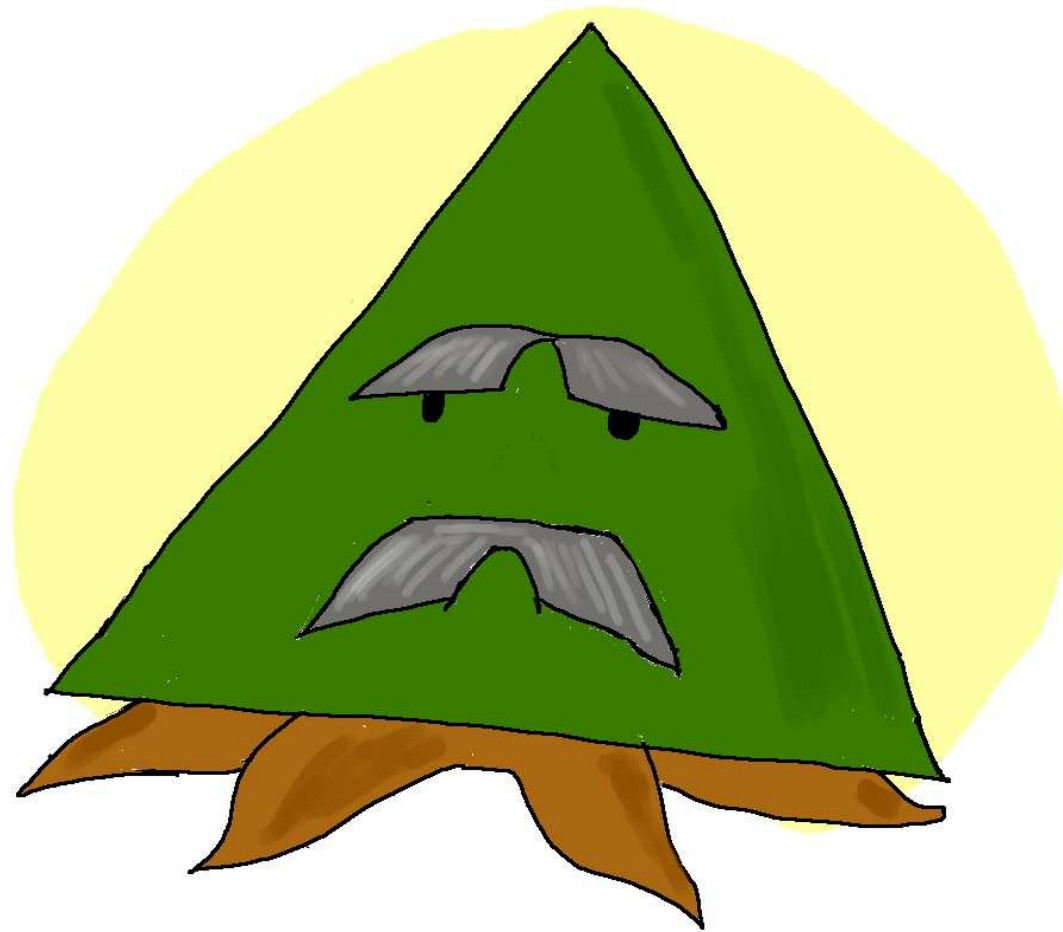
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI: EXEMPLE.

---



$$T_{\oplus}(x, y) = x^2 + x + xy + y + y^2.$$

# DELTA - ACTIVITÉ



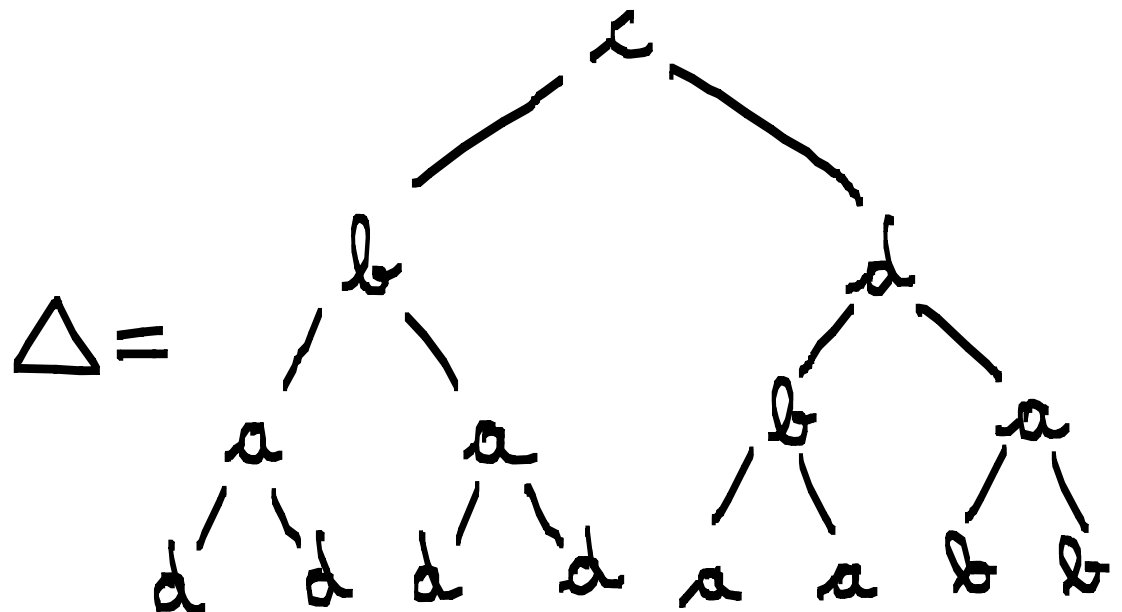
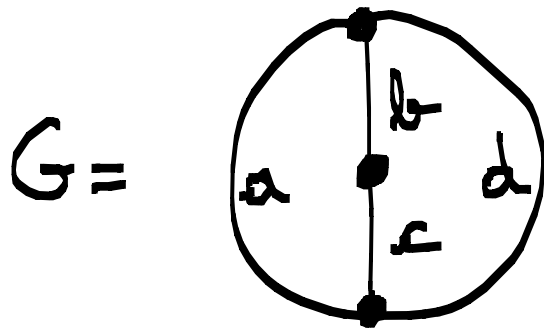
TUTTE  
TUTTE?

# ARBRE DE DÉCISION

Fixons  $G$  un graphe.

Arbre de décision = Arbre binaire (plan)  $\Delta$  avec un étiquetage  $V(\Delta) \rightarrow E(G)$  tq le long de n'importe quel chemin partant de la racine jusqu'à une feuille de  $\Delta$ , la suite des étiquettes forme une permutation de  $E(G)$ .

Ex:  
        



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: sous-graphe  $S$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;

Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire

$e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$   
ou standard externe dans  $H$ :

$H \leftarrow$  supprime  $(H, e_k)$

$n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :

Apposer  $*$  à  $e_k$

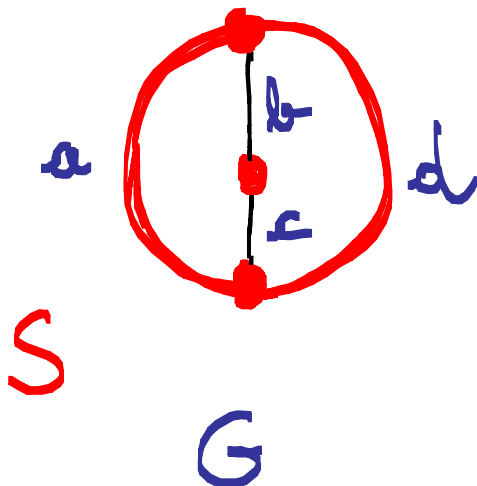
Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$   
ou standard interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte  $(H, e_k)$

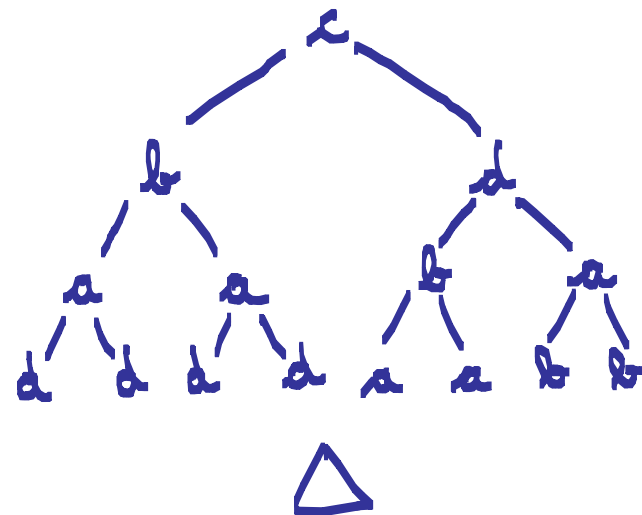
$n \rightarrow$  fils droit de  $n$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :

Apposer  $*$  à  $e_k$



Rassemble  
à  
[Gordon-Traldi]



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: sous-graphe  $S$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;

Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire

$e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$   
ou standard externe dans  $H$ :

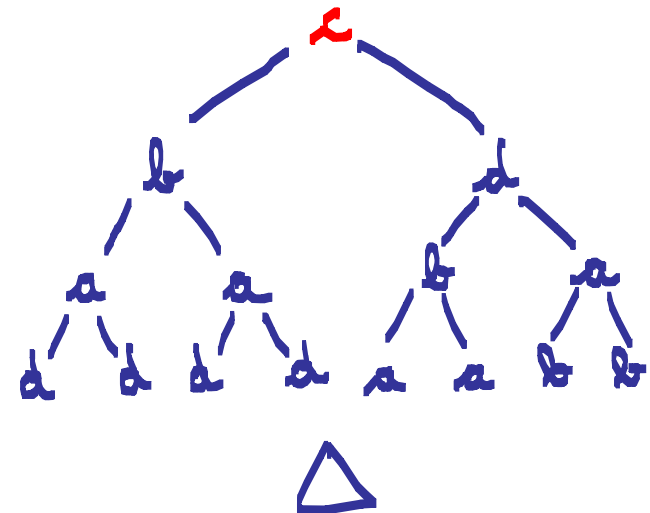
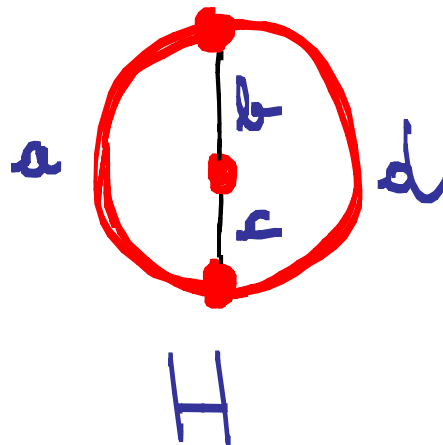
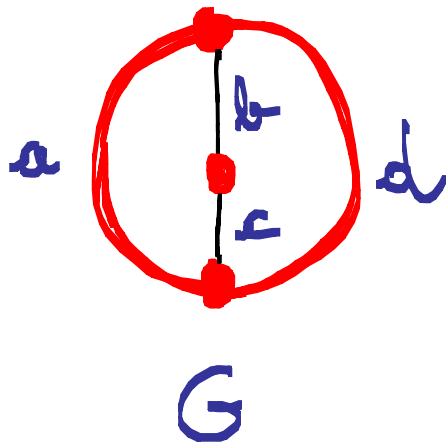
$H \leftarrow$  supprime  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$   
ou standard interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils droit de  $n$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: sous-graphe  $S$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;  
Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire  
 $e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$   
ou standard externe dans  $H$ :

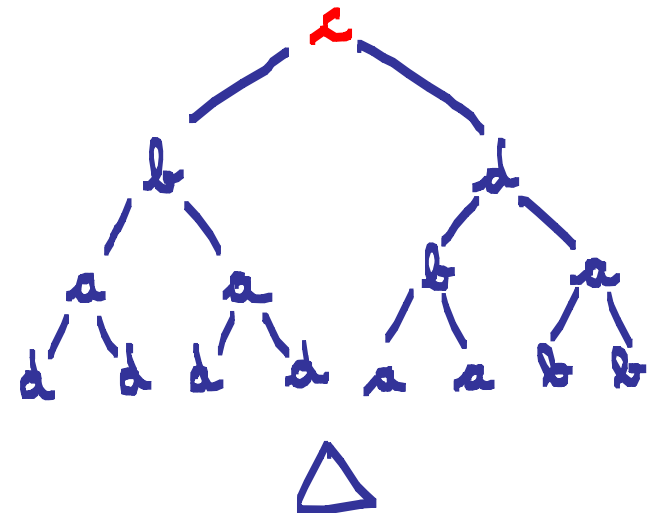
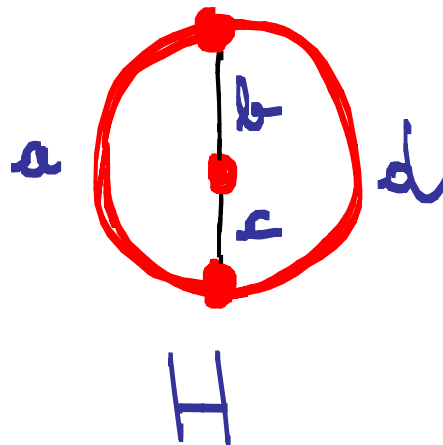
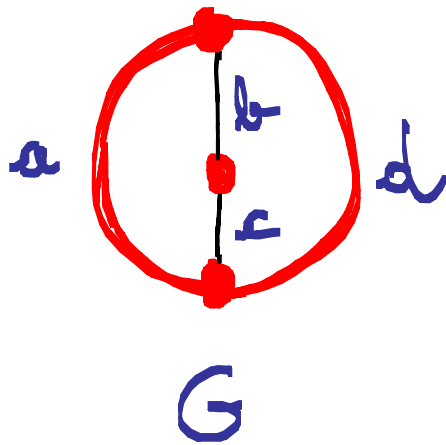
$H \leftarrow$  supprime  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :  
Ajouter  $*$  à  $e_k$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$   
ou standard interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils droit de  $n$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :  
Ajouter  $*$  à  $e_k$



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: sous-graphe  $S$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;

Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire

$e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$   
ou standard externe dans  $H$ :

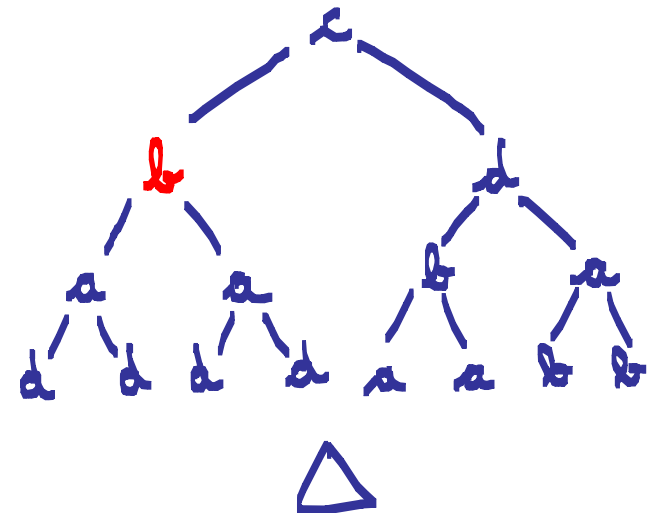
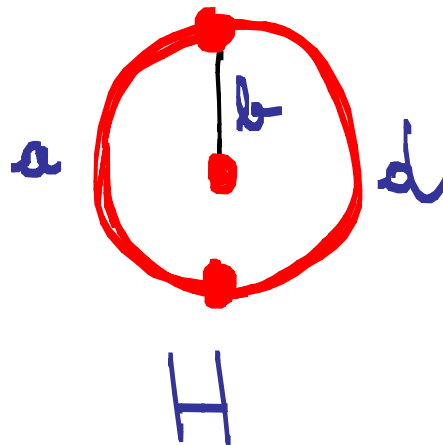
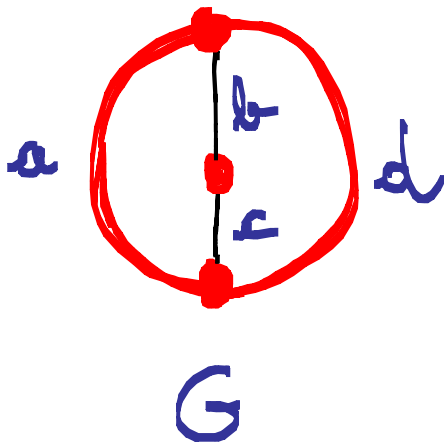
$H \leftarrow$  supprime  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$   
ou standard interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils droit de  $n$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: sous-graphe  $S$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;

Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire

$e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$   
ou standard externe dans  $H$ :

$H \leftarrow$  supprime  $(H, e_k)$

$n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :

Apposer  $*$  à  $e_k$

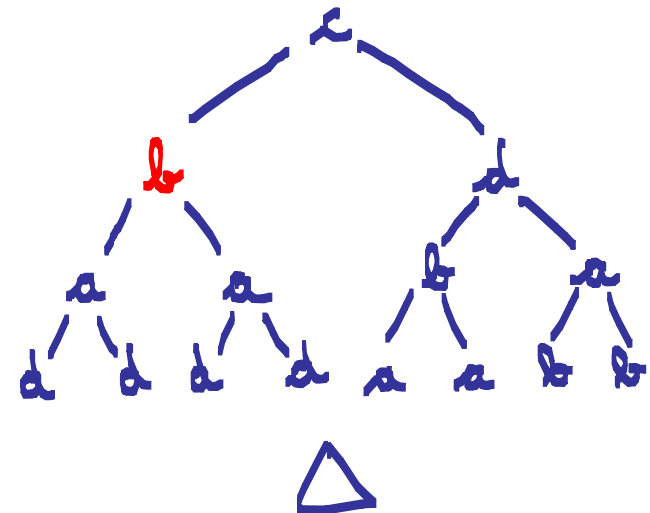
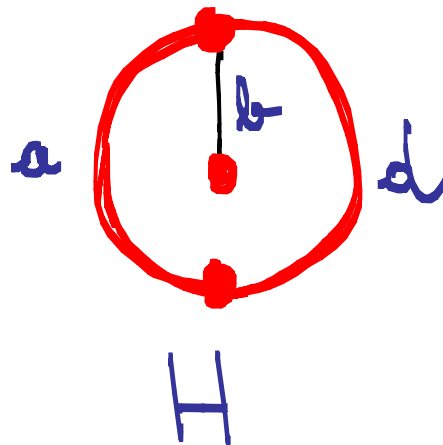
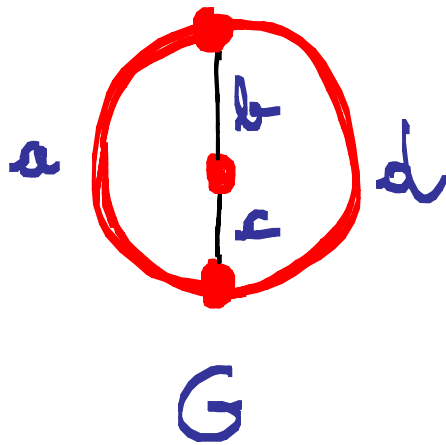
Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$   
ou standard interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte  $(H, e_k)$

$n \rightarrow$  fils droit de  $n$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :

Apposer  $*$  à  $e_k$





# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: sous-graphe  $S$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;

Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire

$e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$   
ou standard externe dans  $H$ :

$H \leftarrow$  supprime  $(H, e_k)$

$n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :

Apposer  $*$  à  $e_k$

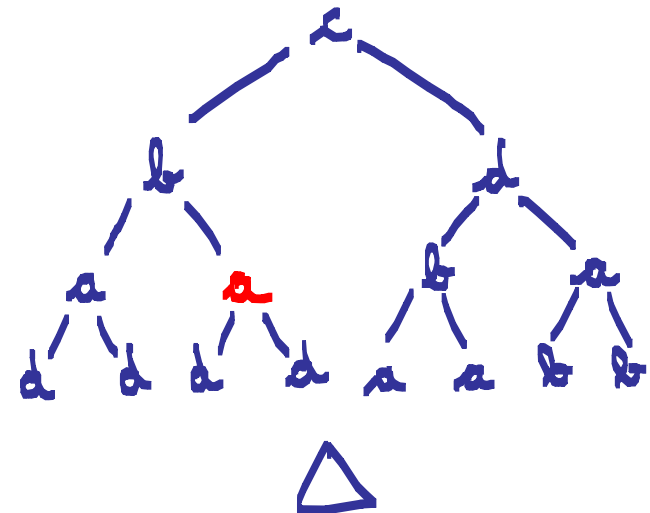
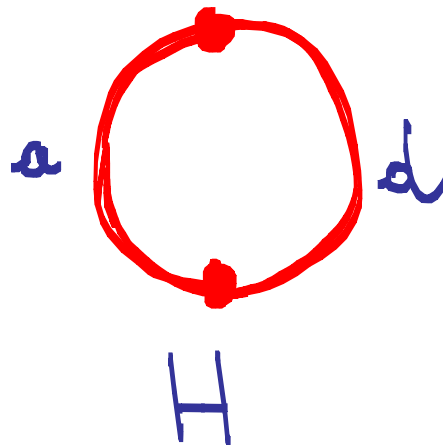
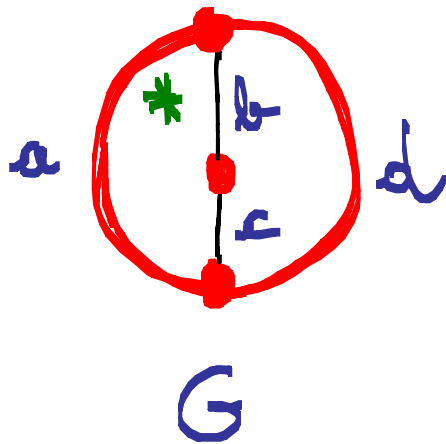
Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$   
ou standard interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte  $(H, e_k)$

$n \rightarrow$  fils droit de  $n$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :

Apposer  $*$  à  $e_k$



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: sous-graphe  $S$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;

Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire

$e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$   
ou standard externe dans  $H$ :

$H \leftarrow$  supprime  $(H, e_k)$

$n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :

Apposer  $*$  à  $e_k$

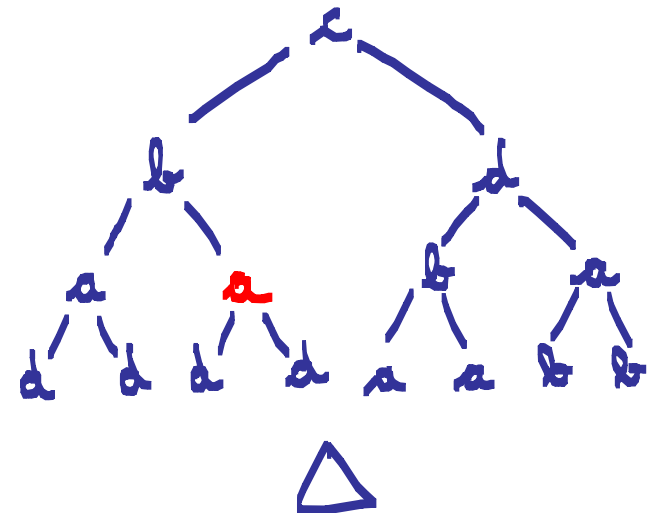
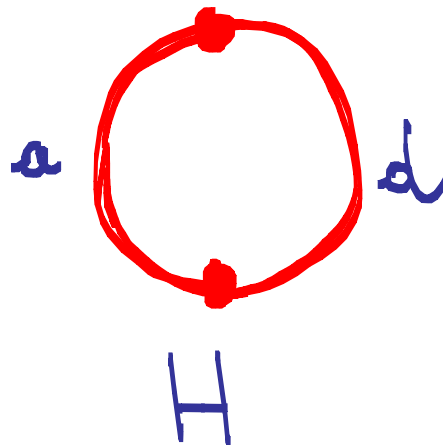
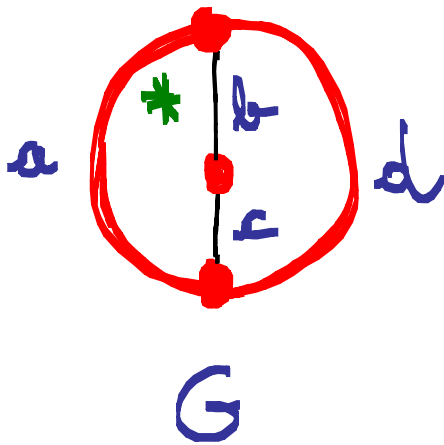
Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$   
ou standard interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte  $(H, e_k)$

$n \rightarrow$  fils droit de  $n$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :

Apposer  $*$  à  $e_k$



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: sous-graphe  $S$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;

Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire

$e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$   
ou standard externe dans  $H$ :

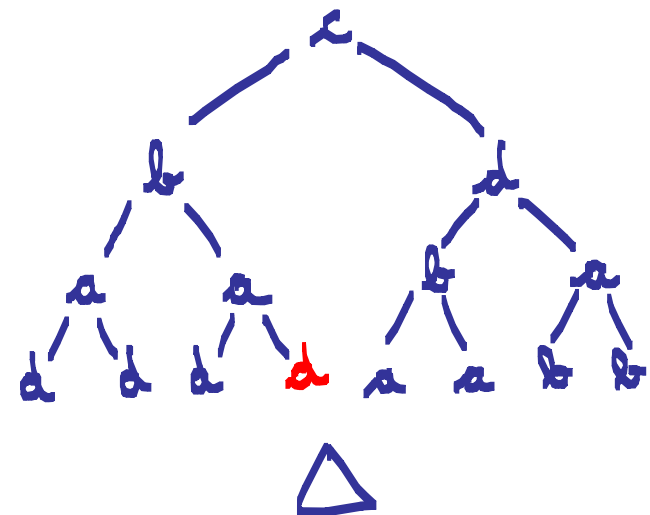
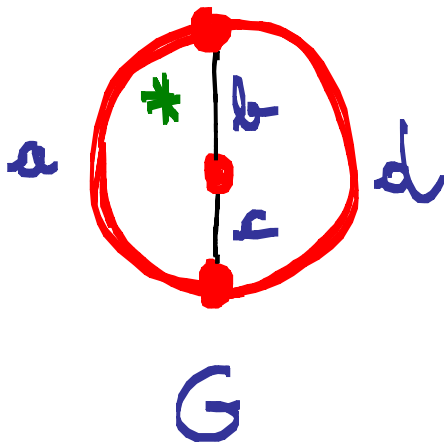
$H \leftarrow$  supprime  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :  
Ajouter  $*$  à  $e_k$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$   
ou standard interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils droit de  $n$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :  
Ajouter  $*$  à  $e_k$



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: sous-graphe  $S$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;  
 Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire  
 $e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$   
 ou standard externe dans  $H$ :

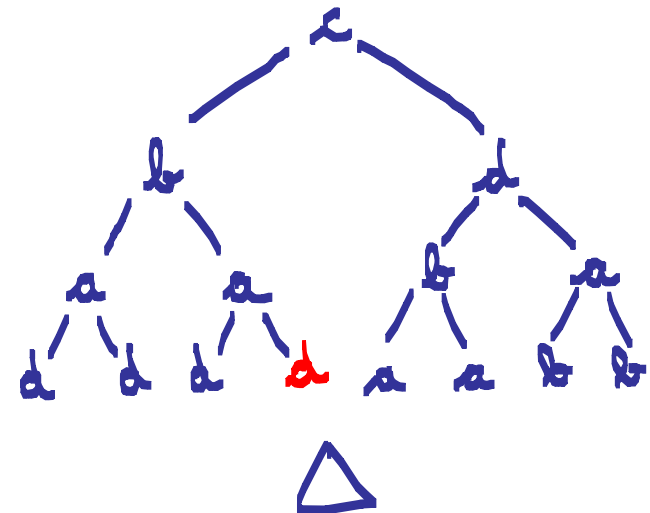
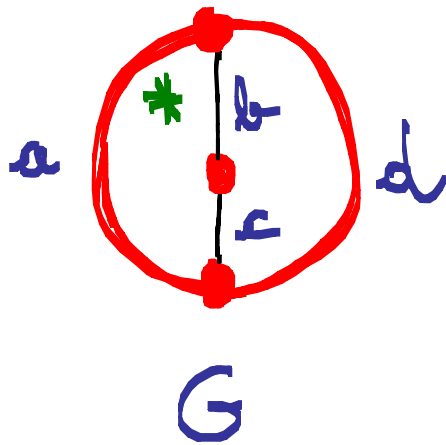
$H \leftarrow$  supprime  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :  
 Apposer \* à  $e_k$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$   
 ou standard interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils droit de  $n$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :  
 Apposer \* à  $e_k$



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: sous-graphe  $S$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;

Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire

$e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$   
ou standard externe dans  $H$ :

$H \leftarrow$  supprime  $(H, e_k)$

$n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :

Apposer  $*$  à  $e_k$

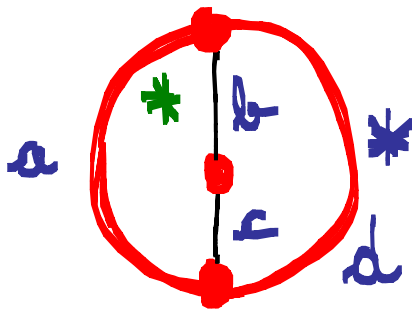
Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$   
ou standard interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte  $(H, e_k)$

$n \rightarrow$  fils droit de  $n$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :

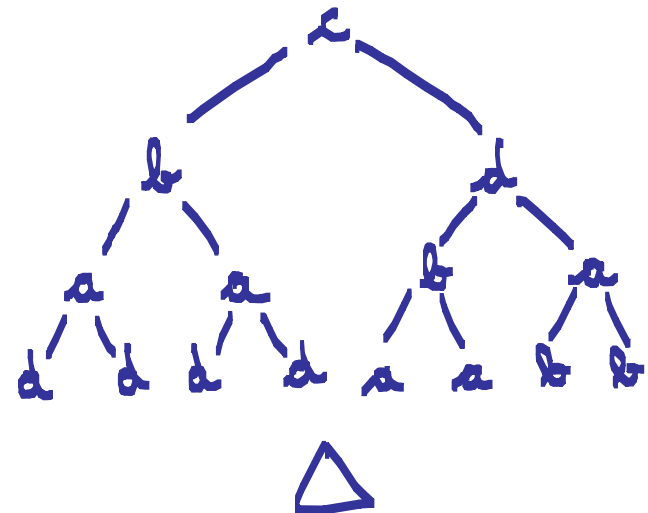
Apposer  $*$  à  $e_k$



G



H



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: arbre couvrant  $T$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;  
Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire  
 $e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est externe dans  $H$ :

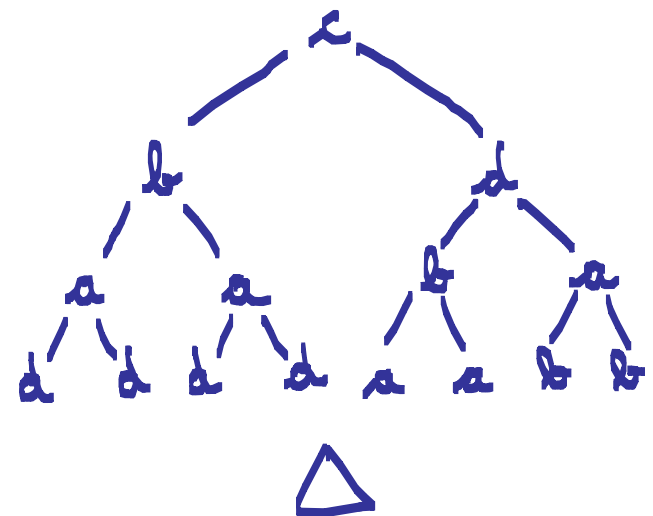
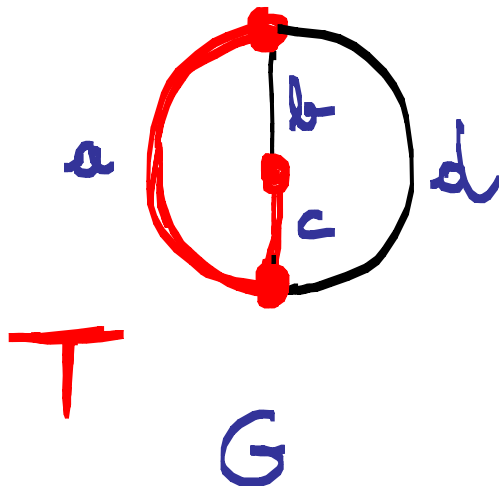
$H \leftarrow$  supprime( $H, e_k$ )  
 $n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$

Si  $e_k$  est interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte( $H, e_k$ )  
 $n \rightarrow$  fils droit de  $n$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: arbre couvrant  $T$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;  
Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire  
 $e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est externe dans  $H$ :

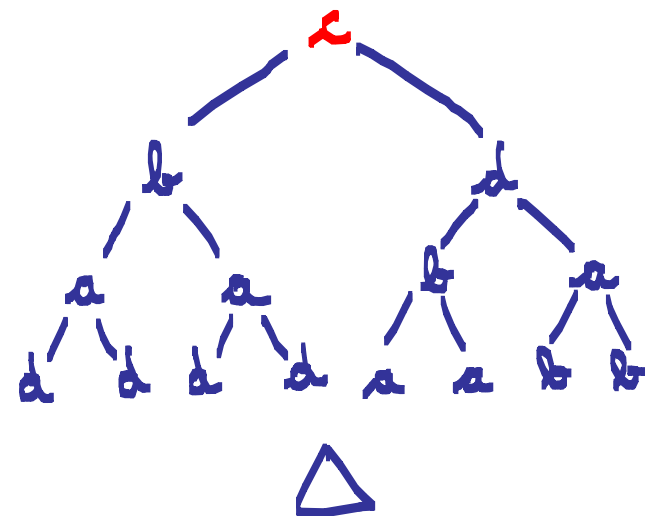
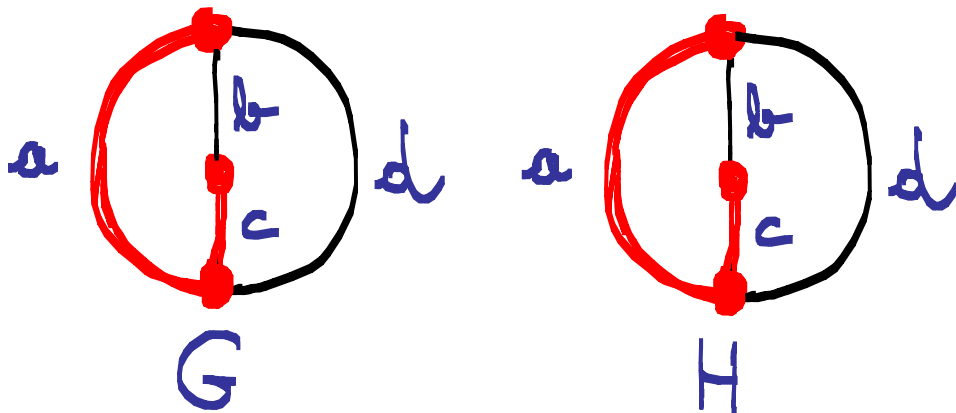
$H \leftarrow$  supprime  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$

Si  $e_k$  est interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils droit de  $n$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: arbre couvrant  $T$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;  
Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire  
 $e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est externe dans  $H$ :

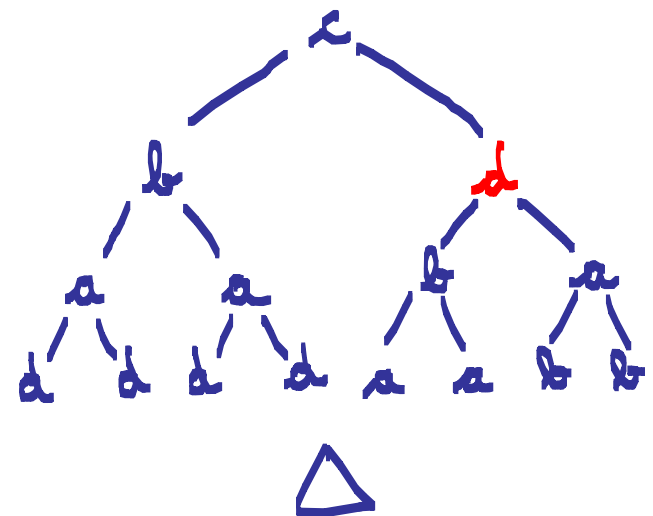
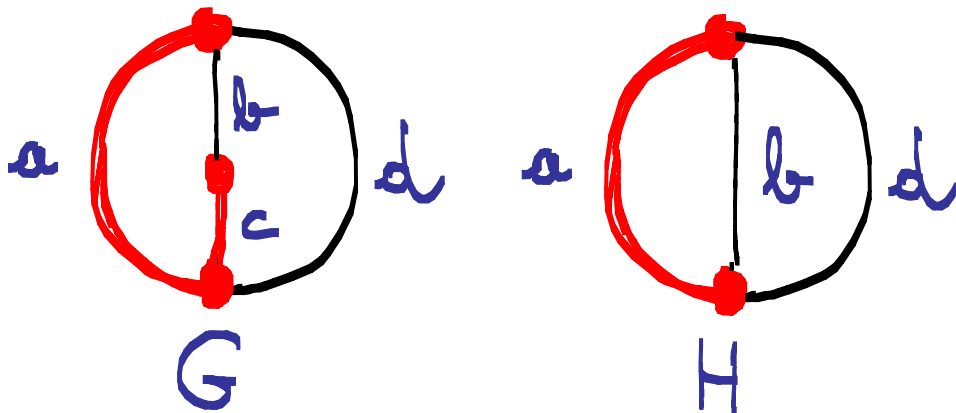
$H \leftarrow$  supprime  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$

Si  $e_k$  est interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils droit de  $n$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$





# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: arbre couvrant  $T$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;  
Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire  
 $e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est externe dans  $H$ :

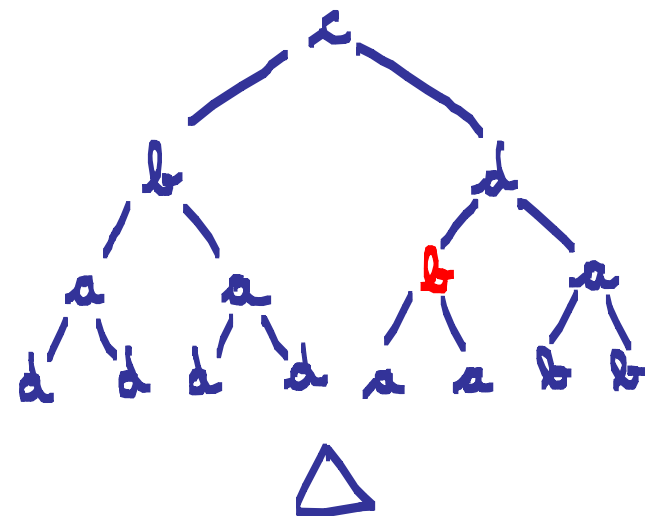
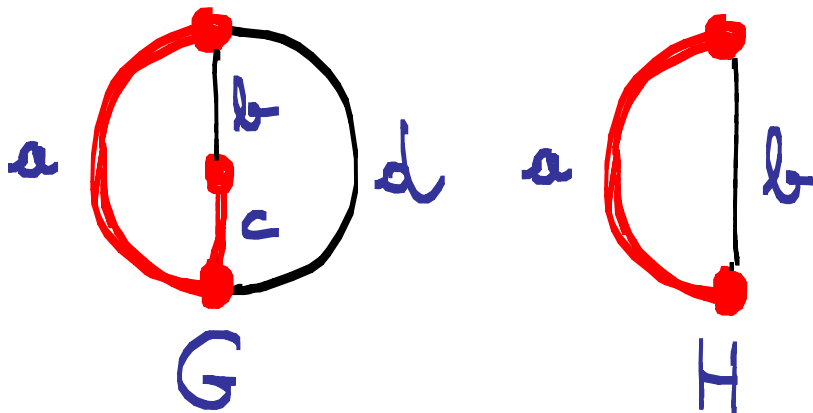
$H \leftarrow$  supprime  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$

Si  $e_k$  est interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils droit de  $n$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: arbre couvrant  $T$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;  
Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire  
 $e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est externe dans  $H$ :

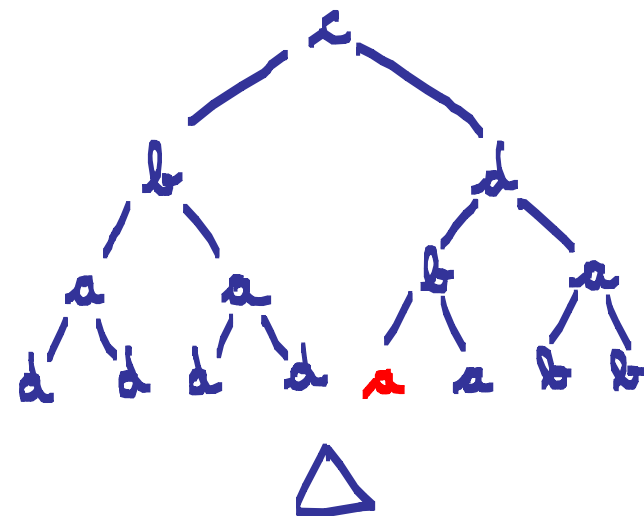
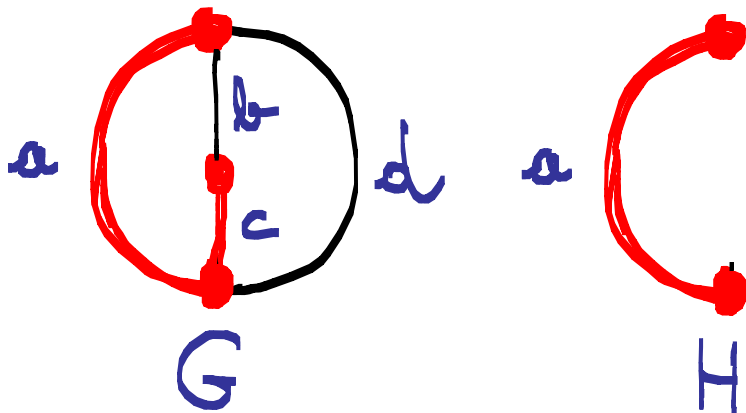
$H \leftarrow$  supprime  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$

Si  $e_k$  est interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte  $(H, e_k)$   
 $n \rightarrow$  fils droit de  $n$

Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: arbre couvrant  $T$

$H \leftarrow G$ ;  $n \leftarrow$  nœud racine de  $\Delta$ ;  
Pour  $k$  allant de 1 à  $|E(G)|$  Faire  
 $e_k \leftarrow$  étiquette de  $n$ ;

Si  $e_k$  est externe dans  $H$ :

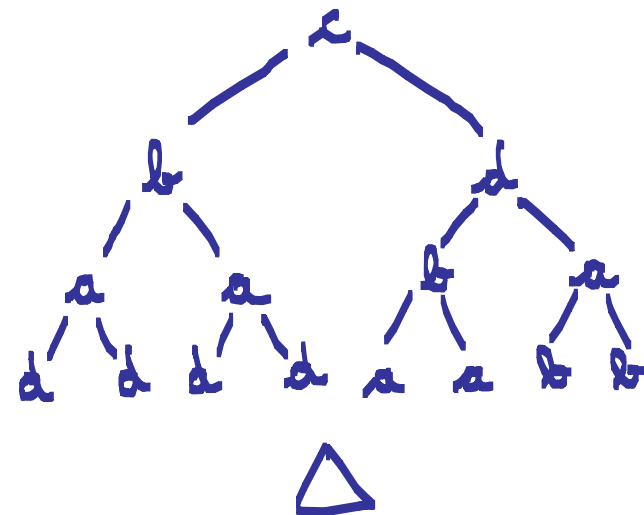
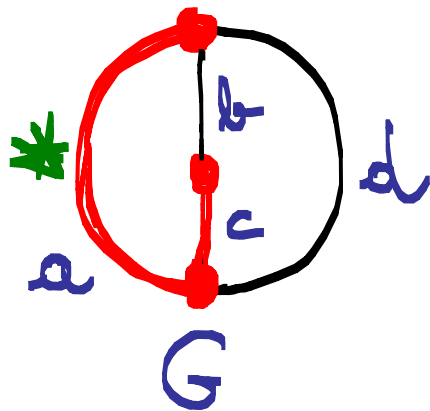
$H \leftarrow$  supprime( $H, e_k$ )  
 $n \rightarrow$  fils gauche de  $n$

Si  $e_k$  est une boucle dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$

Si  $e_k$  est interne dans  $H$ :

$H \leftarrow$  contracte( $H, e_k$ )  
 $n \rightarrow$  fils droit de  $n$

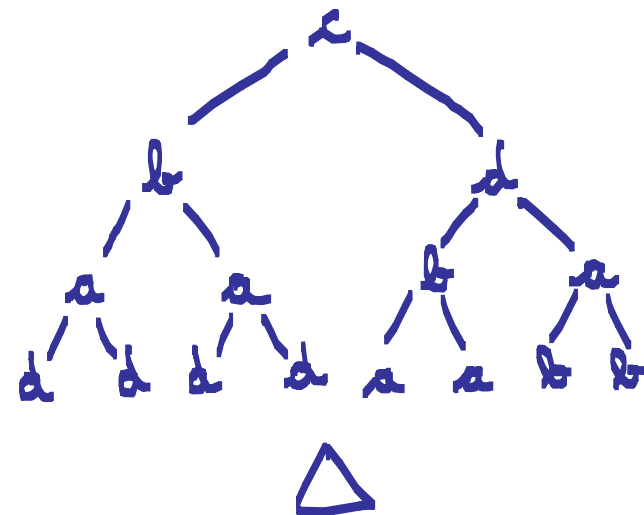
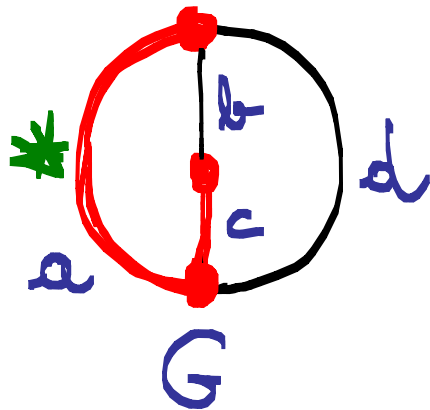
Si  $e_k$  est un isthme dans  $H$ :  
Ajouter \* à  $e_k$



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: arbre couvrant T

Arête  $\Delta$ -active = Arête avec étoile



# APPOSITION D'ÉTOILES

Paramètre: arbre couvrant  $T$

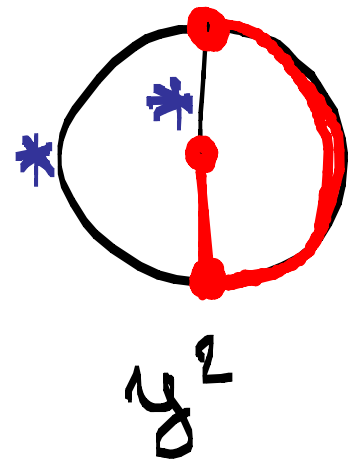
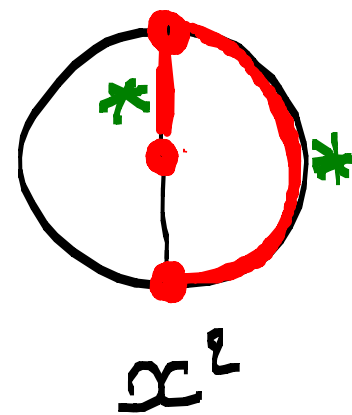
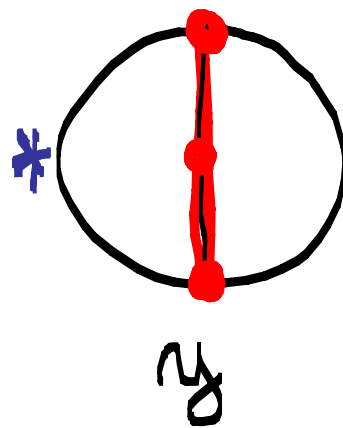
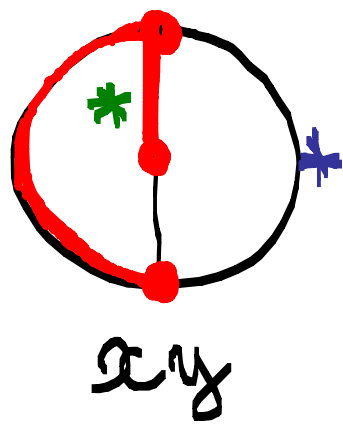
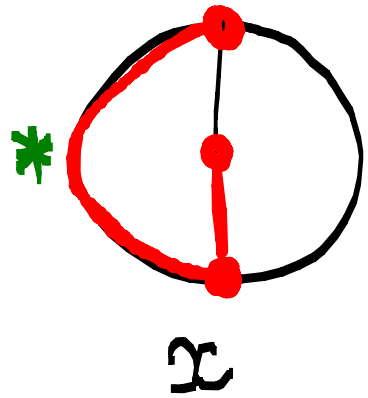
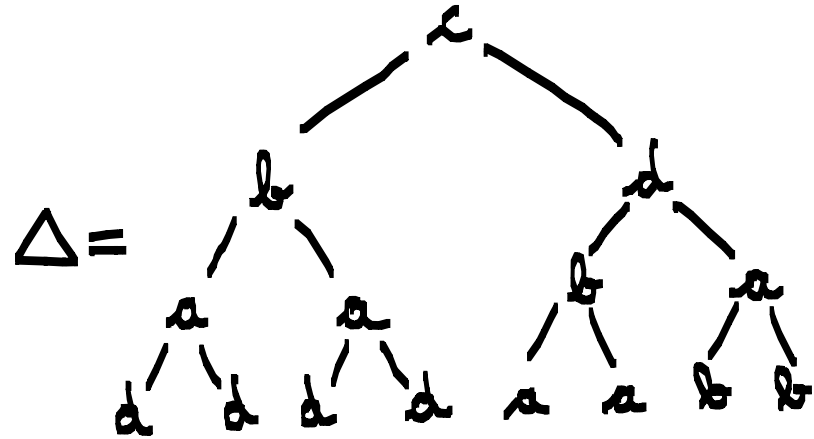
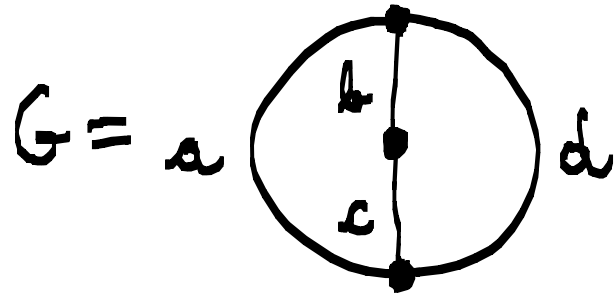
Arête  $\Delta$ -active = Arête avec étoile

Th: Quel que soit l'ordre de décision  $\Delta$ ,

$$T_G(x, y) = \sum_{T \text{ arbre couvrant}} x^{i(T)} y^{e(T)}$$

$i(T) = \#$  arêtes  $\Delta$ -actives internes,  $e(T) = \#$  arêtes  $\Delta$ -actives externes

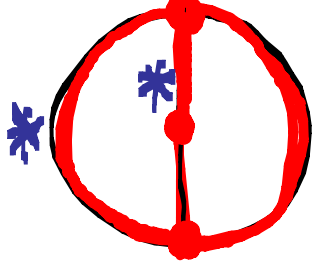
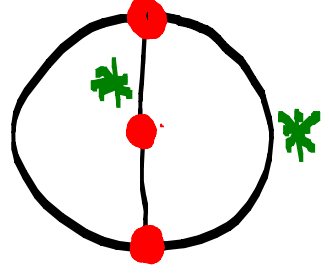
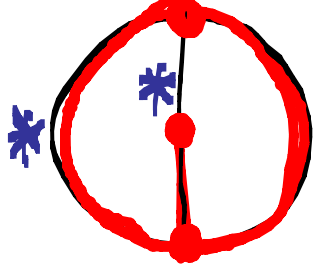
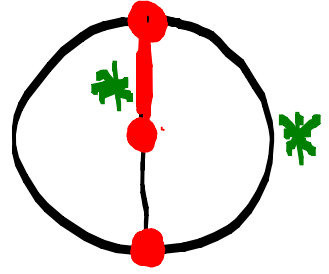
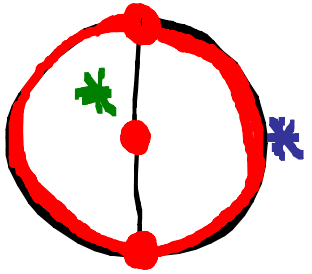
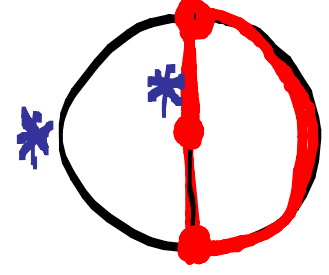
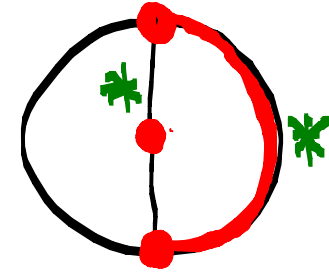
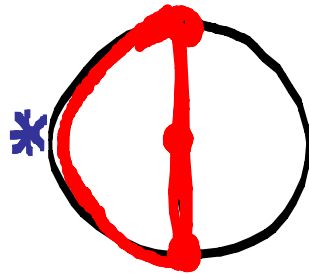
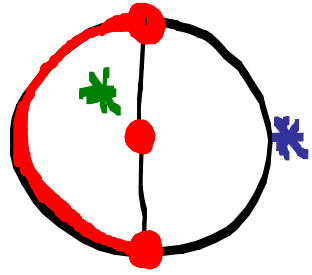
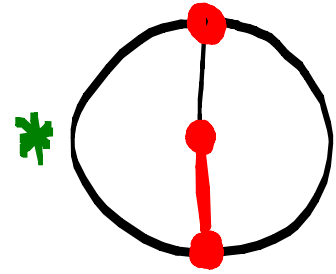
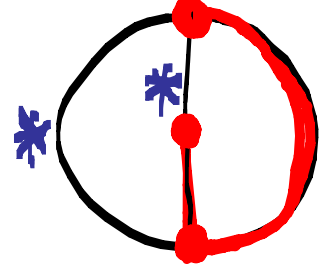
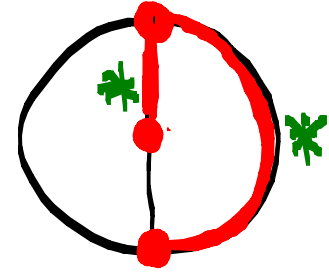
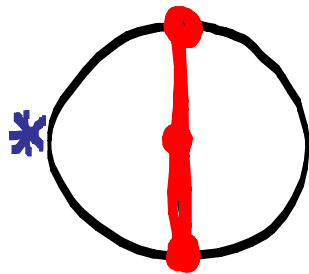
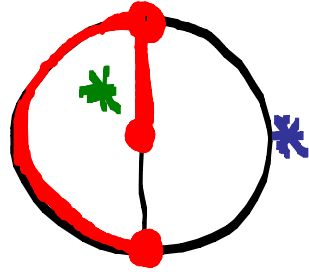
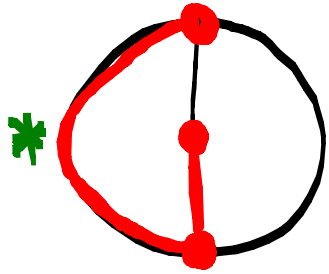
# EXAMPLE



$$T_{\oplus}(x, y) = x^2 + x + xy + y + y^2$$

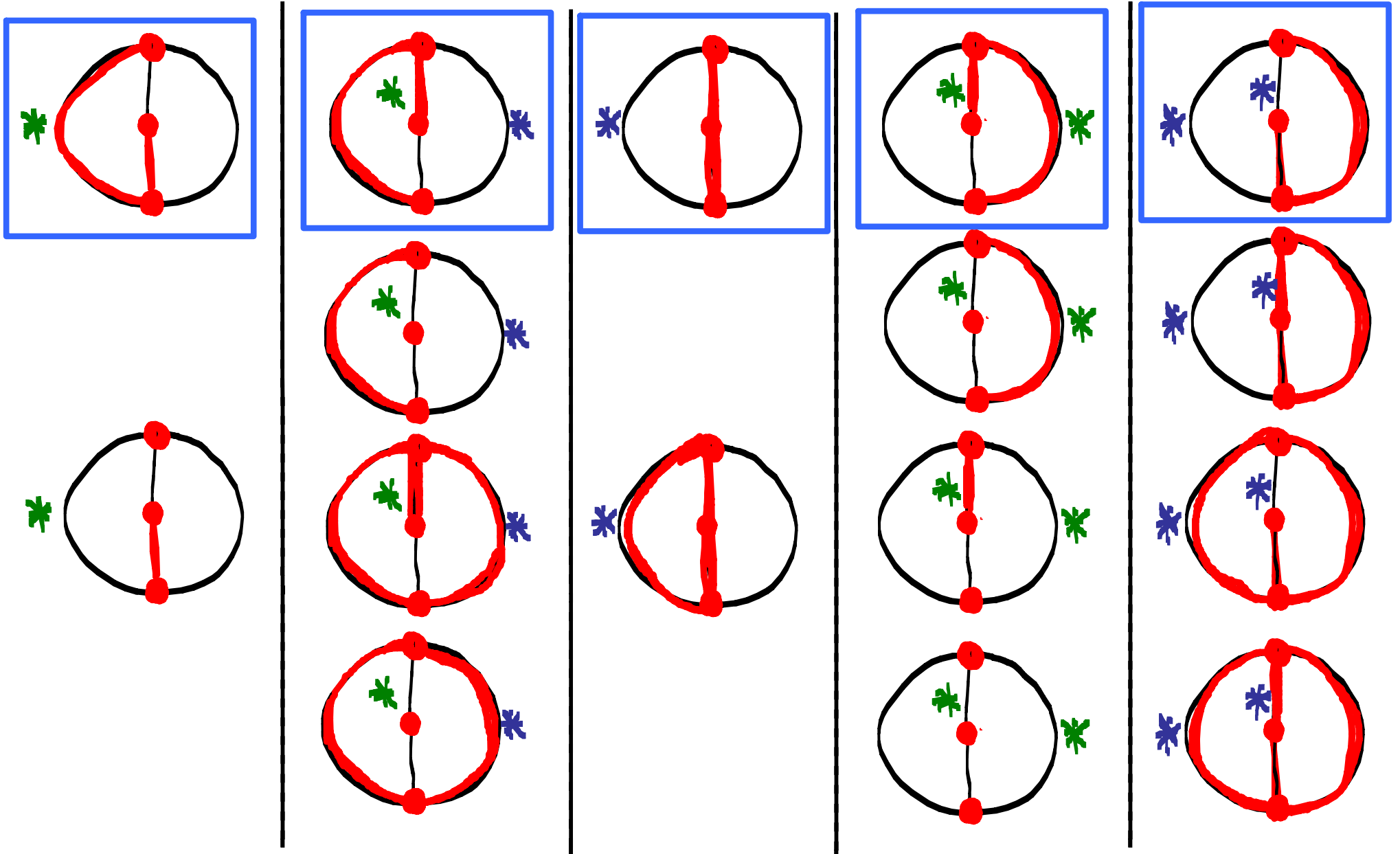
# PARTITION DES SOUS-GRAPHES

[Crapo]

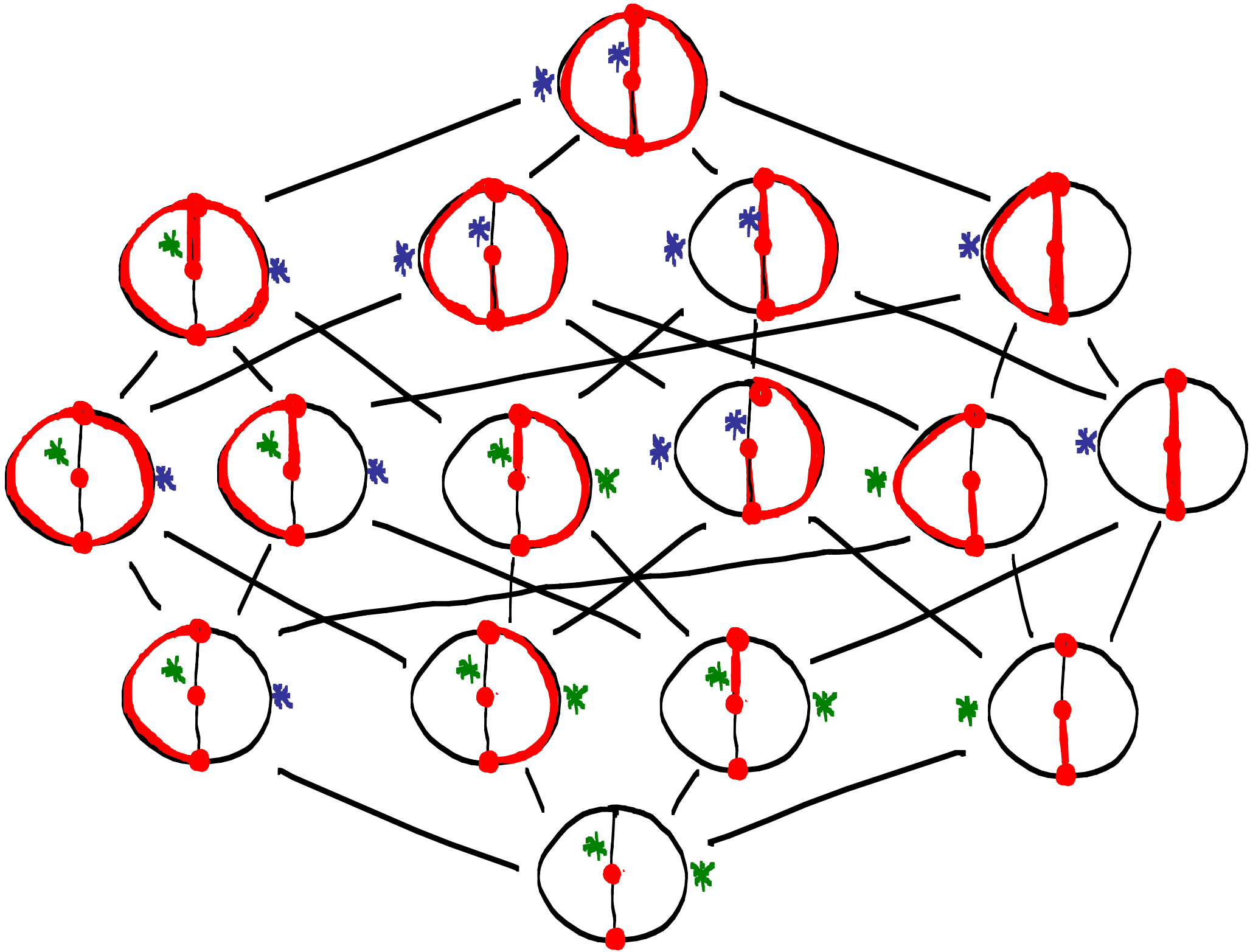


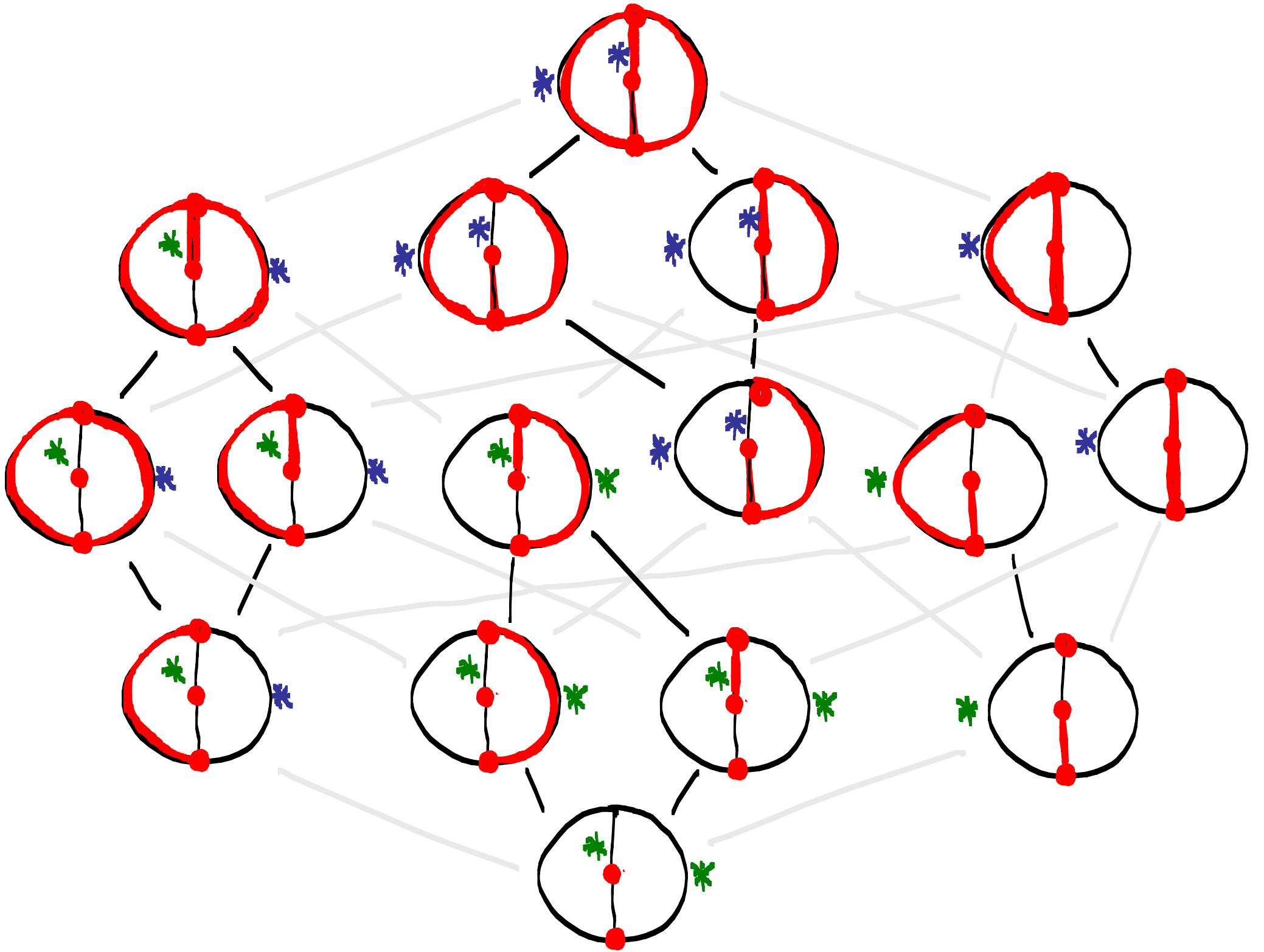
# PARTITION DES SOUS-GRAPHES

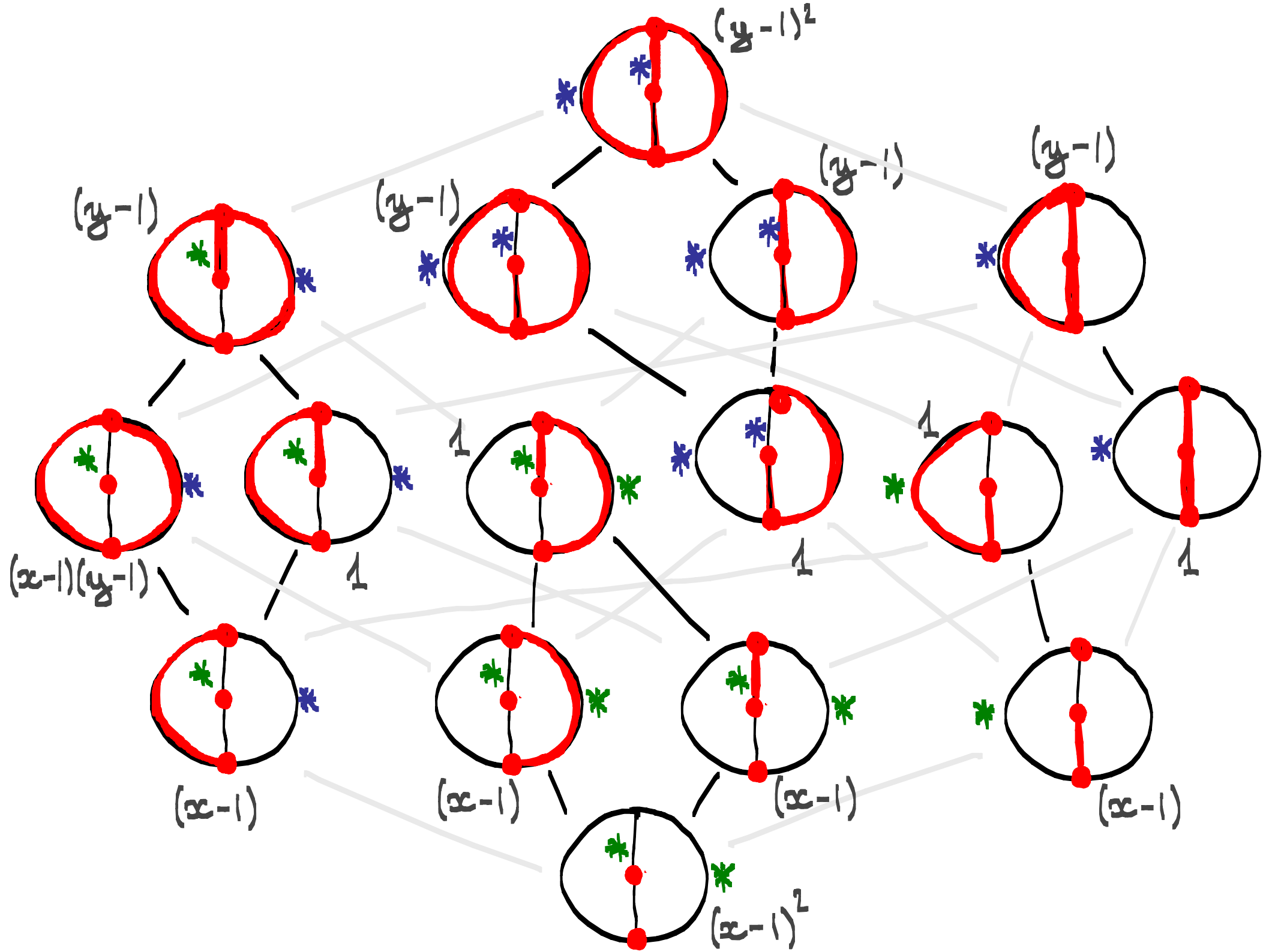
[Crapo]

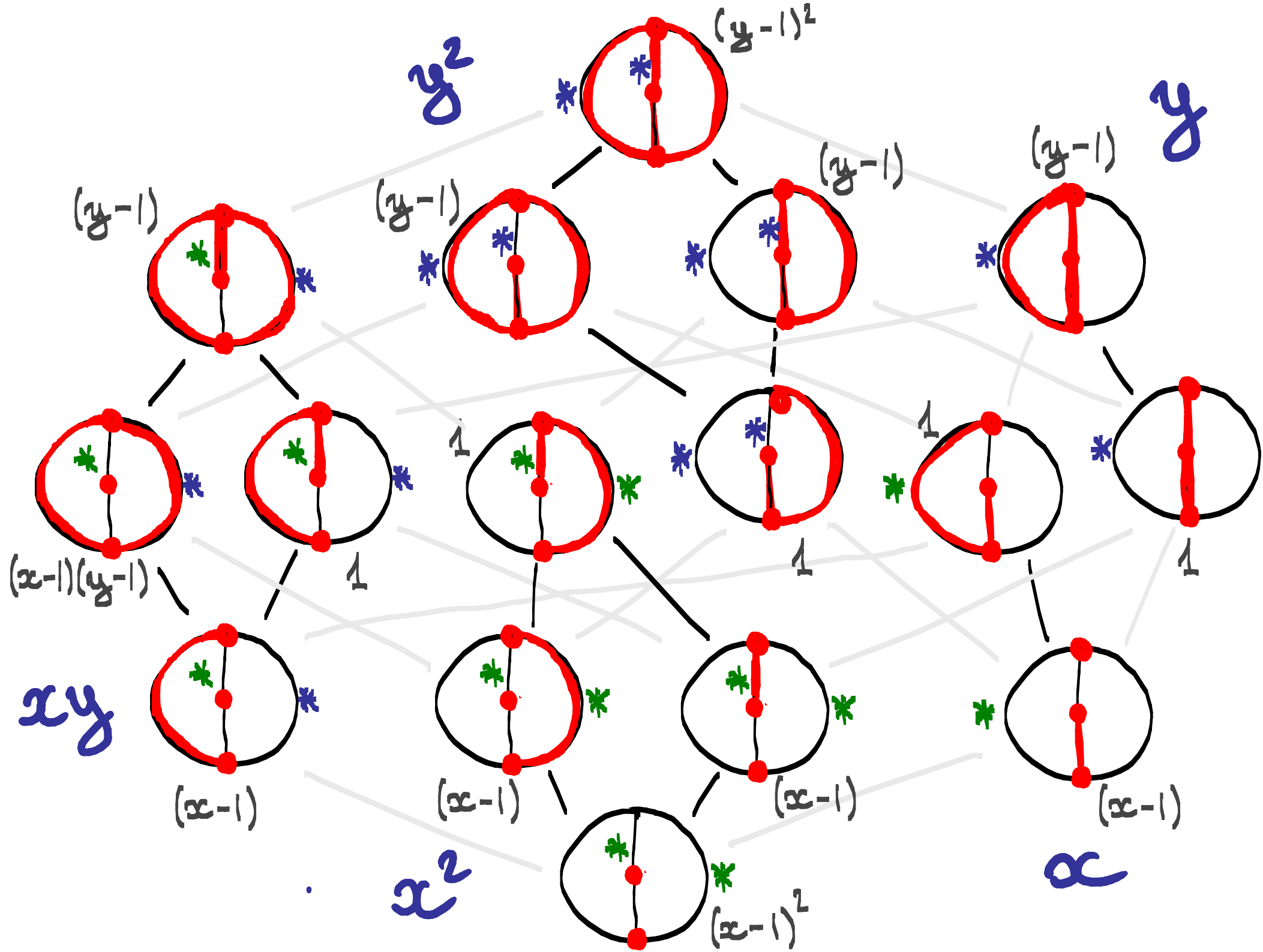




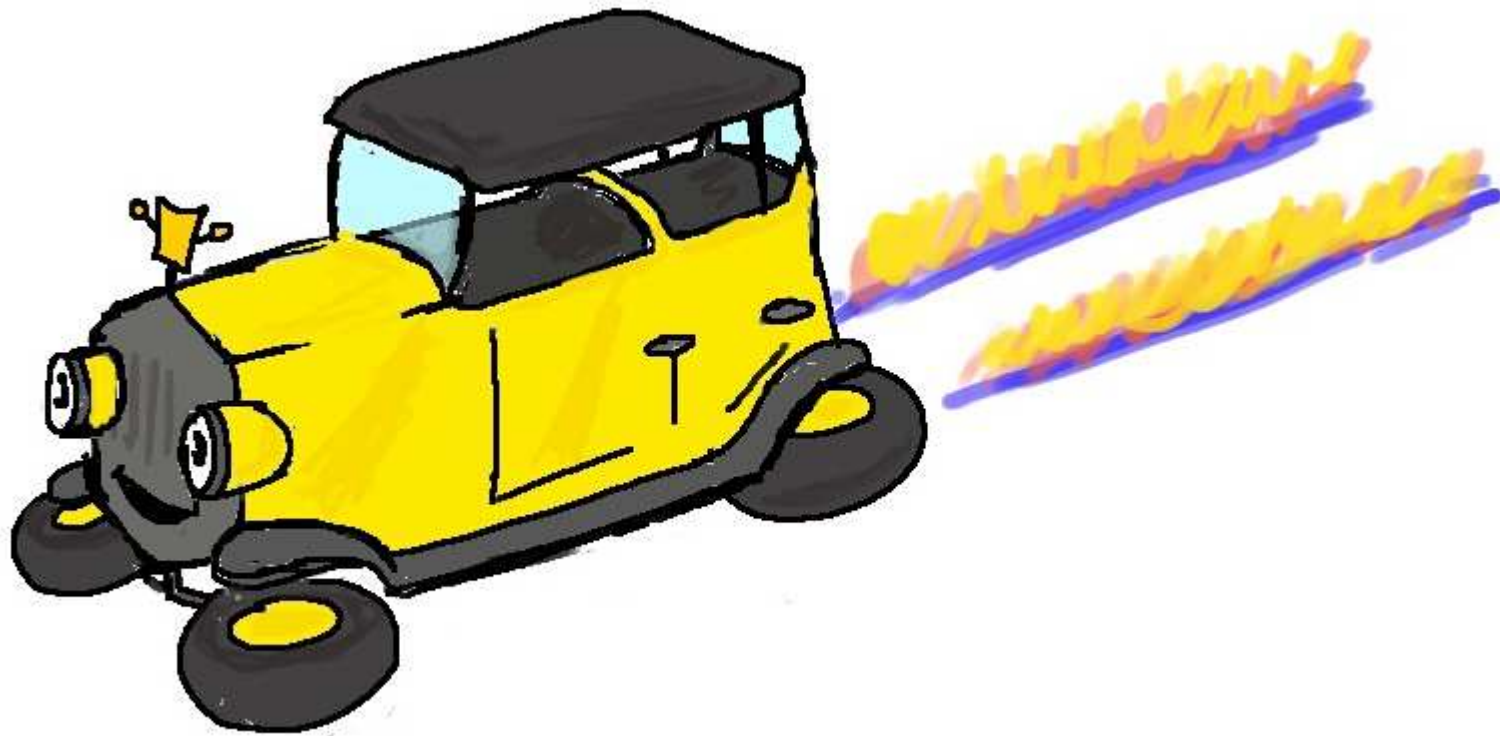








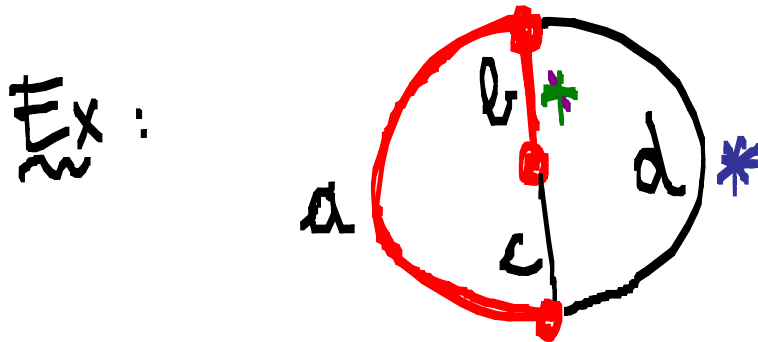
# RETOUR VERS LES ACTIVITÉS



# LIEN AVEC CYCLE / COCYCLE FONDAMENTAL

Soit  $T$  un arbre couvrant,  
 $e_k = k$ -ième arête visitée dans l'algorithme d'ajout d'

Ordonnons  $E(G)$ :  $e_1 < e_2 < \dots < e_{|E(G)|}$ .

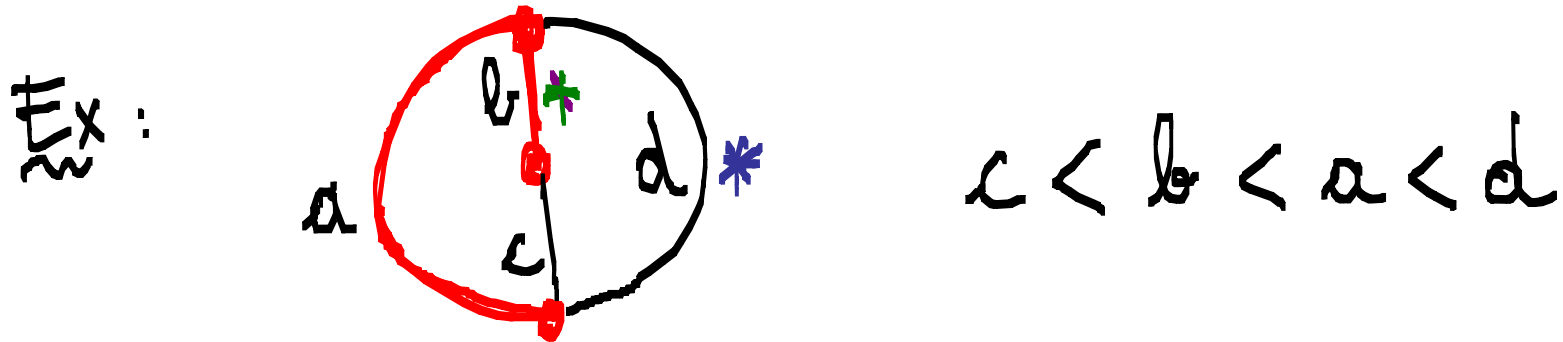


$$c < b < a < d$$

# LIEN AVEC CYCLE / COCYCLE FONDAMENTAL

Soit  $T$  un arbre couvrant,  
 $e_k = k$ -ième arête visitée dans l'algorithme d'ajout d'

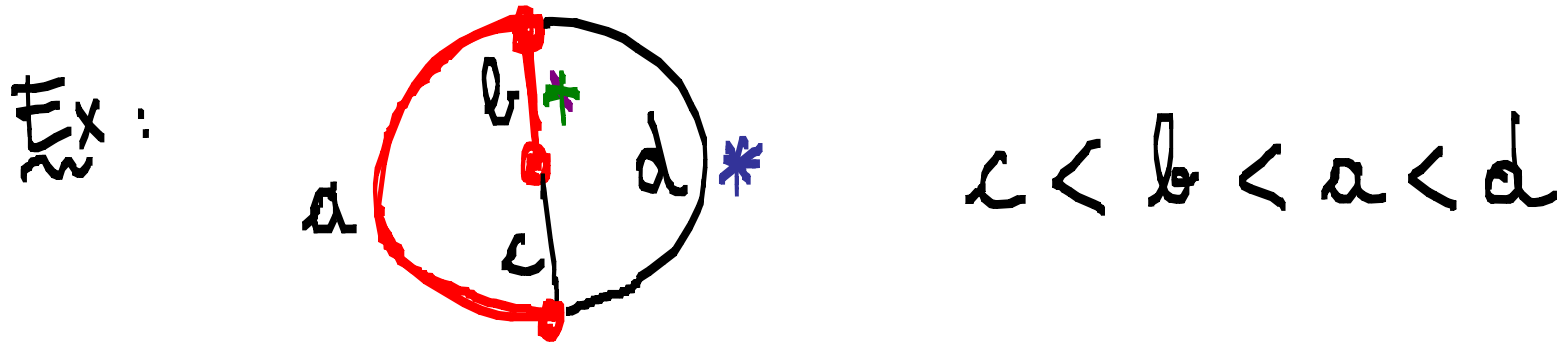
Ordonnons  $E(G)$ :  $e_1 < e_2 < \dots < e_{|E(G)|}$ .



Prop : Une arête est  $\Delta$ -active ssi  
elle est maximale dans son cycle / cocycle fondamental.

# LIEN AVEC CYCLE / COCYCLE FONDAMENTAL

"Corollaire": L'activité selon Tutte et l'activité selon Bernardi sont des cas particuliers de  $\Delta$ -activité.



Prop: Une arête est  $\Delta$ -active ssi elle est maximale dans son cycle/cocycle fondamental.

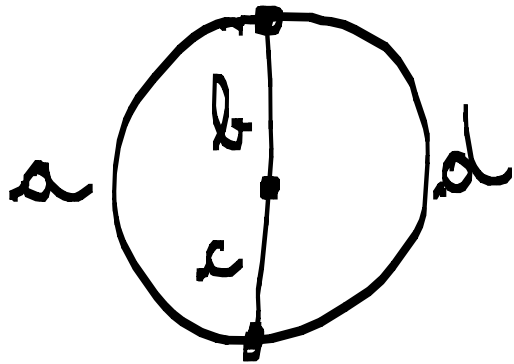


# ACTIVITÉ SELON TUTTE

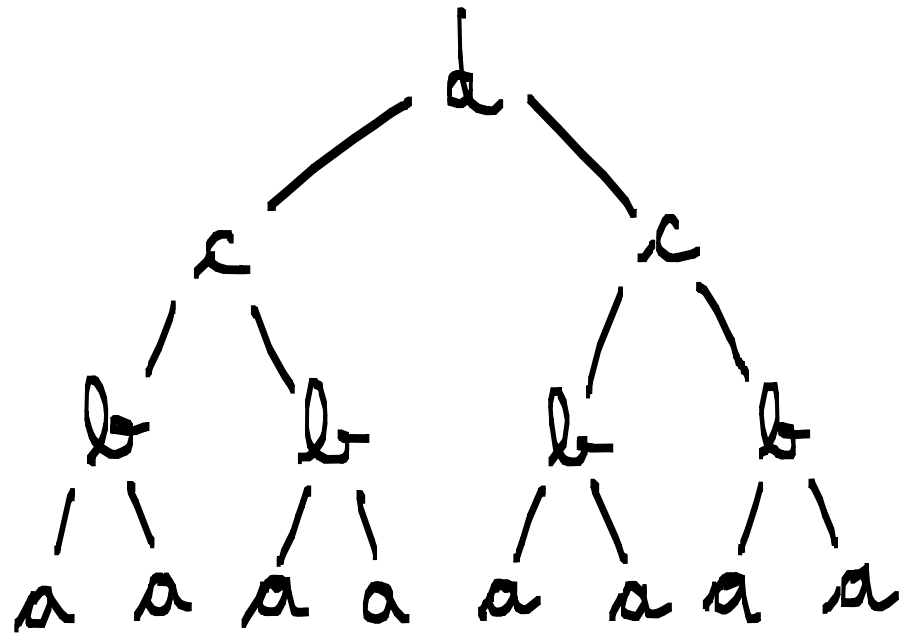
On a fixé un ordre sur  $E(G)$ .

Chaque nœud de profondeur  $k$  est étiqueté par la  $k$ -ième plus grande arête.

Ex :



$a < b < c < d$



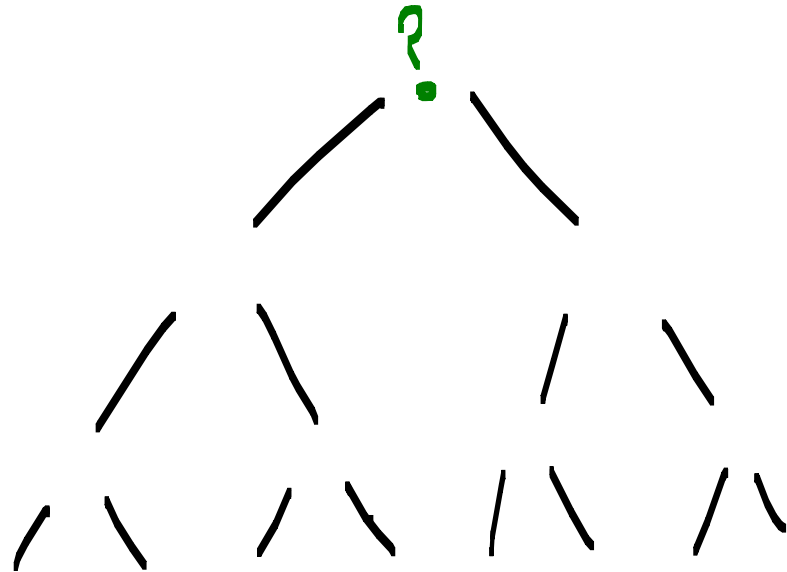
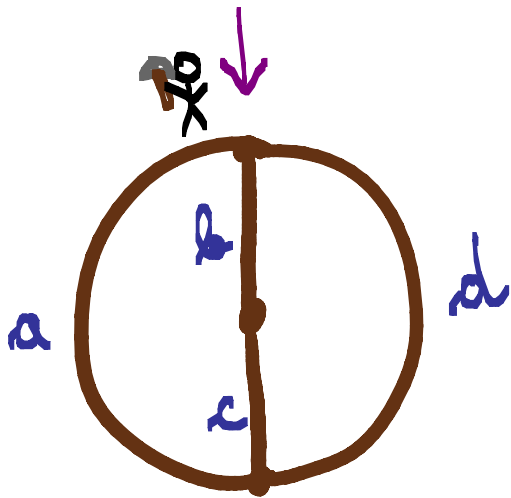
# QUELQUES QUESTIONS SANS RÉPONSES.

1. Calcul des arêtes actives d'un arbre couvrant donné en temps linéaire?
2. Conjecture :  
" Toute activité intéressante est une  $\Delta$ -activité. "



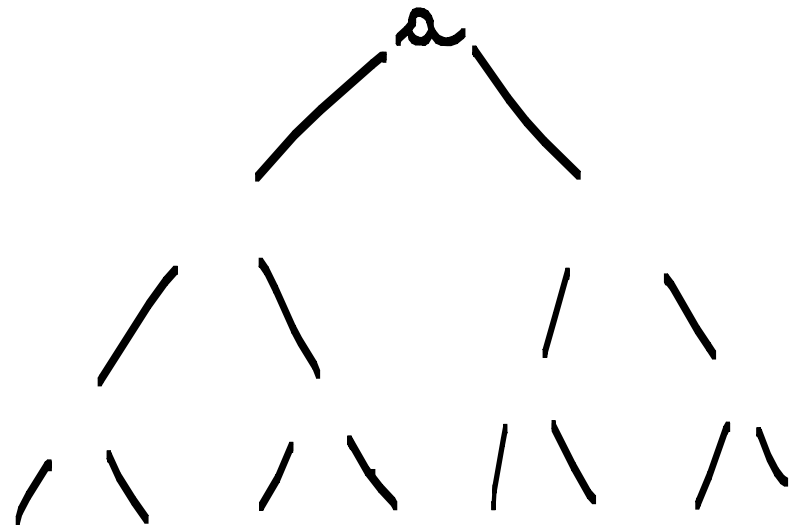
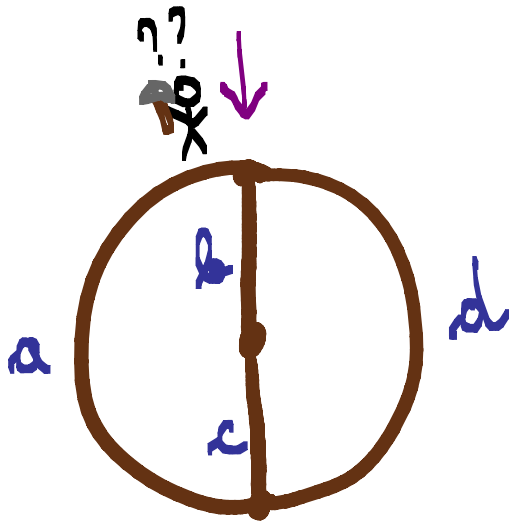
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apportion d'\* coincide avec l'ordre de visite du mineur.



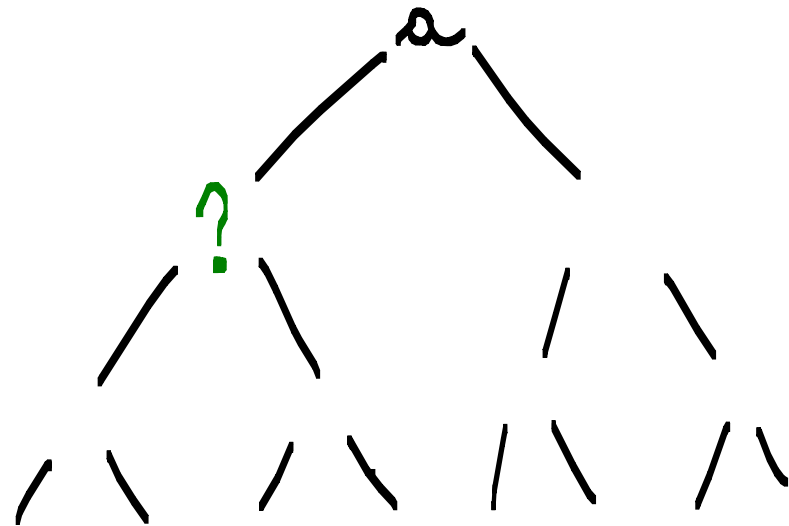
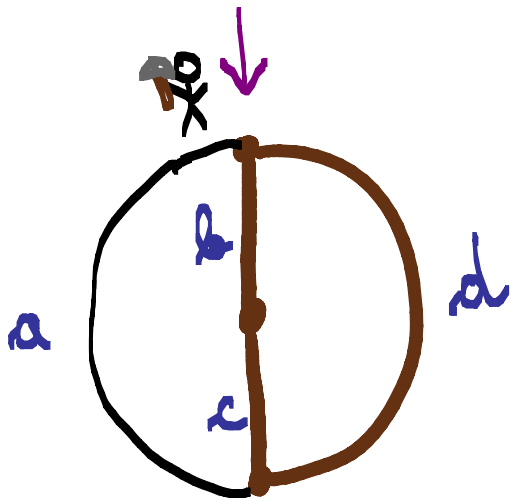
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apposition d'\* coincide avec l'ordre de visite du mineur.



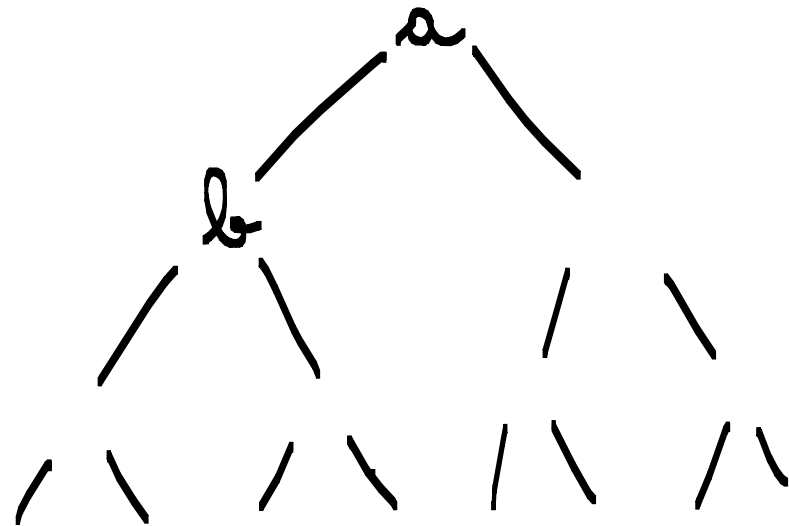
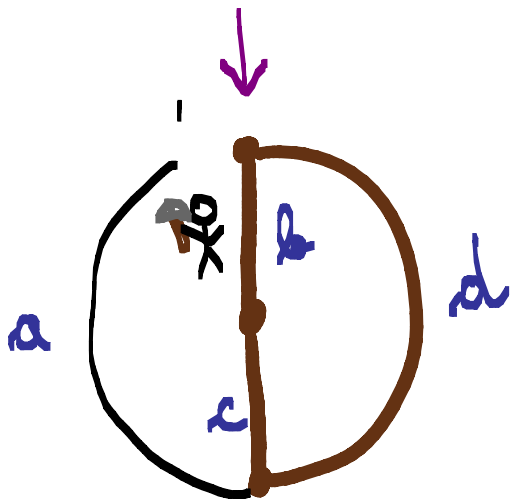
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apportionnement d'\* coincide avec l'ordre de visite du mineur.



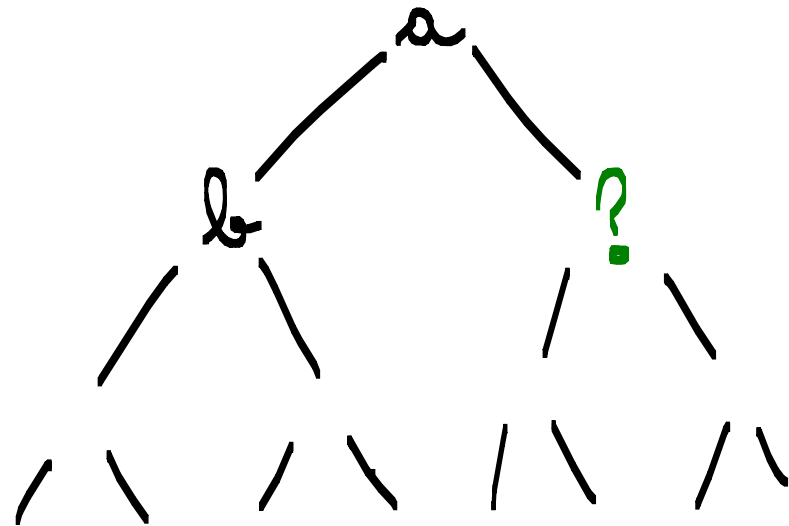
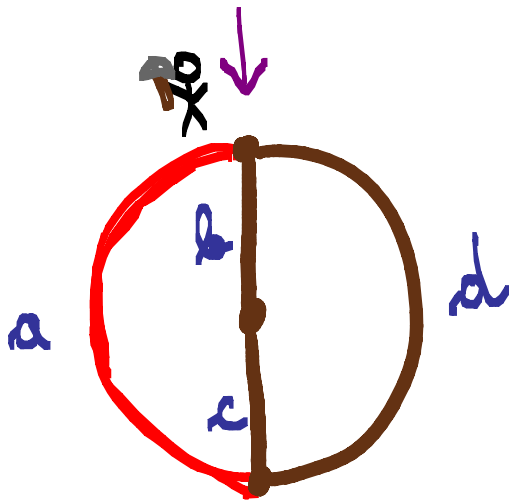
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apposition d'\* coincide avec l'ordre de visite du mineur.



# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

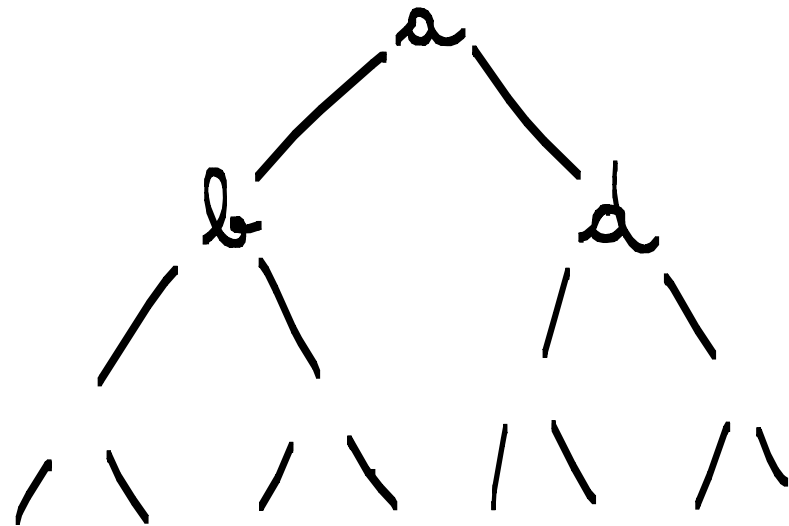
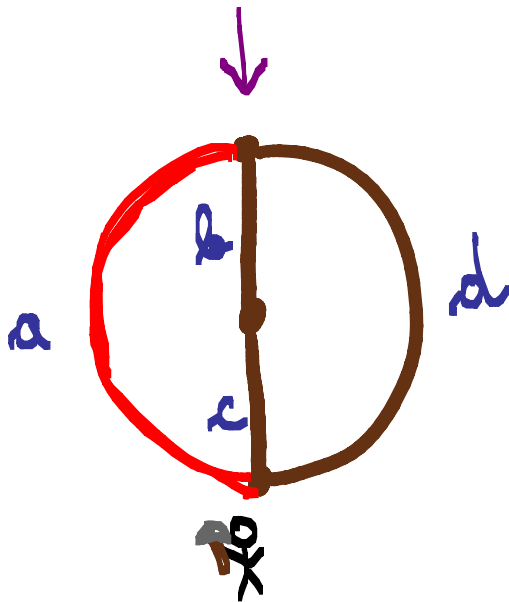
But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apposition d'\* coincide avec l'ordre de visite du mineur.





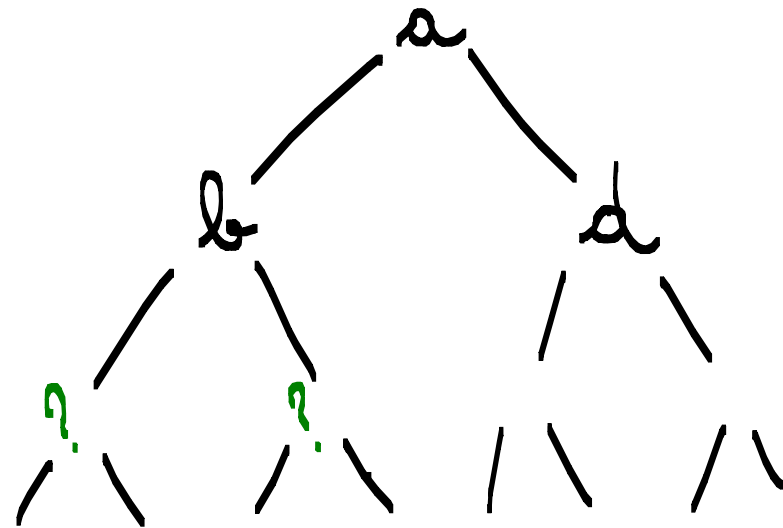
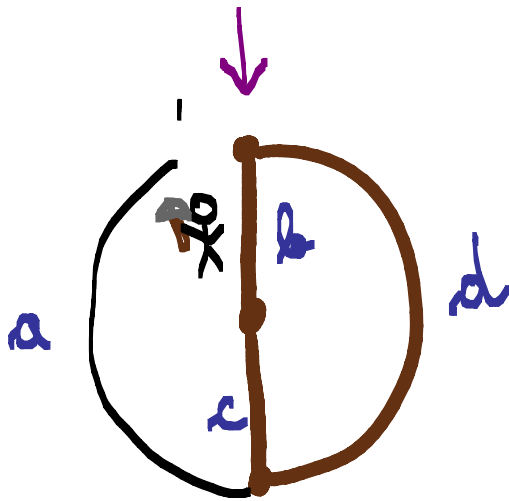
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apposition d'\* coincide avec l'ordre de visite du mineur.



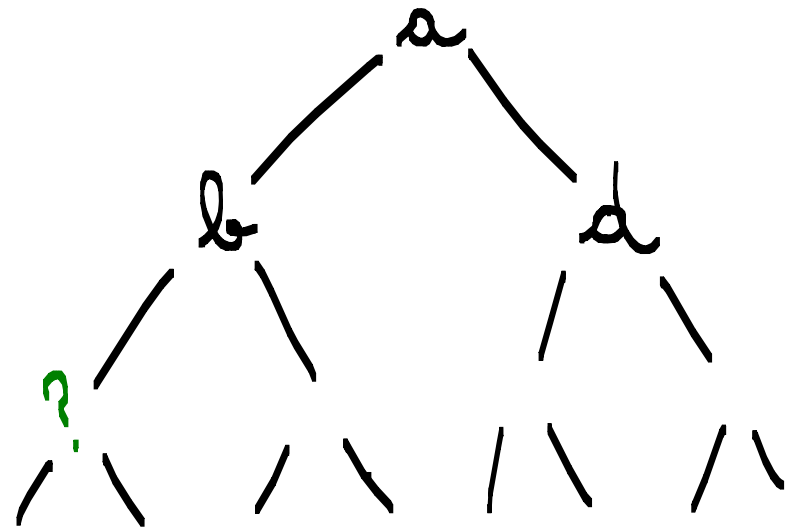
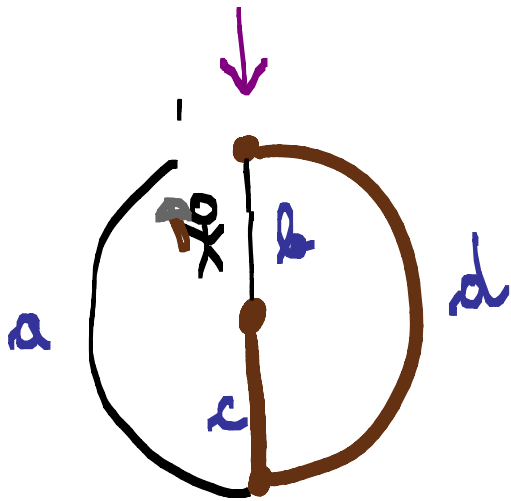
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apportion d'\* coincide avec l'ordre de visite du mineur.



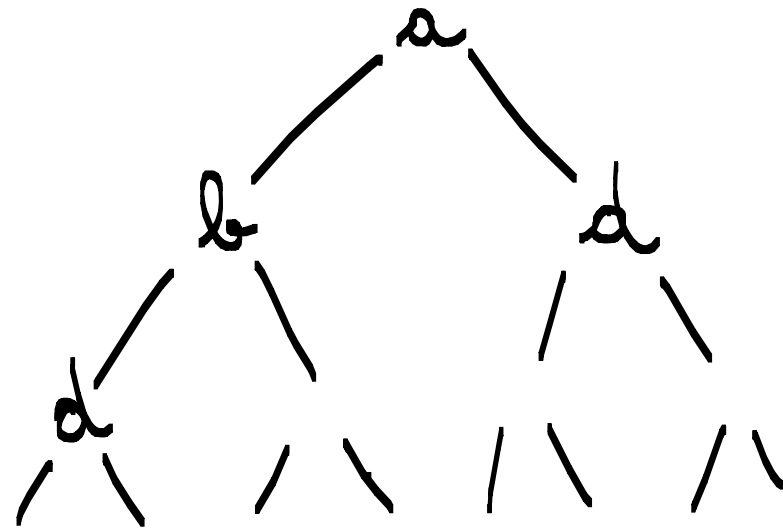
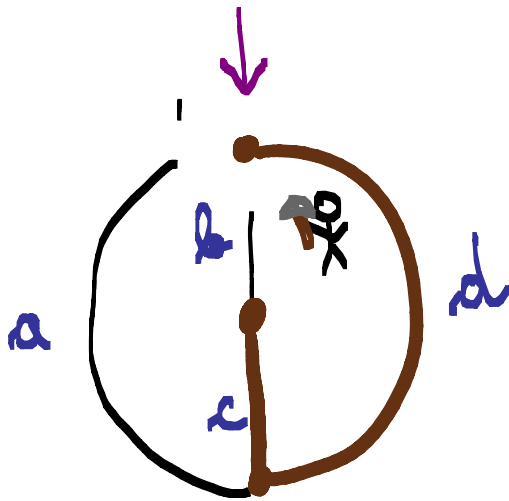
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apposition d'\* coincide avec l'ordre de visite du mineur.



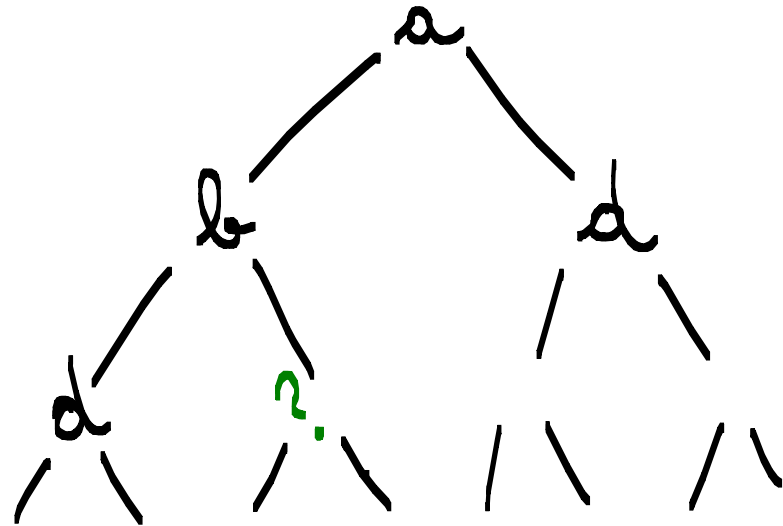
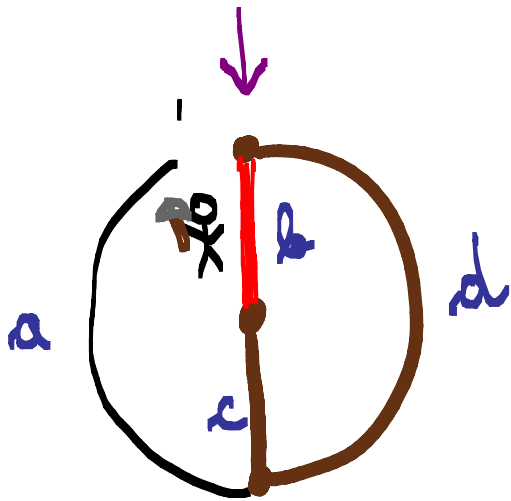
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apposition d'\* coincide avec l'ordre de visite du mineur.



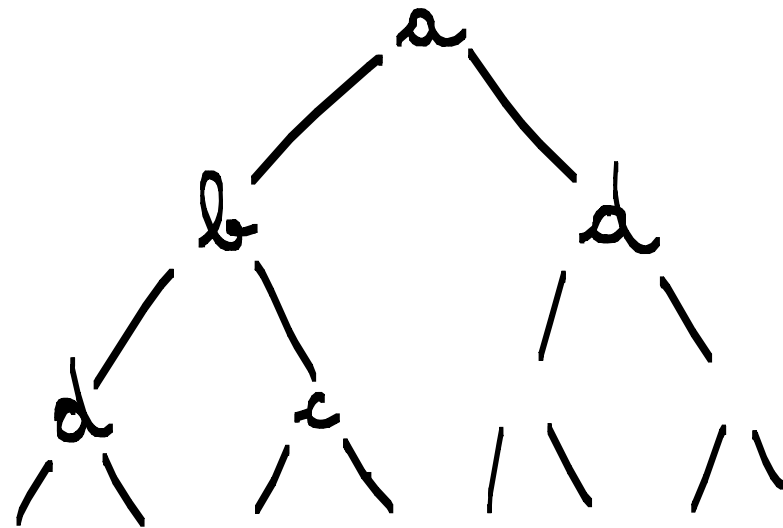
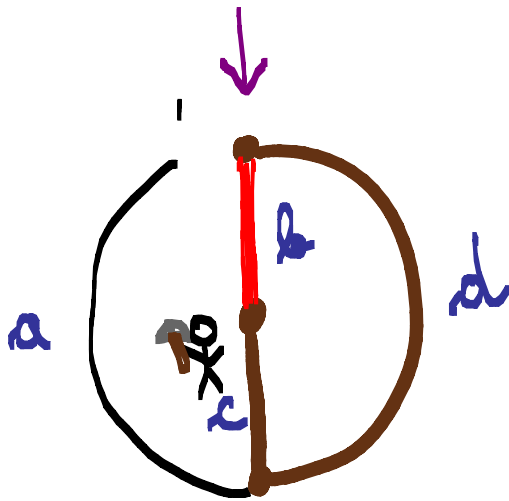
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apportionnement  $d^*$  coincide avec l'ordre de visite du mineur.



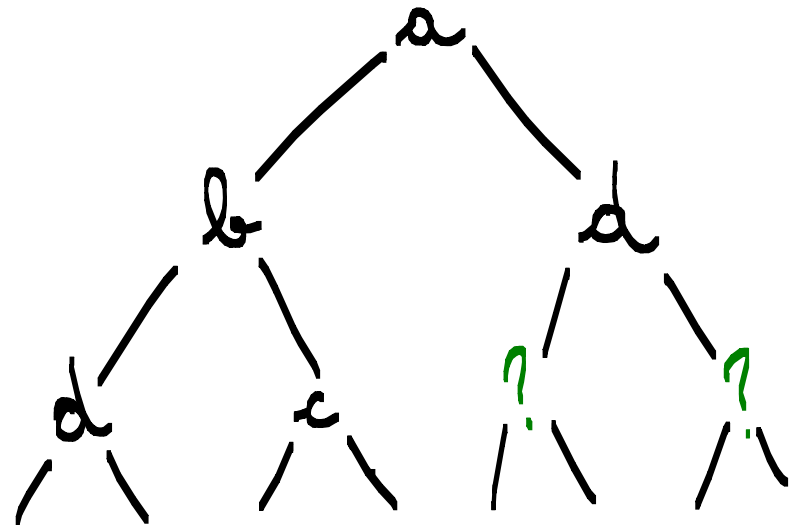
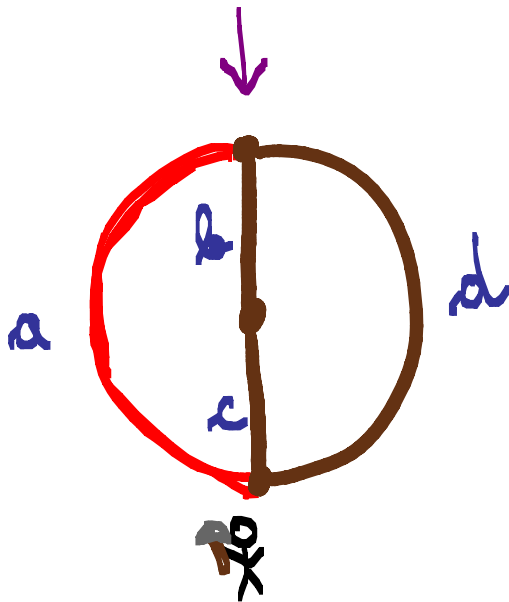
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apposition d'\* coincide avec l'ordre de visite du mineur.



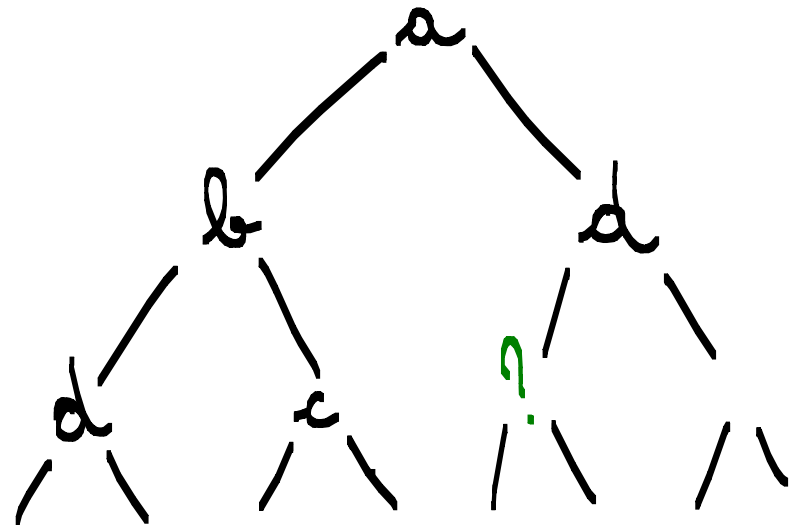
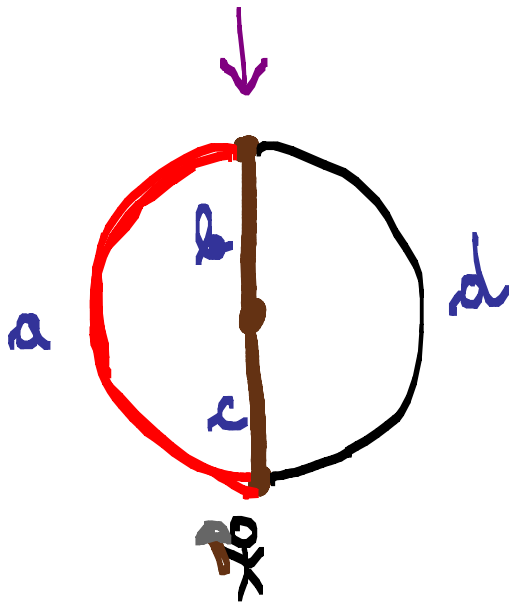
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apportion d'\* coincide avec l'ordre de visite du mineur.



# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

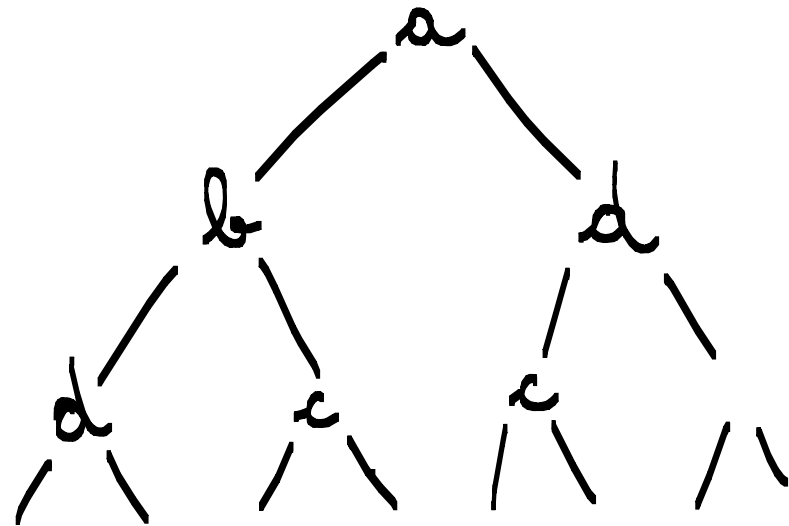
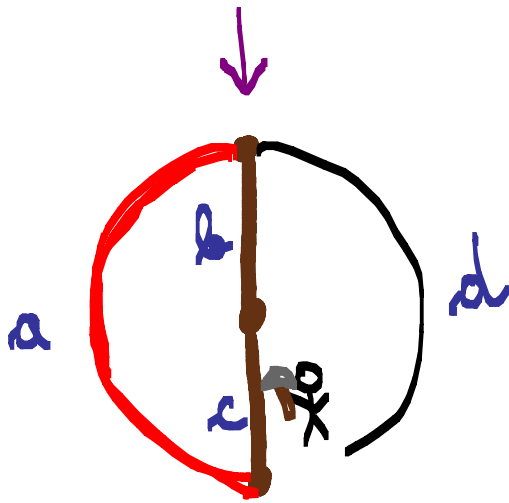
But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apportionnement  $d^*$  coincide avec l'ordre de visite du mineur.





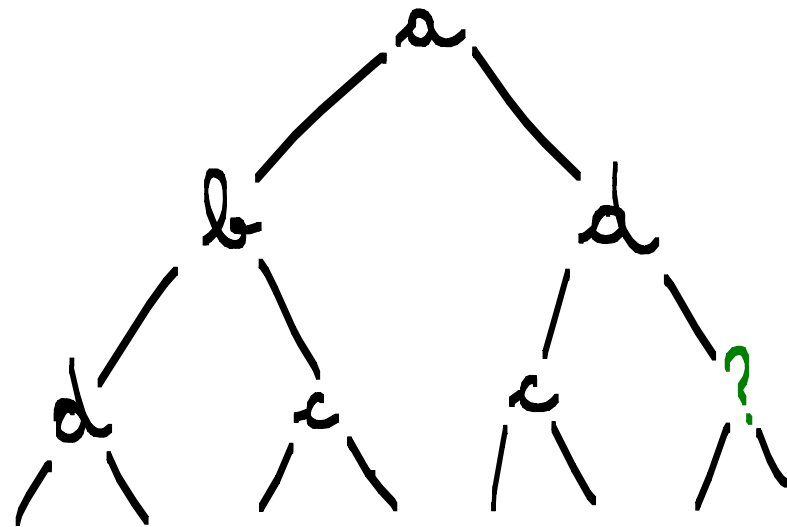
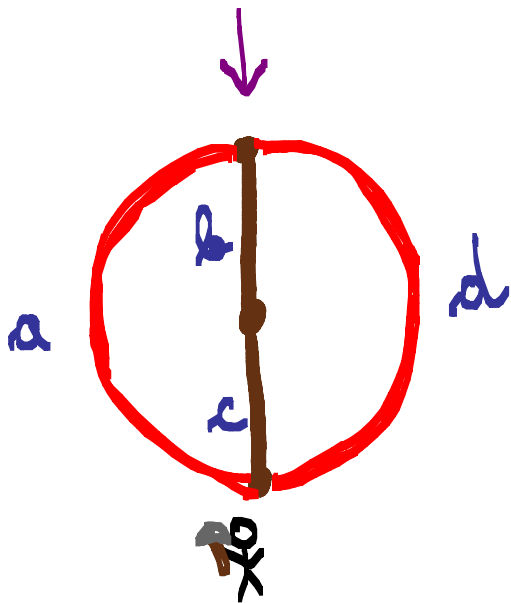
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apportionnement  $d^*$  coincide avec l'ordre de visite du mineur.



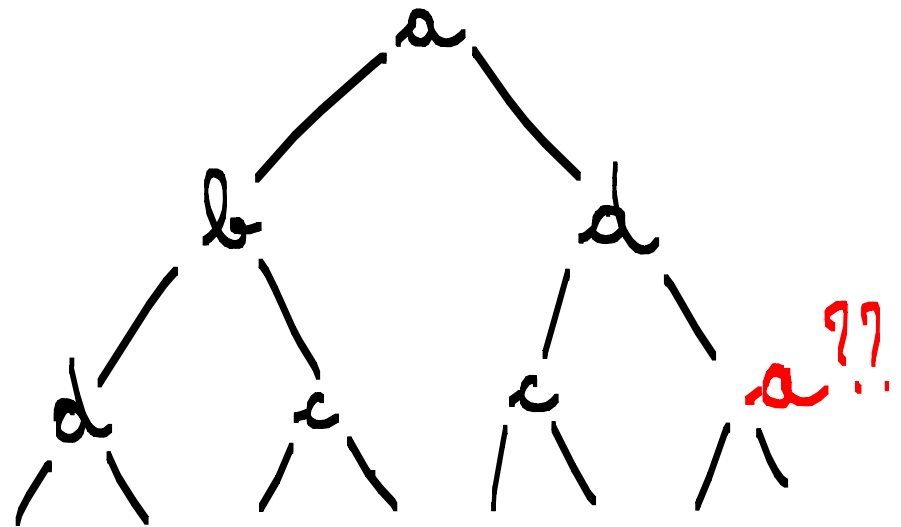
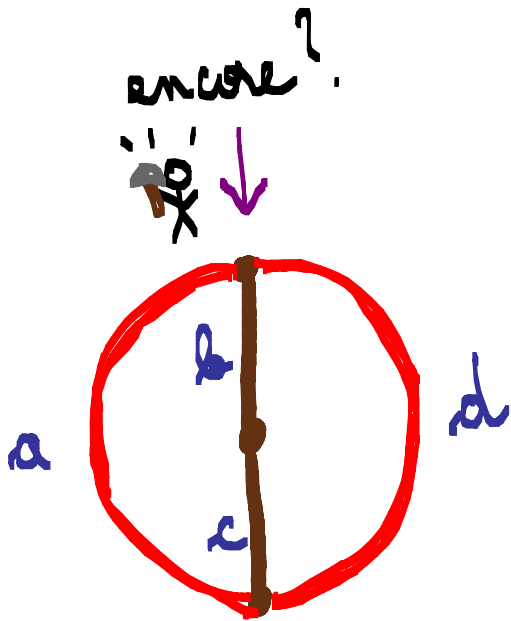
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apportionnement  $d^*$  coincide avec l'ordre de visite du mineur.



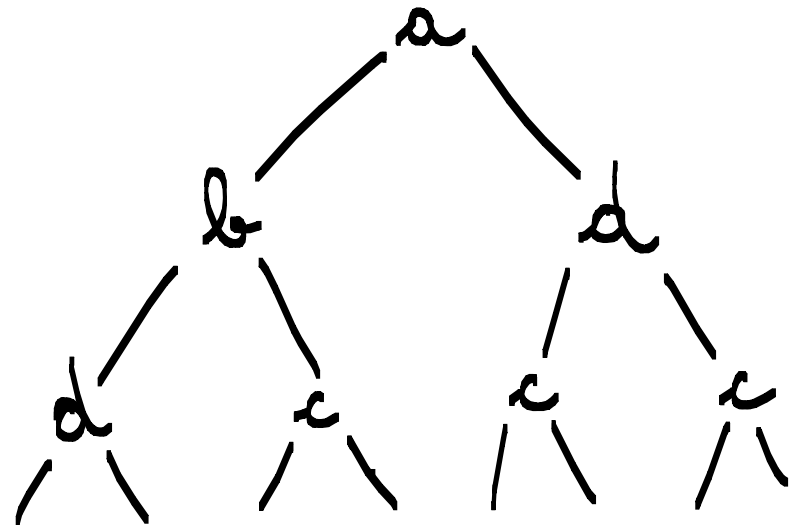
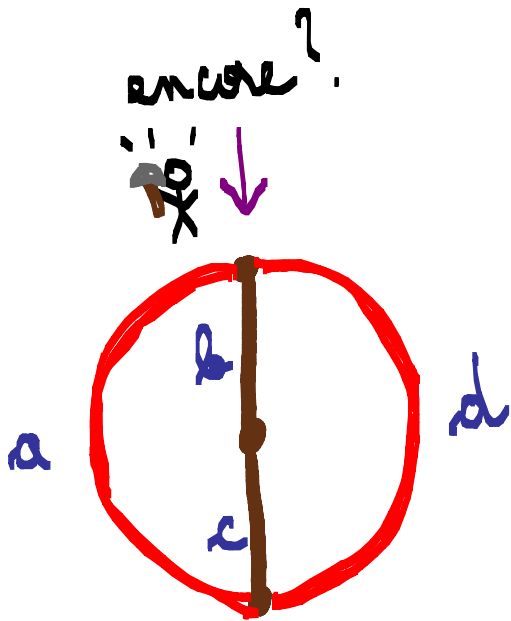
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apportion d'\* coincide avec l'ordre de visite du mineur.



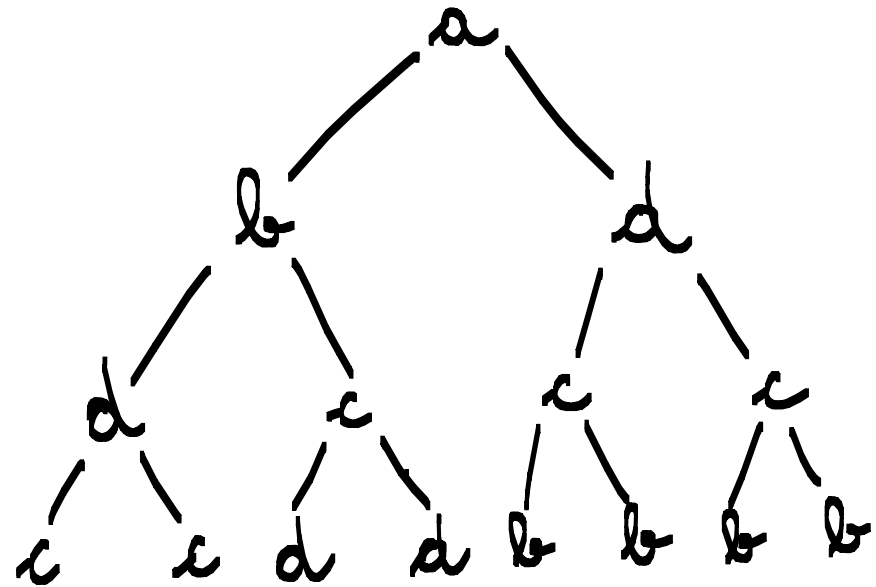
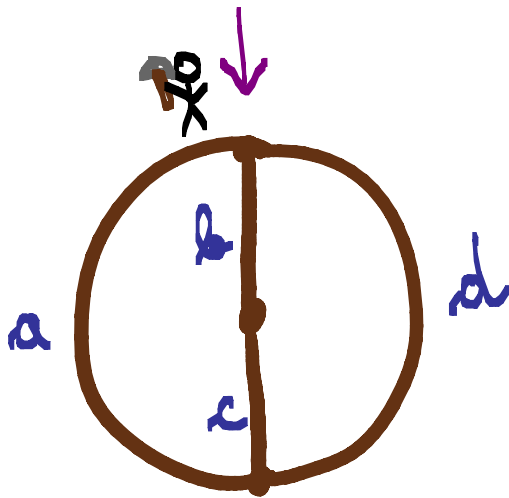
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apportionnement  $d^*$  coincide avec l'ordre de visite du mineur.



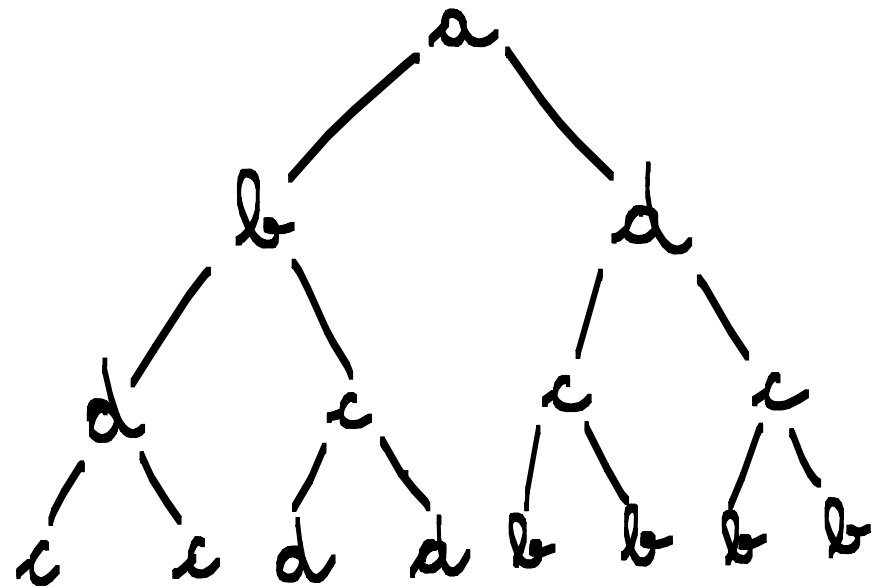
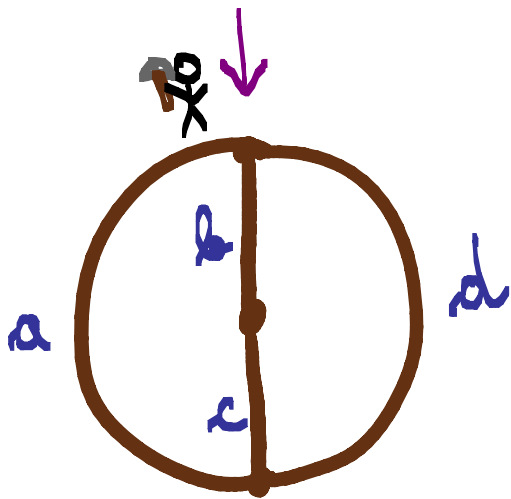
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apposition d'\* coincide avec l'ordre de visite du mineur.



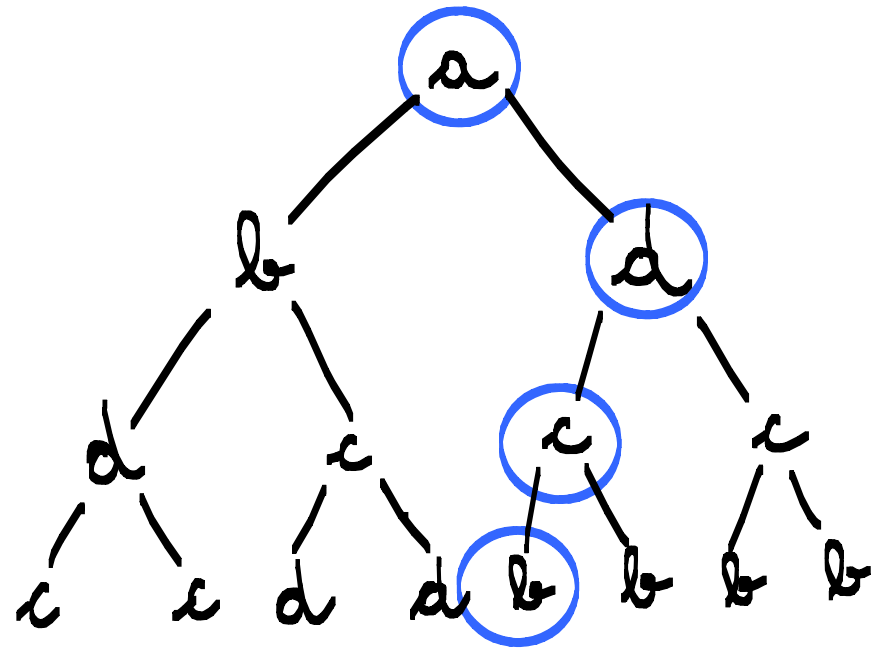
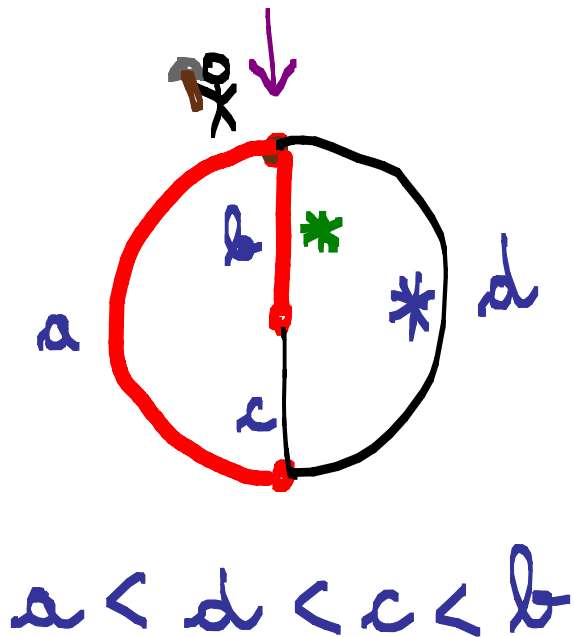
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

les arêtes  $\Delta$ -actives sont les arêtes qui sont **maximales** pour l'ordre de visite du mineur.



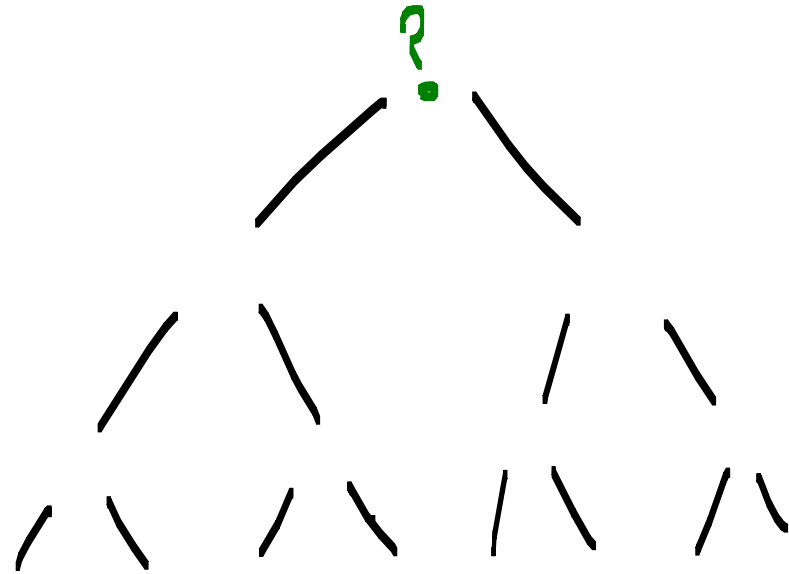
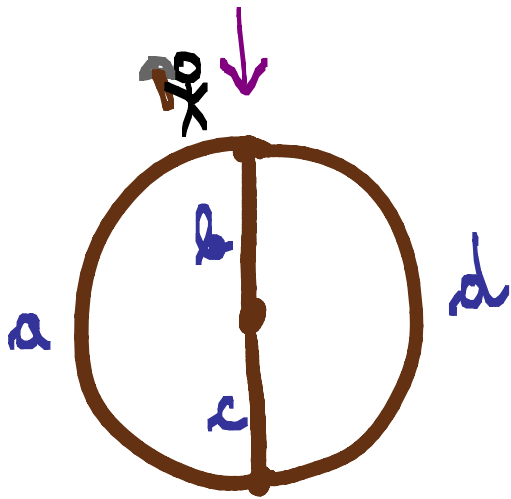
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

les arêtes  $\Delta$ -actives sont les arêtes qui sont **maximales** pour l'ordre de visite du mineur.



# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

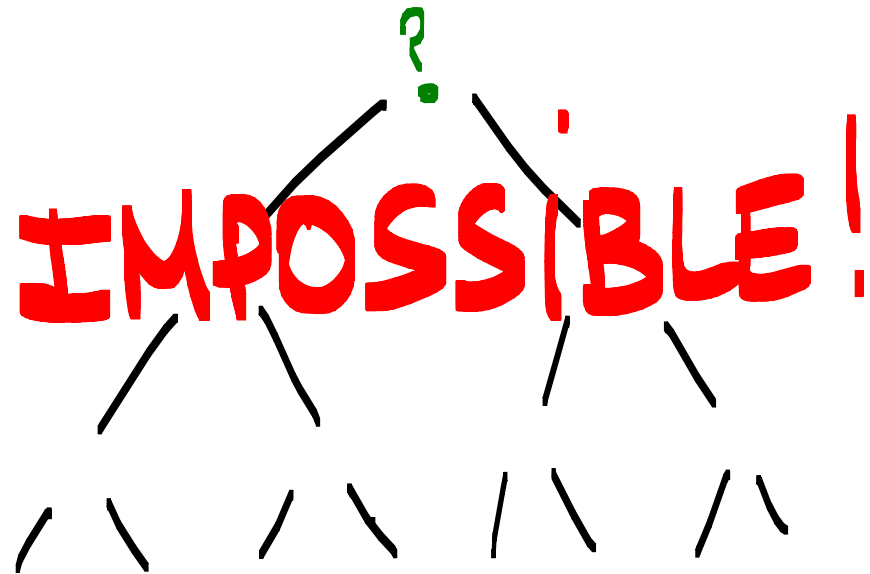
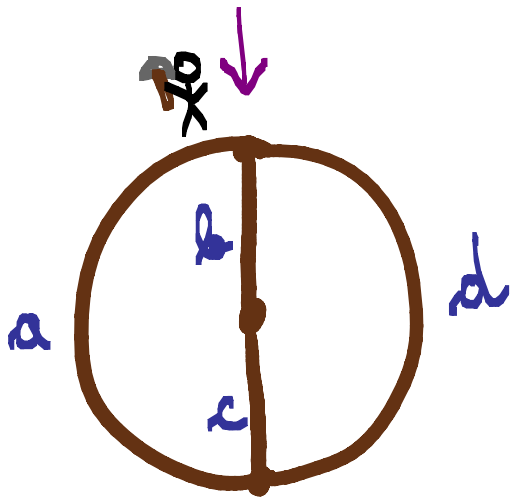
But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apportionnement  $d^*$  coincide avec l'ordre *inverse* de première visite du mineur.





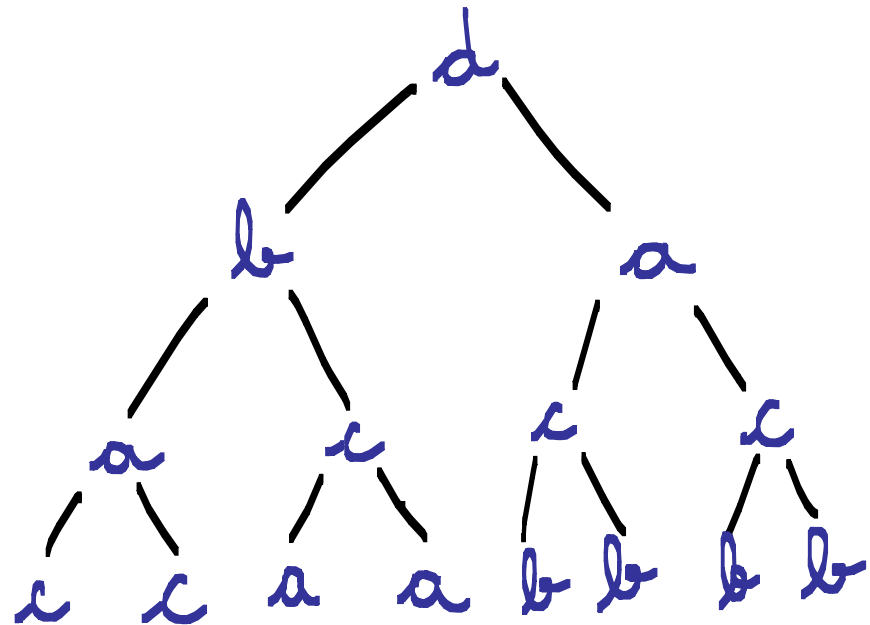
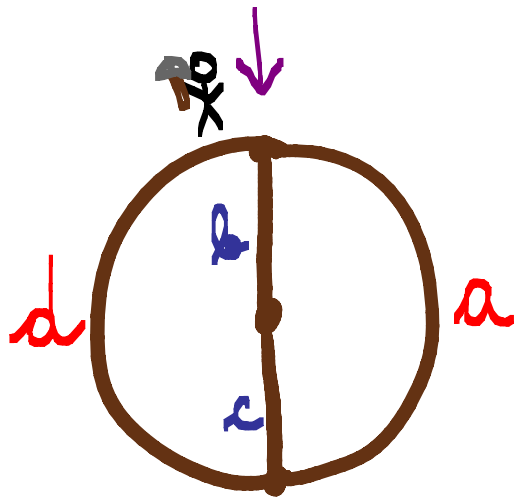
# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'apportion d'\* coincide avec l'ordre *inverse* de première visite du mineur.



# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

But : construire un arbre de décision  $\Delta$  tel que l'ordre de visite lors de l'algo d'aposition d'\* coincide avec l'ordre de visite du mineur pour le **plongement miroir**.

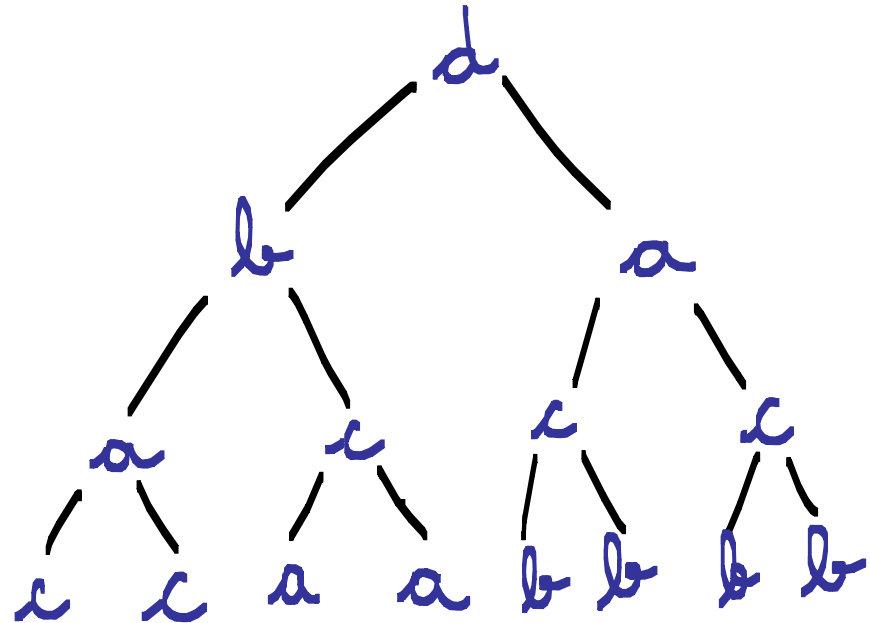
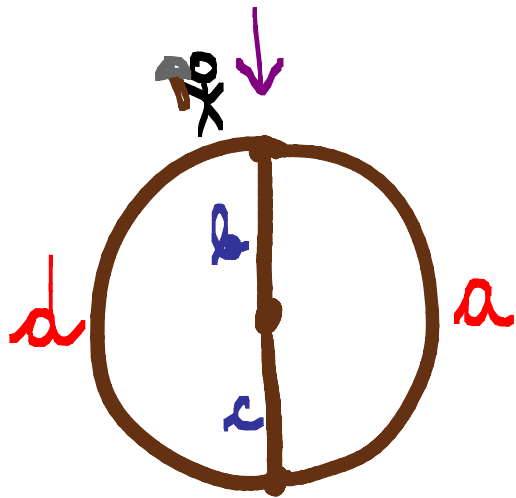


# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

Miracle:

les arêtes  $\Delta$ -actives correspondent aux arêtes actives selon Bernardi -

(i.e. elles sont **minimales** pour l'ordre de visite du mineur dans le plongement non miroir)

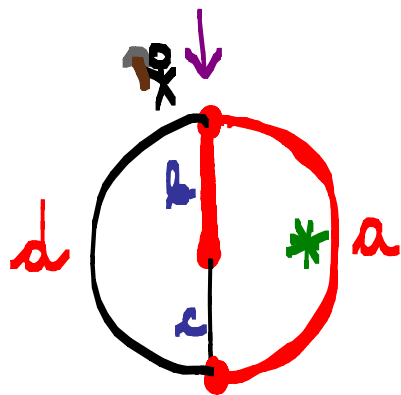


# ACTIVITÉ SELON BERNARDI

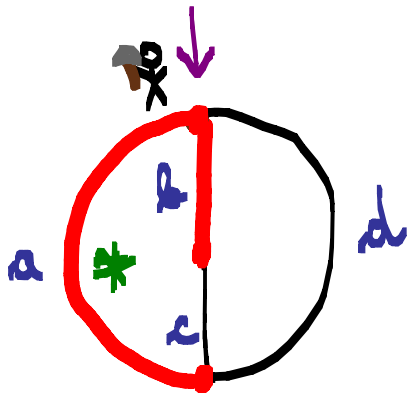
Miracle:

les arêtes  $\Delta$ -actives correspondent aux arêtes actives selon Bernardi -

(i.e. elles sont **minimales** pour l'ordre de visite du mineur dans le plongement non miroir)



$d < b < c < a$   
 $\Delta$ -activité



$a < d < c < b$   
Bernardi

