# CARTES COMBINATOIRES : BIJECTION & ANALYSE DE PARAMÈTRES

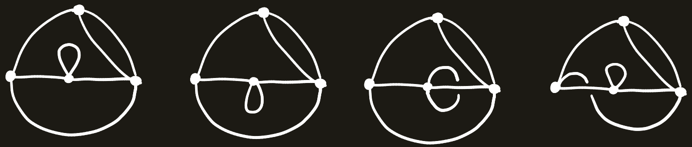
ALEA 2017 Julien COURTIEL (LIPN, Paris 13)


Co-auteurs: Karen YEATS (Waterloo), Noam ZEILBERGER (Birmingham) : côté bijection
Olivier BODINI (Paris 13), Hsien-Kuei HWANG (Taïwan) : côté analyse de paramètres

# DÉFINITION

**carte combinatoire** = graphe connexe où on a ordonné cycliquement les ½-arêtes autour de chaque sommet.

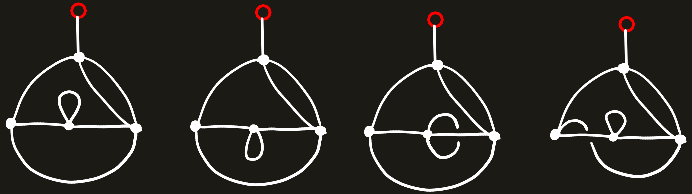
<u>Exemple</u>. Quatre cartes différentes :



# DÉFINITION

carte combinatoire = graphe connexe où on a ordonné cycliquement les 1/2-arêtes autour de chaque sommet.

<u>Exemple</u>. Quatre cartes différentes :



On enracine la carte en marquant une feuille.

# DÉFINITION

carte combinatoire = graphe connexe où on a ordonné cycliquement les ½-arêtes autour de chaque sommet.

1 arête

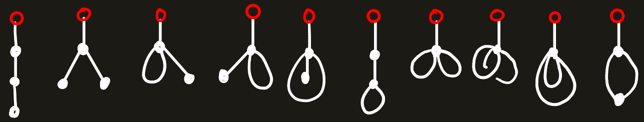
1

2 arêtes

2

3 arêtes

10



# RELATION DE RÉCURRENCE

$c_n$ = nombre de cartes combinatoires à $n$ arêtes

<u>Relation de récurrence</u> : [Arquès Béraud]

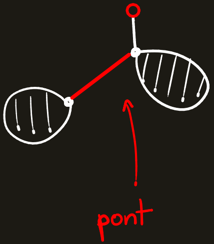
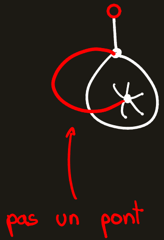
$$c_1 = 1 \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + (2n-3)\, c_{n-1}$$

# RELATION DE RÉCURRENCE

$c_n$ = nombre de cartes combinatoires à $n$ arêtes

<u>Relation de récurrence</u> : [Arquès Béraud]

$$c_1 = 1 \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + (2n-3)\, c_{n-1}$$

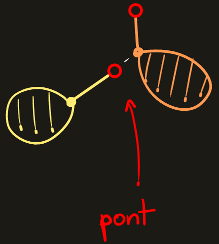
carte =  ou  ou 

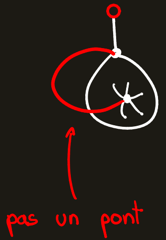
# RELATION DE RÉCURRENCE

$c_n$ = nombre de cartes combinatoires à $n$ arêtes

Relation de récurrence : [Arquès Béraud]

$$c_1 = 1 \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + (2n-3)\, c_{n-1}$$

carte =  ou 

ou 

# RELATION DE RÉCURRENCE

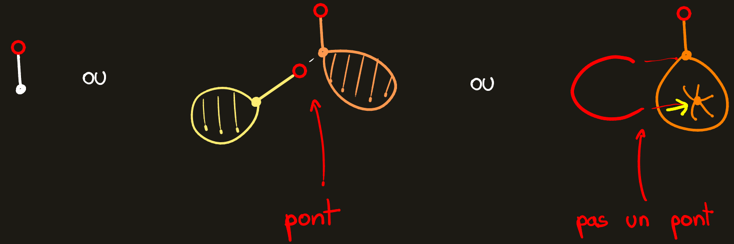
$c_n$ = nombre de cartes combinatoires à $n$ arêtes

<u>Relation de récurrence</u> : [Arquès Béraud]

nombre de coins

$$c_1 = 1 \qquad\qquad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + (2n-3)\, c_{n-1}$$

carte =



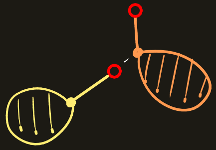
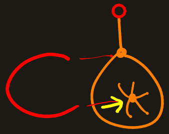
# RELATION DE RÉCURRENCE

$c_n$ = nombre de cartes combinatoires à $n$ arêtes

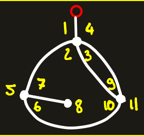
**Relation de récurrence :** [Arquès Béraud]

nombre de coins

$$c_1 = 1 \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + (2n-3)\, c_{n-1}$$

carte =  ou  ou 

coin = secteur angulaire entre
2 demi-arêtes consécutives



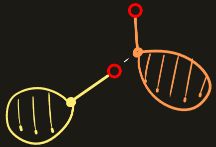
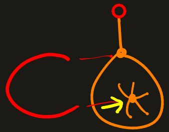
# RELATION DE RÉCURRENCE

$c_n$ = nombre de cartes combinatoires à $n$ arêtes

Relation de récurrence : [Arquès Béraud]

nombre de coins

$$c_1 = 1 \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + (2n-3)\, c_{n-1}$$

carte =  ou  ou 

Série génératrice : $C(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$

$$C(z) = z + C(z)^2 + z\left(2z\frac{\partial C(z)}{\partial z} - C(z)\right)$$

# POURQUOI COMPTER DES CARTES SANS GENRE ?

→ Bon cadre d'étude pour les équations différentielles non linéaires (équations de Ricatti)

→ Lien avec d'autres familles d'objets combinatoires

- diagrammes de cordes irréductibles (lien avec la théorie des champs quantiques)
- lambda-termes

# POURQUOI COMPTER DES CARTES SANS GENRE ?

→ Bon cadre d'étude pour les équations différentielles non linéaires (équations de Ricatti)

Partie II

→ Lien avec d'autres familles d'objets combinatoires

- diagrammes de cordes irréductibles

  Partie I

  (lien avec la théorie des champs quantiques)
- lambda-termes

# PARTIE I

## Comprendre le lien avec les diagrammes de cordes

Collaborateurs : Karen YEATS, Noam ZEILBERGER

# DIAGRAMMES DE CORDES

**diagramme de $n$ cordes**
= appariement de l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$

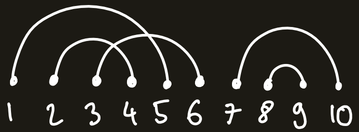
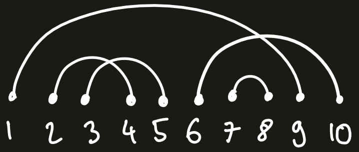



**diagramme irréductible**
= diagramme qui n'est pas la concaténation de deux diagrammes.



# DIAGRAMMES DE CORDES

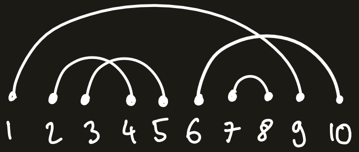
**diagramme de $n$ cordes**

= appariement de l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$


réductible

**diagramme irréductible**

= diagramme qui n'est pas la concaténation de deux diagrammes.



# DIAGRAMMES DE CORDES

1 corde  1

2 cordes 2

3 cordes 10

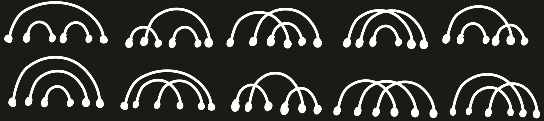
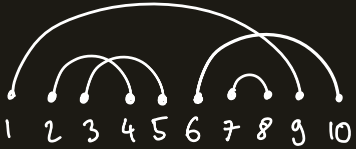


**diagramme irréductible**

= diagramme qui n'est pas la concaténation de deux diagrammes.

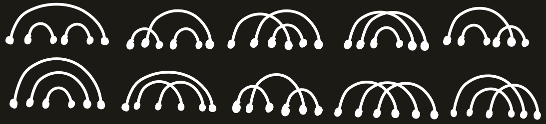


# DIAGRAMMES DE CORDES

1 corde  1

2 cordes 2

3 cordes 10



**Proposition** [Cvitanović Lautrup Pearson, Ossana de Mendez Rosenstiehl, Cori]

nombre de cartes enracinées à $n$ arêtes

$=$

nombre de diagrammes irréductibles à $n$ cordes

# RELATION DE RÉCURRENCE BIS REPETITA

$c_n$ = nombre de diagrammes irréductibles à $n$ cordes

<u>Relation de récurrence</u> :

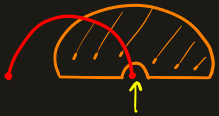
$$c_1 = 1 \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + (2n-3)\, c_{n-1}$$

# RELATION DE RÉCURRENCE BIS REPETITA

$c_n$ = nombre de diagrammes irréductibles à $n$ cordes

**Relation de récurrence :**

$$c_1 = 1 \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + (2n-3)\, c_{n-1}$$

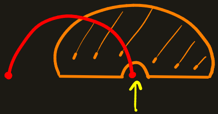
diagramme irréductible =  ou  ou 

# RELATION DE RÉCURRENCE BIS REPETITA

$c_n$ = nombre de diagrammes irréductibles à $n$ cordes

Relation de récurrence :

$$c_1 = 1 \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + (2n-3)\, c_{n-1}$$

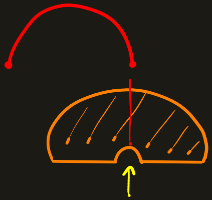
diagramme irréductible =  ou  ou 

# RELATION DE RÉCURRENCE BIS REPETITA

$c_n$ = nombre de diagrammes irréductibles à $n$ cordes

Relation de récurrence :

$$c_1 = 1 \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + (2n-3)\, c_{n-1}$$

diagramme irréductible =  ou  ou 

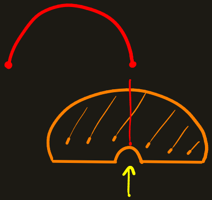
# RELATION DE RÉCURRENCE BIS REPETITA

$c_n$ = nombre de diagrammes irréductibles à $n$ cordes

nombre d'intervalles


Relation de récurrence :

$$c_1 = 1 \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + (2n-3)\, c_{n-1}$$

diagramme irréductible =  ou  ou 

# BIJECTION

$$\text{cartes} \xmapsto[\phi]{\qquad\qquad} \text{diagrammes}$$

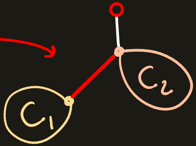
# BIJECTION

3 possibilités

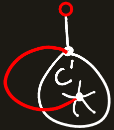
cartes $\underset{\phi}{\longmapsto}$ diagrammes

1 arête

pont




pas 1 pont



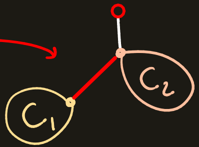
# BIJECTION

3 possibilités

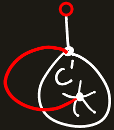
$$\text{cartes} \xmapsto{\ \phi\ } \text{diagrammes}$$

1 arête

pont




pas 1 pont



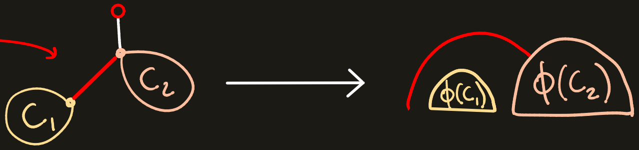
# BIJECTION

3 possibilités

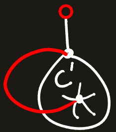
$$\text{cartes} \xmapsto[\phi]{\hspace{3em}} \text{diagrammes}$$

1 arête

pont



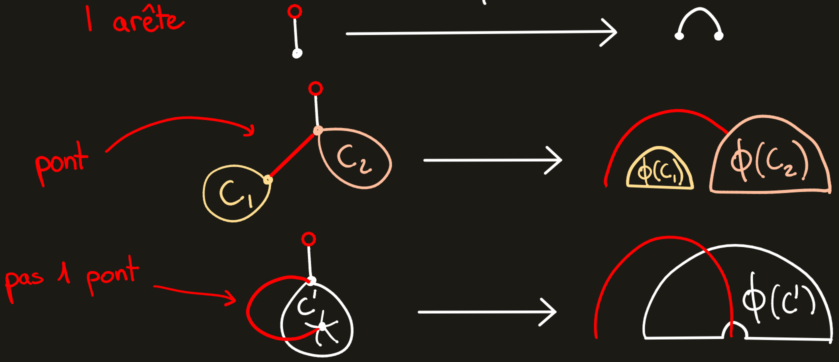

pas 1 pont



# BIJECTION

3 possibilités

cartes $\xmapsto{\quad \phi \quad}$ diagrammes



# BIJECTION

$$\text{cartes} \overset{\phi}{\longmapsto} \text{diagrammes}$$

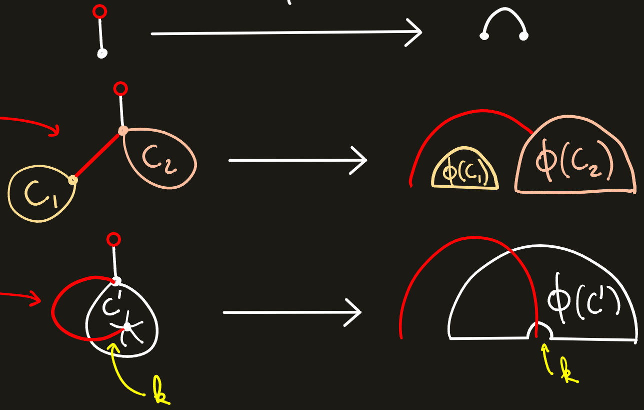
3 possibilités

1 arête

pont

pas 1 pont

on numérote les coins canoniquement



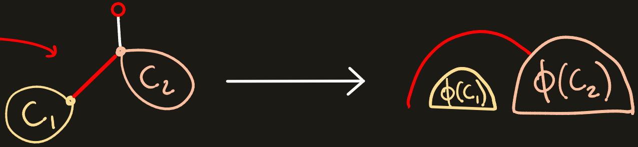
# BIJECTION

3 possibilités

cartes $\overset{\phi}{\longmapsto}$ diagrammes

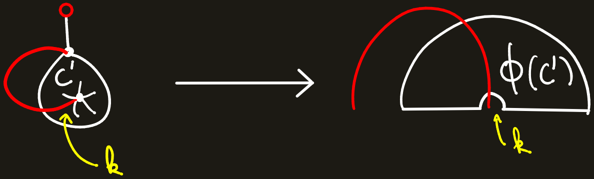
1 arête

pont




pas 1 pont

on numérote les coins canoniquement ©



# PROPRIÉTÉS DE LA BIJECTION

[C. Yeats Zeilberger]

<u>cartes</u> $\longleftrightarrow$ <u>diagrammes irréductibles</u>

arêtes $\longleftrightarrow$ cordes

# PROPRIÉTÉS DE LA BIJECTION

[C. Yeats Zeilberger]

<u>cartes</u> $\longleftrightarrow$ <u>diagrammes irréductibles</u>

arêtes $\longleftrightarrow$ cordes

cartes sans pont $\longleftrightarrow$ diagrammes connexes

i.e le graphe d'intersection est connexe

# PROPRIÉTÉS DE LA BIJECTION

[C. Yeats Zeilberger]

<u>cartes</u> $\longleftrightarrow$ <u>diagrammes irréductibles</u>

arêtes $\longleftrightarrow$ cordes

cartes sans pont $\longleftrightarrow$ diagrammes connexes

i.e le graphe d'intersection est connexe

sommets $\longleftrightarrow$ cordes terminales

# PROPRIÉTÉS DE LA BIJECTION

[C. Yeats Zeilberger]

<u>cartes</u> ⟷ <u>diagrammes irréductibles</u>

arêtes ⟷ cordes

cartes sans pont ⟷ diagrammes connexes

i.e le graphe d'intersection est connexe

sommets ⟷ cordes terminales

---

sommets ⟷ cordes supérieures

[Cori]

# PROPRIÉTÉS DE LA BIJECTION

[C. Yeats Zeilberger]

<u>cartes</u> ⟷ <u>diagrammes irréductibles</u>

arêtes ⟷ cordes

cartes sans pont ⟷ diagrammes connexes 

i.e le graphe d'intersection est connexe

sommets ⟷ cordes terminales 

en fait symétrique ↕ [Lepoutre]

sommets ⟷ cordes supérieures 

[Cori]

# PROPRIÉTÉS DE LA BIJECTION

[C. Yeats Zeilberger]

<u>cartes</u> ⟷ <u>diagrammes irréductibles</u>

arêtes ⟷ cordes

cartes sans pont ⟷ diagrammes connexes

cartes planaires ⟷ diagrammes évitant 

sommets ⟷ cordes terminales 

en fait symétrique

[Lepoutre]

sommets ⟷ cordes supérieures 

[Cori]

PARTIE II

# Analyse asymptotique de statistiques sur les cartes

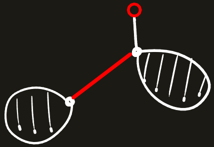
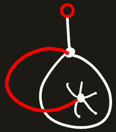
Collaborateurs : Olivier BODINI, Hsien-Kuei HWANG

# NOMBRE DE SOMMETS

$c_n$ = nombre de cartes combinatoires à $n$ arêtes

**Relation de récurrence :**

$$c_1 = 1 \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k\, c_{n-k} + (2n-3)\, c_{n-1}$$

carte =  ou  ou 

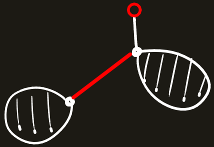
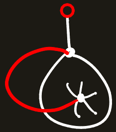
**Question :** Nombre moyen de sommets ?

# NOMBRE DE SOMMETS

$c_n(u)$ = nombre de cartes combinatoires à $n$ arêtes où chaque sommet est pondéré par $u$.

Relation de récurrence :

$c_1(u) = u$ $\qquad$ $c_n(u) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(u)\, c_{n-k}(u) + (2n-3)\, c_{n-1}(u)$

carte =  ou  ou 

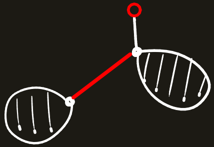
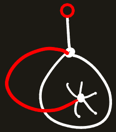
Question : Nombre moyen de sommets ?

# NOMBRE DE SOMMETS

$c_n(u)$ = nombre de cartes combinatoires à $n$ arêtes où chaque sommet est pondéré par $u$.

Relation de récurrence :

$$c_1(u) = u \qquad c_n(u) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(u)\,c_{n-k}(u) + (2n-3)\,c_{n-1}(u)$$

carte =  ou  ou 

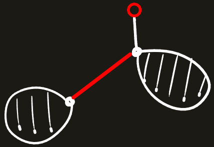
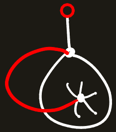
Question : Nombre moyen de sommets ? $\dfrac{c_n'(1)}{c_n(1)}$ ?

# NOMBRE DE SOMMETS

$c_n(u)$ = nombre de cartes combinatoires à $n$ arêtes où chaque sommet est pondéré par $u$.

Relation de récurrence :

$c_1(u) = u \qquad c_n(u) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(u)\, c_{n-k}(u) + (2n-3)\, c_{n-1}(u)$

carte =  ou  ou 

Série génératrice : $C(z,u) = \sum_{n>0} c_n(u) z^n$

$$C = zu + C^2 + 2z^2 \frac{\partial C}{\partial z} - zC$$

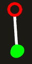
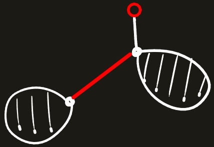
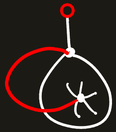
# NOMBRE DE SOMMETS

$c_n(u)$ = nombre de cartes combinatoires à $n$ arêtes où chaque sommet est pondéré par $u$.

Relation de récurrence :

$c_1(u) = u$

$$c_n(u) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(u)\,c_{n-k}(u) + (2n-3)\,c_{n-1}(u)$$

carte =  ou  ou 

Question : Nombre moyen de sommets ? $\dfrac{c_n'(1)}{c_n(1)}$ ?

Démonstration au tableau

# NOMBRE DE SOMMETS

**Théorème :**

Pour la distribution uniforme des cartes combinatoires,

$$\text{Nombre de sommets} \xrightarrow[\text{loi}]{} \begin{array}{l}\text{Loi gaussienne} \\ \text{moyenne} \sim \ln(n) \\ \text{variance} \sim \ln(n)\end{array}$$

**Vraie preuve** : Théorème de Lévy

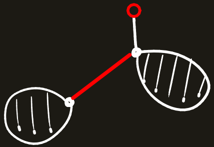
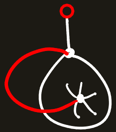
Fonction caractéristique $= c_n(e^{it}) / c_n(1)$

# NOMBRE D'ARÊTES INCIDENTES À LA RACINE

$C(z,u)$ = série génératrice des cartes combinatoires comptées selon les arêtes ($z$) et les arêtes incidentes au sommet racine ($u$).

Équation :

$$C(z,u) = zu + u\,C(z,u)\,C(z,1) + u\left(2z^2\frac{\partial C}{\partial z} - zC\right)$$

carte =  ou  ou 

# NOMBRE D'ARÊTES INCIDENTES À LA RACINE

$C(z,u)$ = série génératrice des cartes combinatoires comptées selon les arêtes ($z$) et les arêtes incidentes au sommet racine ($u$).

Équation :

$$C(z,u) = zu + u\,C(z,u)\,C(z,1) + u\left(2z^2\frac{\partial C}{\partial z} - zC\right)$$

Théorème :

Nombre d'arêtes incidentes à la racine $\xrightarrow[\text{loi}]{}$

# NOMBRE D'ARÊTES INCIDENTES À LA RACINE

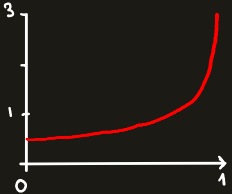
$C(z,u)$ = série génératrice des cartes combinatoires comptées selon les arêtes ($z$) et les arêtes incidentes au sommet racine ($u$).

Équation :

$$C(z,u) = zu + u\,C(z,u)\,C(z,1) + u\left(2z^2\frac{\partial C}{\partial z} - zC\right)$$

Théorème :

Nombre d'arêtes incidentes à la racine divisé par $n$ $\xrightarrow[\text{loi}]{}$ Loi bêta densité $\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}$ sur $[0,1[$

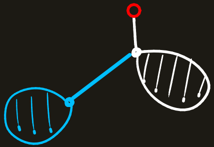
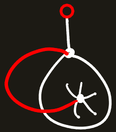


# NOMBRE DE COMPOSANTES CONNEXES ATTACHÉES À LA RACINE

$C(z,u)$ = série génératrice des cartes combinatoires comptées selon les arêtes ($z$) et les composantes connexes attachées au sommet racine ($u$).

<u>Équation</u> :

$$C(z,u) = z + u\,C(z,u)\,C(z,1) + \left(2z^2\frac{\partial C}{\partial z} - zC\right)$$

carte =  ou  ou 

# NOMBRE DE COMPOSANTES CONNEXES ATTACHÉES À LA RACINE

$C(z,u)$ = série génératrice des cartes combinatoires comptées selon les arêtes $(z)$ et les composantes connexes attachées au sommet racine $(u)$.

Équation :

$$C(z,u) = z + u\,C(z,u)\,C(z,1) + \left(2z^2\frac{\partial C}{\partial z} - zC\right)$$

Théorème :

Nombre de composantes connexes attachées au sommet racine $\xrightarrow[\text{loi}]{}$

# NOMBRE DE COMPOSANTES CONNEXES ATTACHÉES À LA RACINE

$C(z,u)$ = série génératrice des cartes combinatoires comptées selon les arêtes $(z)$ et les composantes connexes attachées au sommet racine $(u)$.

Équation :

$$C(z,u) = z + u\,C(z,u)\,C(z,1) + \left(2z^2\frac{\partial C}{\partial z} - zC\right)$$

Théorème :

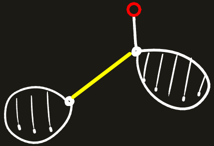
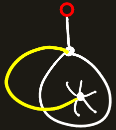
Nombre de composantes connexes attachées au sommet racine $\xrightarrow[\text{loi}]{}$ Loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

# DEGRE DU SOMMET RACINE

$C(z,u)$ = série génératrice des cartes combinatoires comptées selon les arêtes $(z)$, le degré du sommet racine $(u)$.

Équation :

$$C(z,u) = zu + u\,C(z,u)\,C(z,1) + u\left(2z^2\frac{\partial C}{\partial z} - zC\right) + (u^2-u)\frac{\partial C}{\partial u}$$

carte =  ou  ou 

# DEGRE DU SOMMET RACINE

$C(z,u)$ = série génératrice des cartes combinatoires comptées selon les arêtes ($z$), le degré du sommet racine ($u$).

Équation :

$$C(z,u) = zu + u\,C(z,u)\,C(z,1) + u\left(2z^2\frac{\partial C}{\partial z} - zC\right) + (u^2-u)\frac{\partial C}{\partial u}$$

Théorème :

$$\text{Degré du sommet racine} \xrightarrow[\text{loi}]{}$$

# DEGRE DU SOMMET RACINE

$C(z,u)$ = série génératrice des cartes combinatoires comptées selon les arêtes ($z$), le degré du sommet racine ($u$).

Équation :

$$C(z,u) = zu + u\,C(z,u)\,C(z,1) + u\left(2z^2\frac{\partial C}{\partial z} - zC\right) + (u^2-u)\frac{\partial C}{\partial u}$$

Théorème :

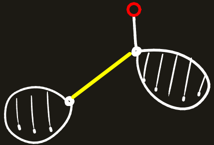
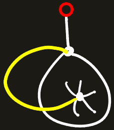
$$\boxed{\text{Degré du sommet racine divisé par } n \xrightarrow[\text{loi}]{} \text{loi uniforme sur } [0,1]}$$

# NOMBRE DE BOUCLES

$C(z,u,\ell)$ = série génératrice des cartes combinatoires comptées selon les arêtes ($z$), le degré du sommet racine ($u$) et le nombre de boucles ($\ell$).

Équation :

$$C(z,u) = zu + u\,C(z,u)\,C(z,1) + u\left(2z^2\frac{\partial C}{\partial z} - zC\right) + (u^2\ell - u)\frac{\partial C}{\partial u}$$

carte =  ou  ou 

# NOMBRE DE BOUCLES

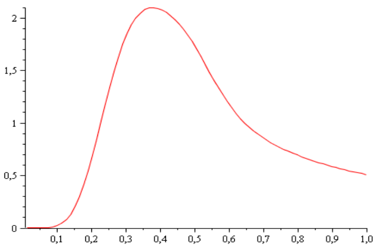
$C(z,u,\ell)$ = série génératrice des cartes combinatoires comptées selon les arêtes ($z$), le degré du sommet racine ($u$) et le nombre de boucles ($\ell$).

Équation :

$$C(z,u) = zu + u\,C(z,u)\,C(z,1) + u\left(2z^2\frac{\partial C}{\partial z} - zC\right) + (u^2\ell - u)\frac{\partial C}{\partial u}$$

Observation

nombre de boucles divisé par $n$ $\xrightarrow{\text{loi}}$



# CONCLUSION

→ Large éventail de lois limites pour les cartes combinatoires :
vers une taxonomie des lois possibles?

→ Extension à d'autres familles de cartes ?
d'autres familles combinatoires ?

→ <u>Objectif :</u> Développer des outils théoriques généraux pour l'étude des équations différentielles non linéaires.

MERCI !