

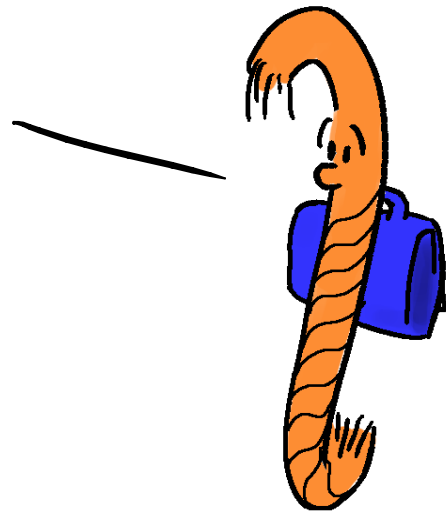
---

# CORDES TERMINALES DANS LES DIAGRAMMES CONNEXES DE CORDES.

---

Julien COURTIEL (PIMS, UBC, Vancouver)  
Karen YEATS (SFU, Vancouver)  
(Travail en cours)

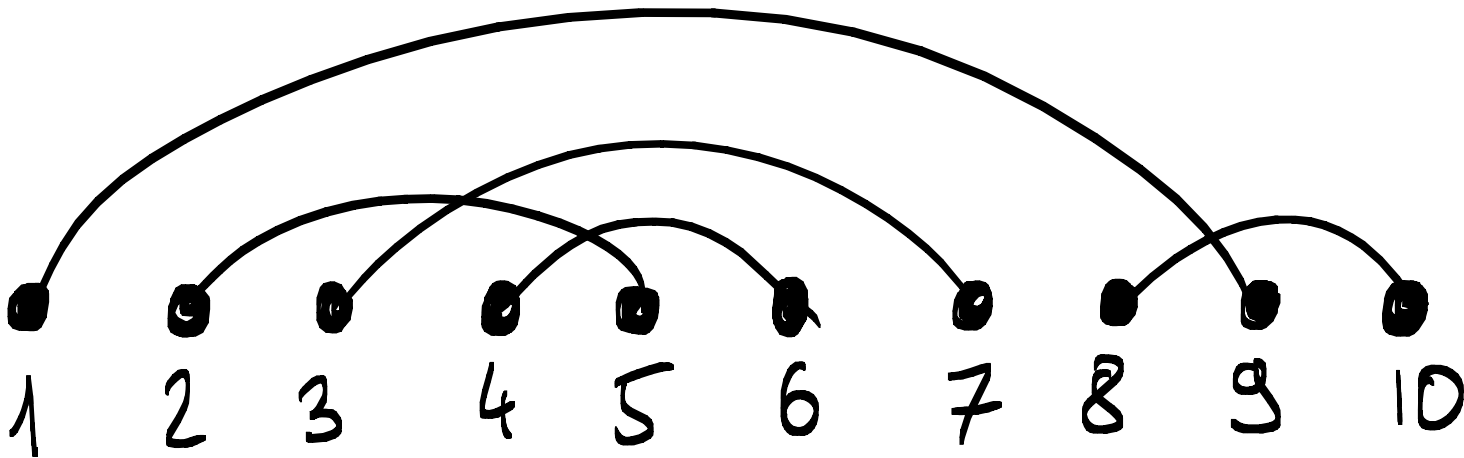
NON MOI  
JE SUIS EN  
SECONDE.



Séminaire de Combinatoire Énumérative et Algébrique, Bordeaux.

# DÉFINITION

Diagramme de  $n$  cordes:  
appariement de  $\{1, 2, \dots, 2n\}$

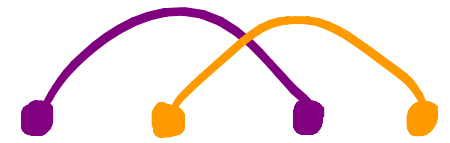


# CONNEXITÉ & CORDES TERMINALES

graphe (orienté) d'intersection :

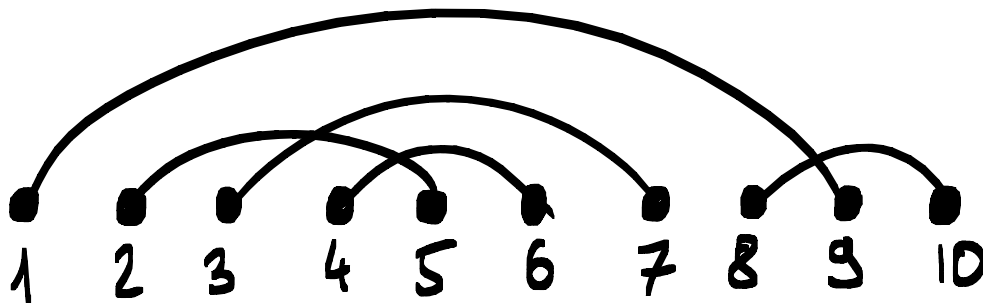


si

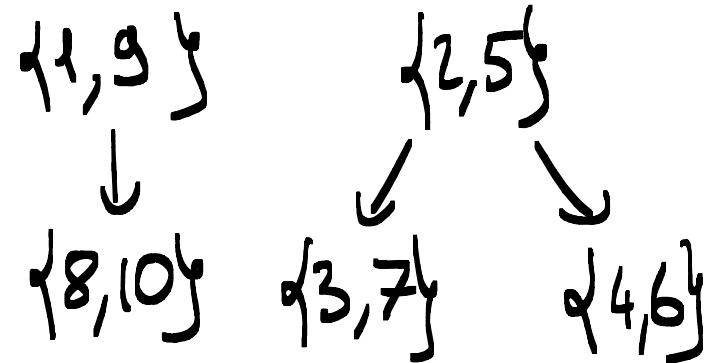


Ex:

diagramme



graphe d'intersection



# CONNEXITÉ & CORDES TERMINALES



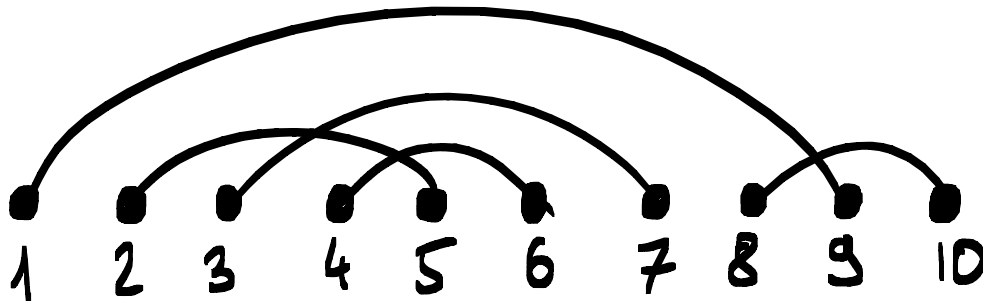
graphe (orienté) d'intersection :  si 

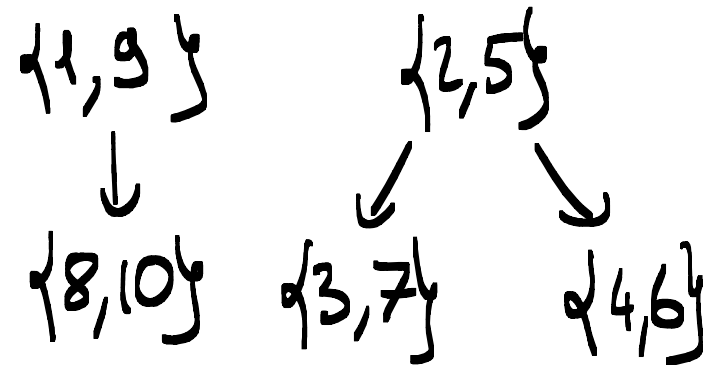
diagramme connexe de cordes = diagramme avec un graphe d'intersection connexe

Ex:

diagramme



graphe d'intersection



# CONNEXITÉ & CORDES TERMINALES



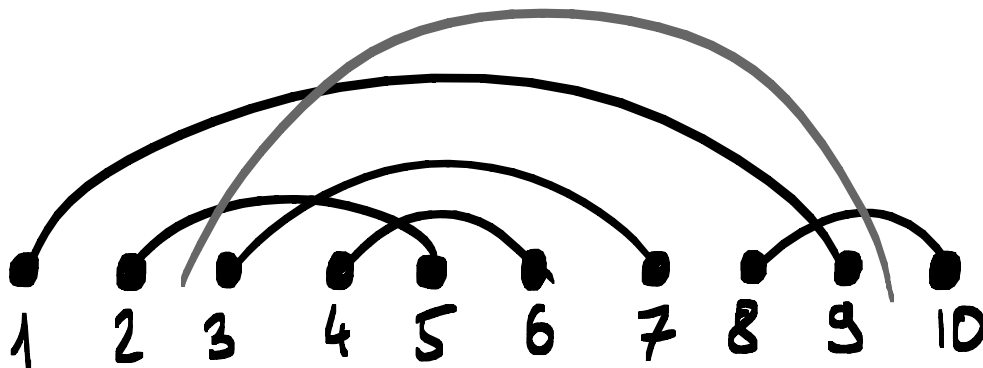
graphe (orienté) d'intersection :  si 

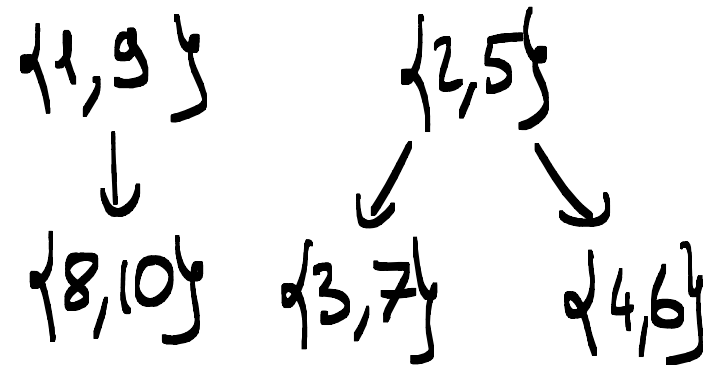
diagramme connexe de cordes = diagramme avec un graphe d'intersection connexe

Ex:

diagramme



graphe d'intersection



# CONNEXITÉ & CORDES TERMINALES



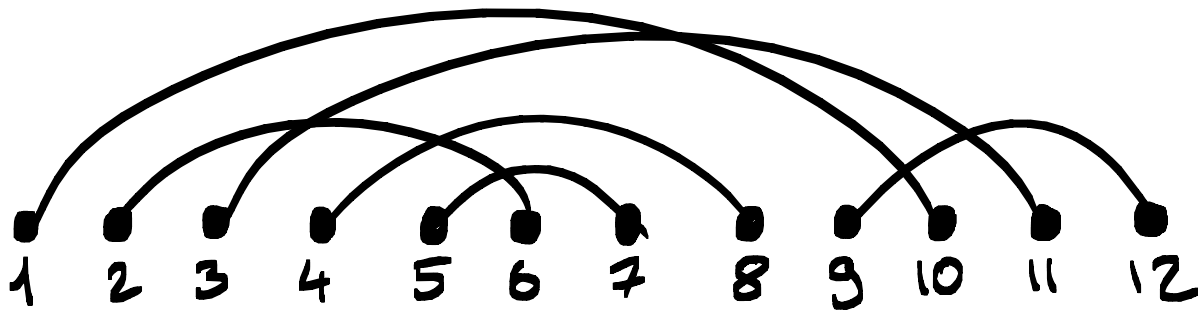
graphe (orienté) d'intersection :  si 

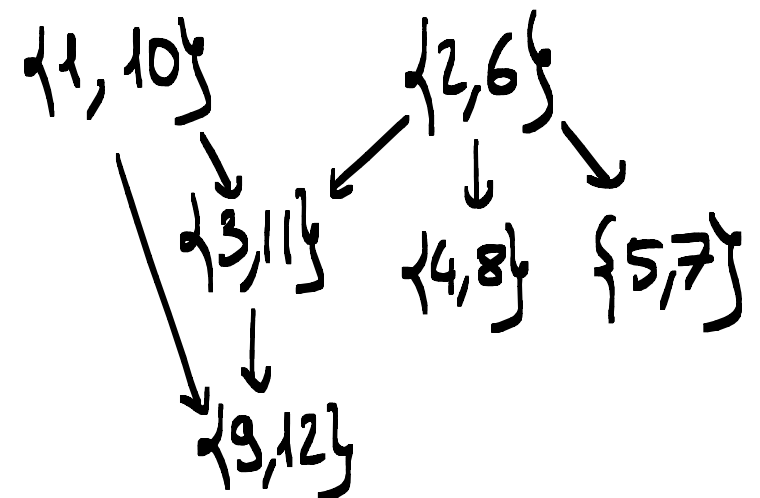
diagramme connexe de cordes = diagramme avec un graphe d'intersection connexe

Ex:

diagramme



graphe d'intersection



# CONNEXITÉ & CORDES TERMINALES


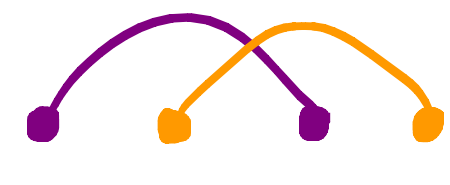
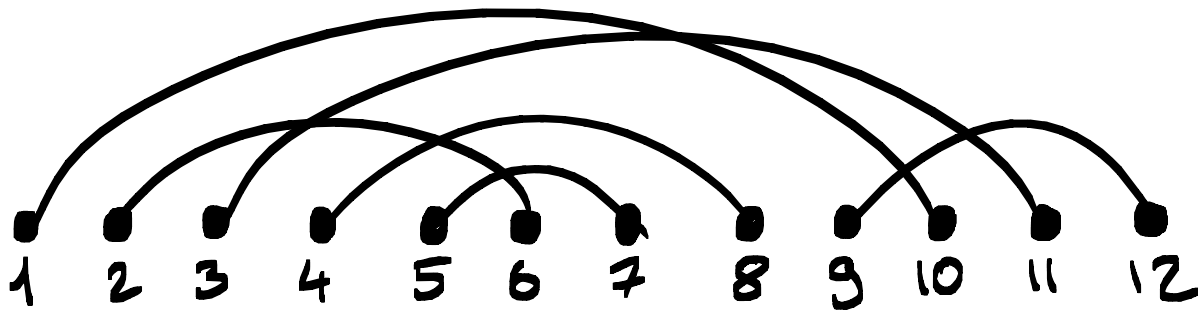
graphe (orienté) d'intersection :  si 

diagramme connexe de cordes = diagramme avec un graphe d'intersection connexe

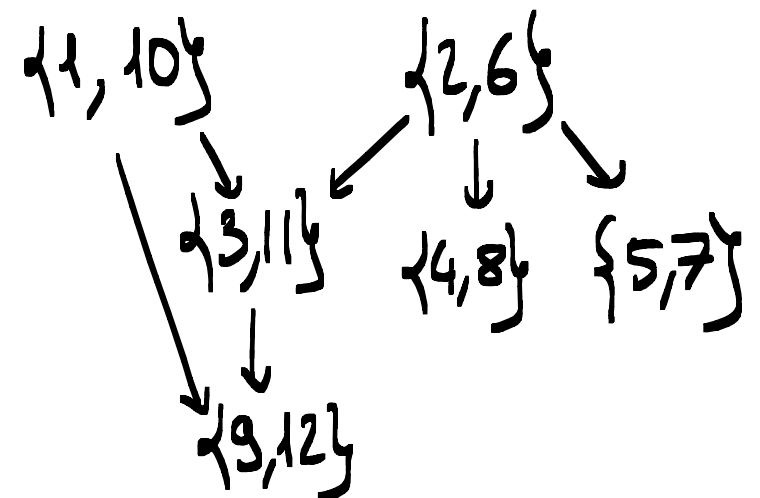
corde terminale = le sommet correspondant n'a pas d'arête sortante.

Ex:

diagramme



graphe d'intersection



# CONNEXITÉ & CORDES TERMINALES



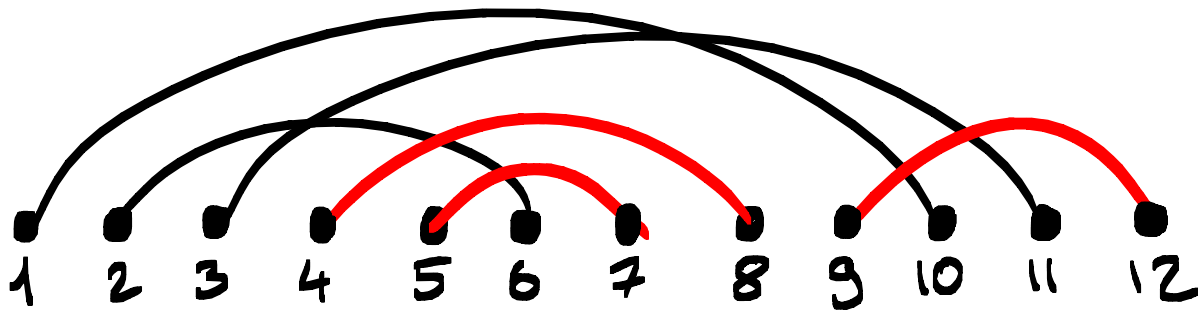
graphe (orienté) d'intersection :  si 

diagramme connexe de cordes = diagramme avec un graphe d'intersection connexe

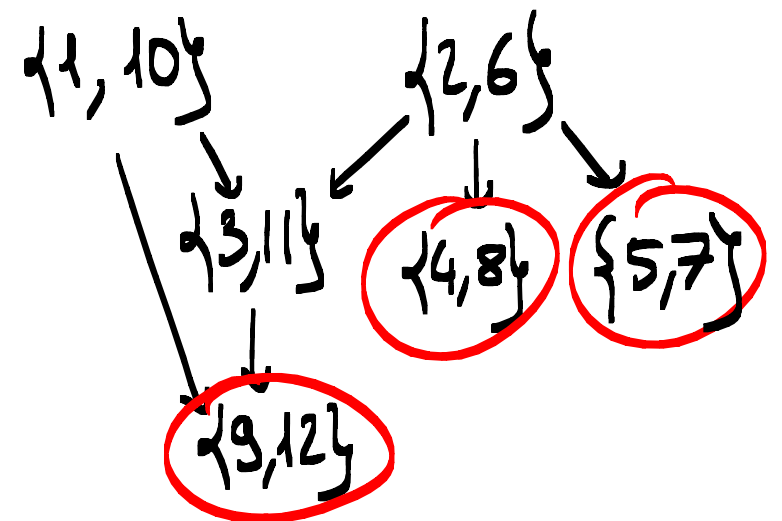
corde terminale = le sommet correspondant n'a pas d'arête sortante.

Ex:

diagramme

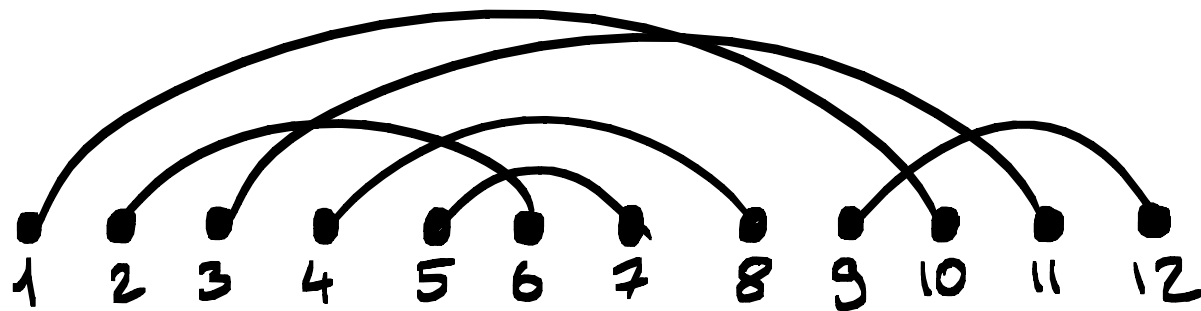
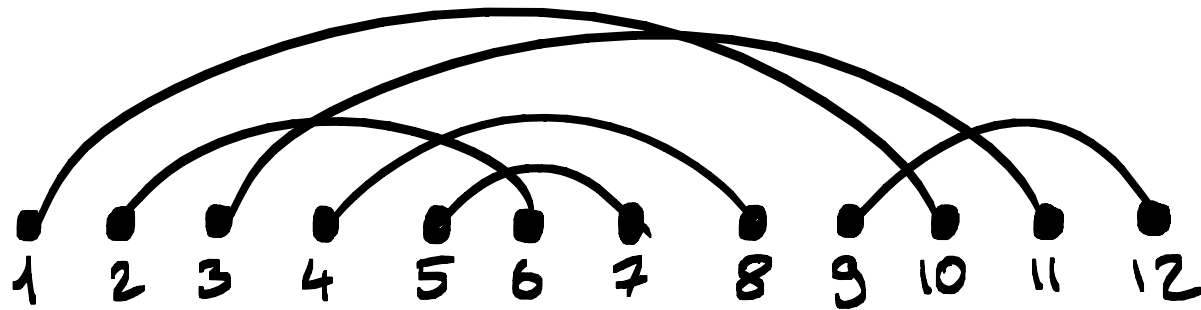


graphe d'intersection

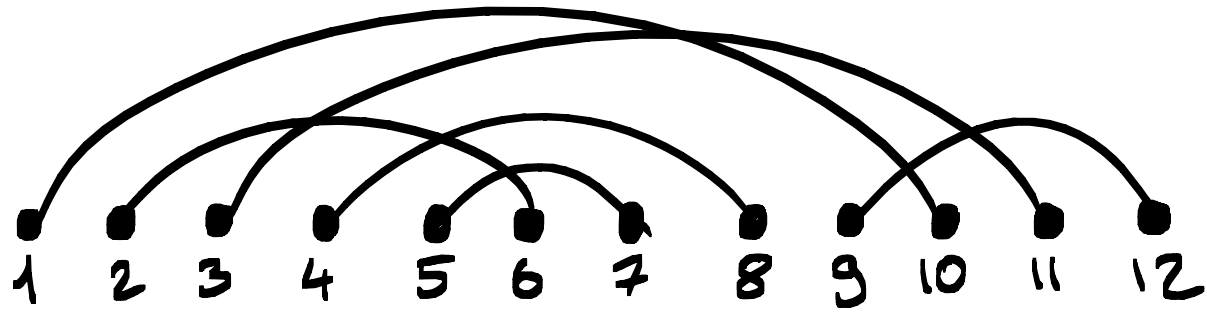
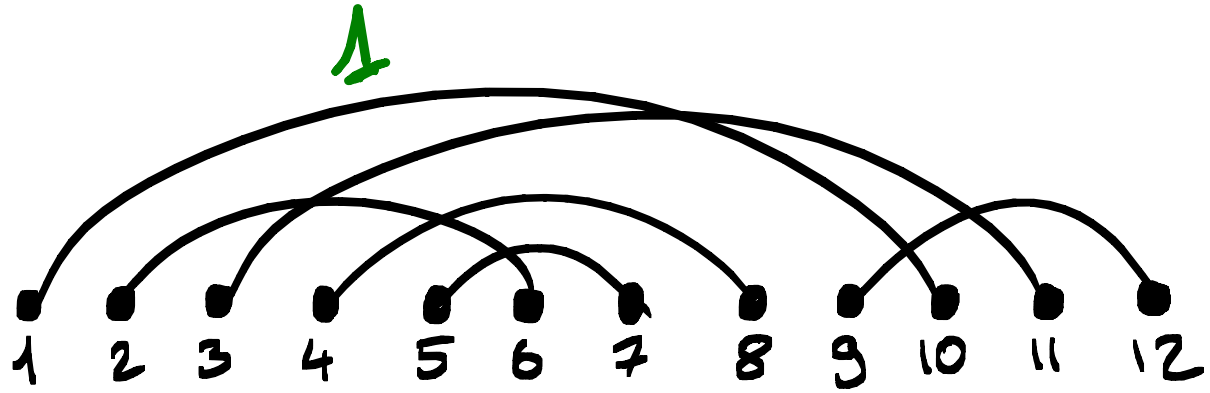




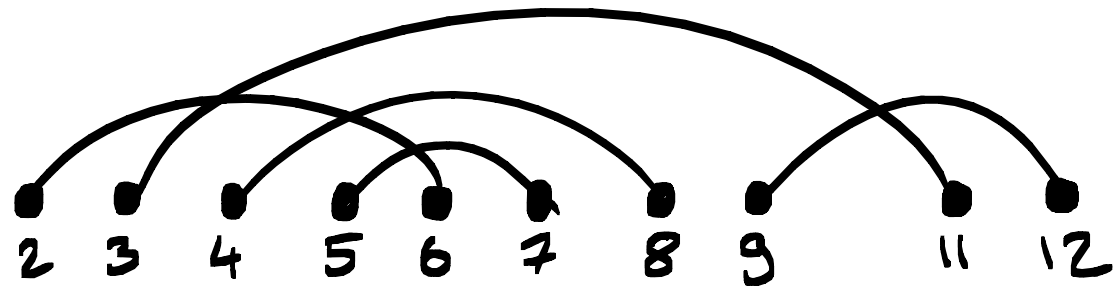
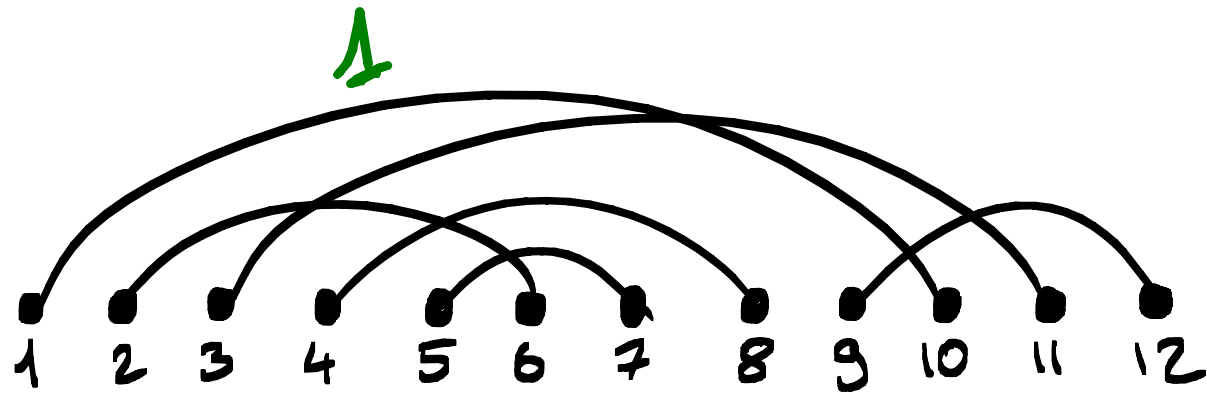
# ORDRE D'INTERSECTION



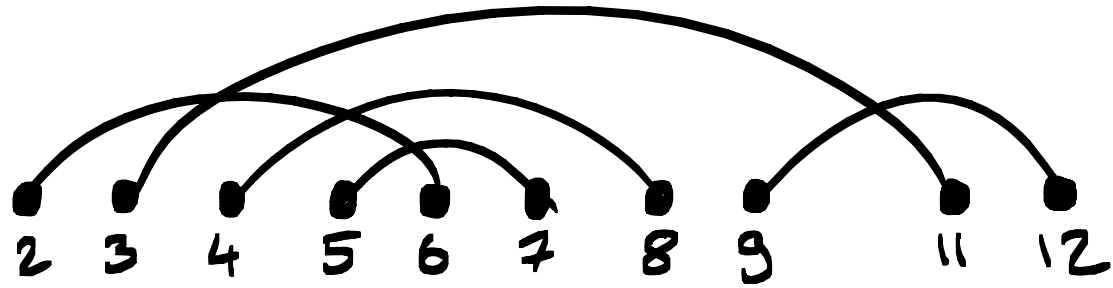
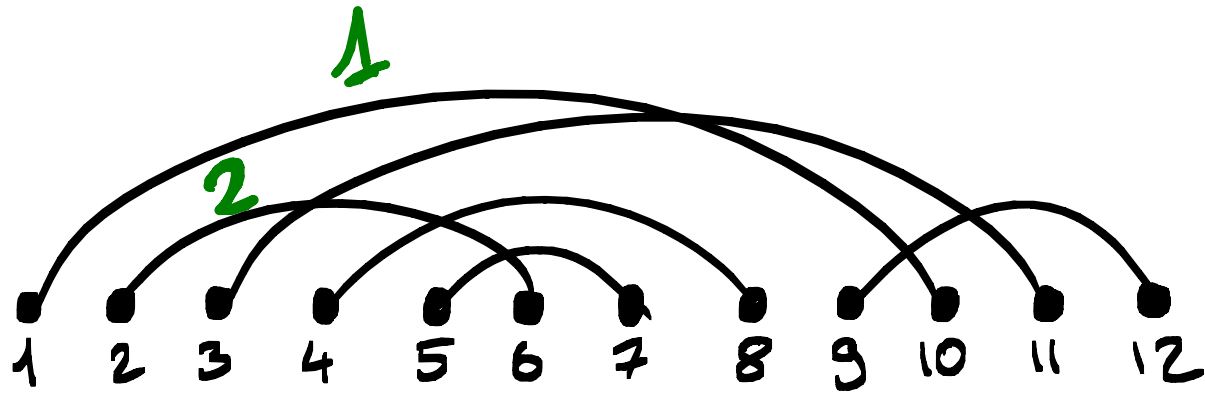
# ORDRE D'INTERSECTION



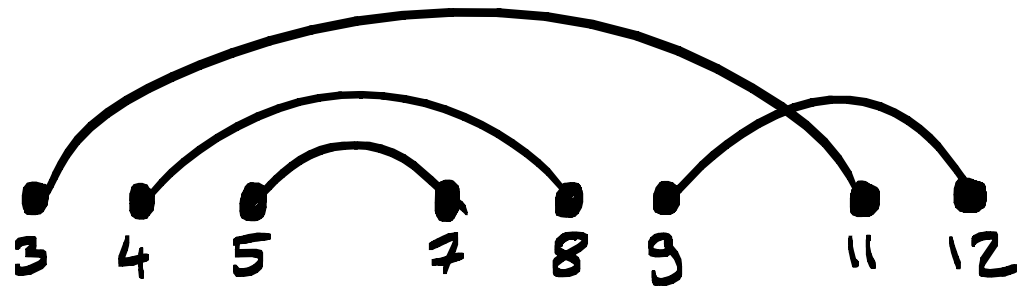
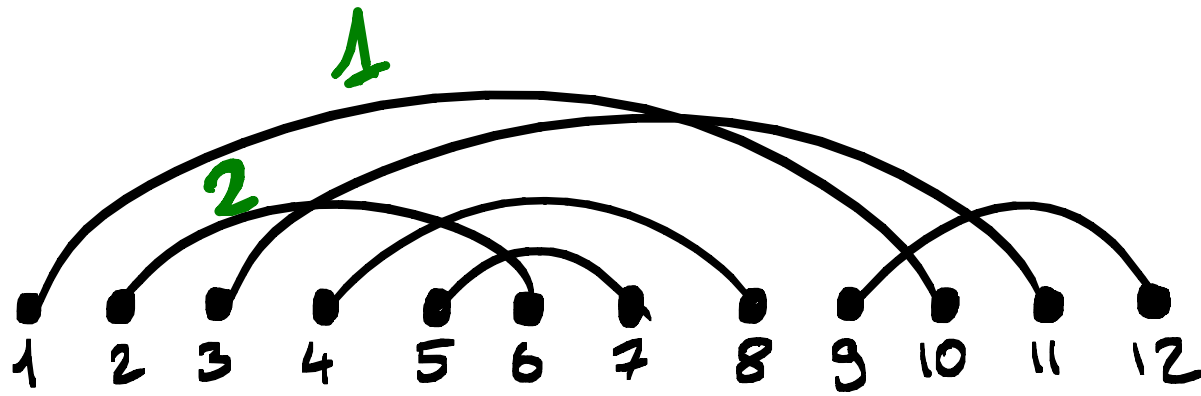
# ORDRE D'INTERSECTION



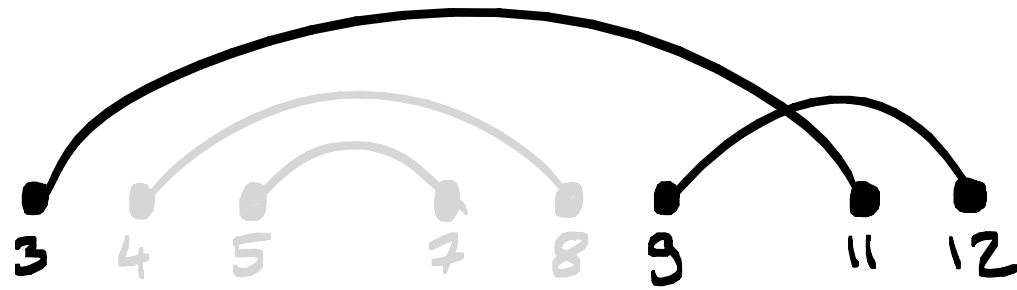
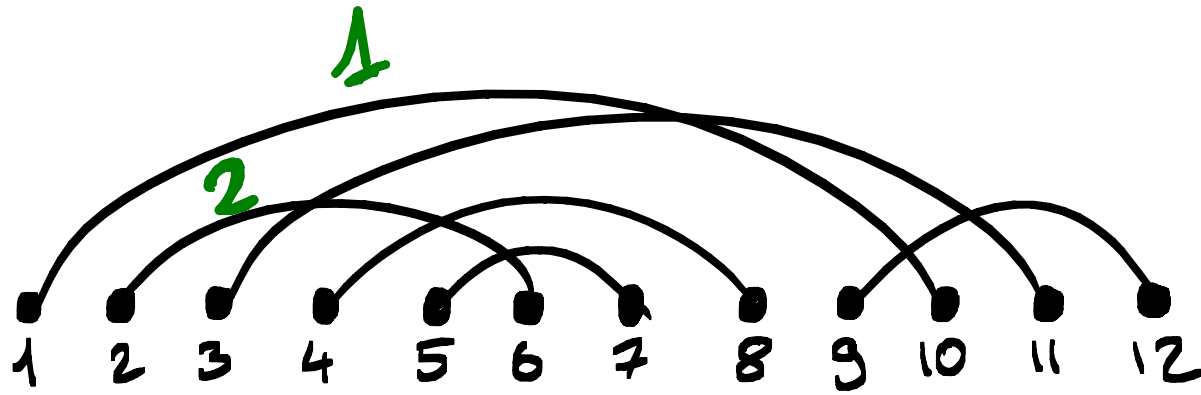
# ORDRE D'INTERSECTION



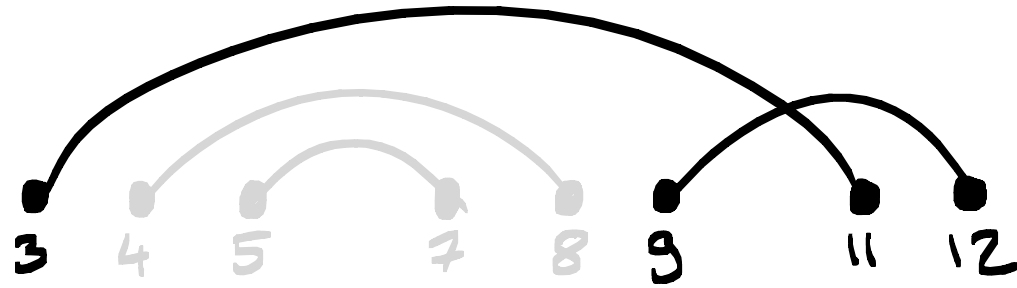
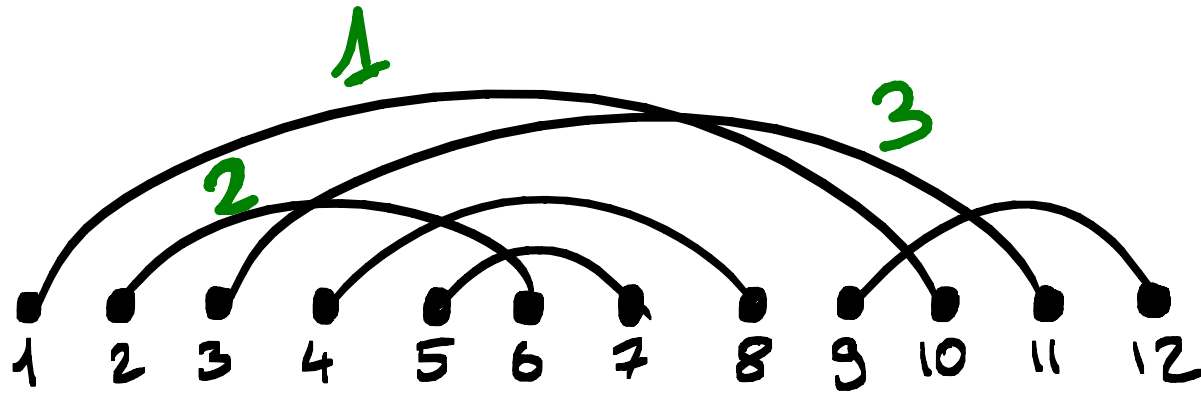
# ORDRE D'INTERSECTION



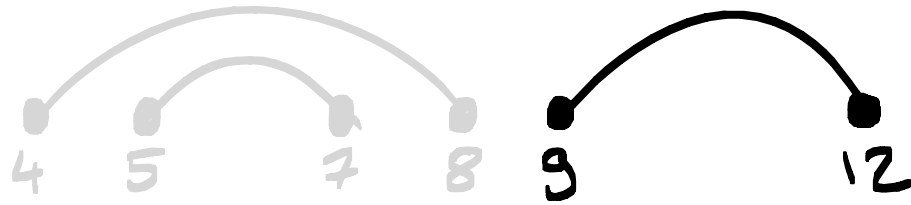
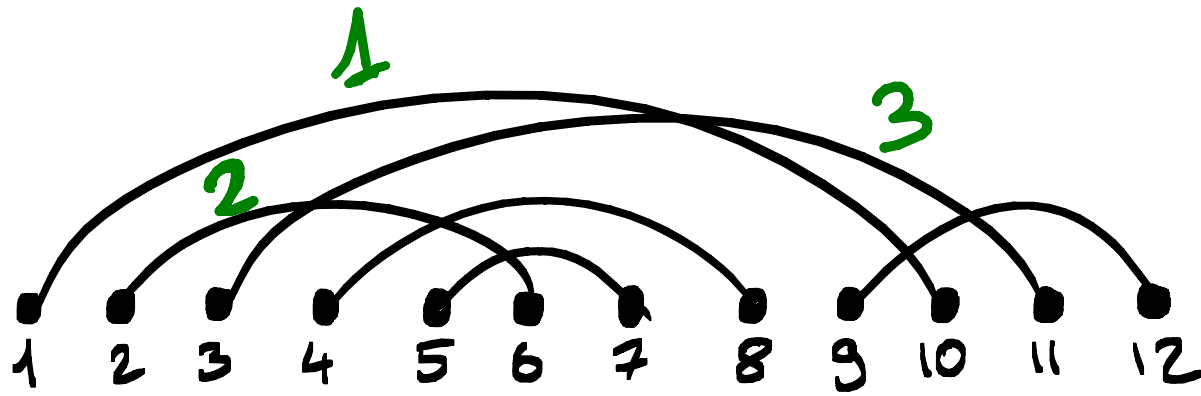
# ORDRE D'INTERSECTION



# ORDRE D'INTERSECTION

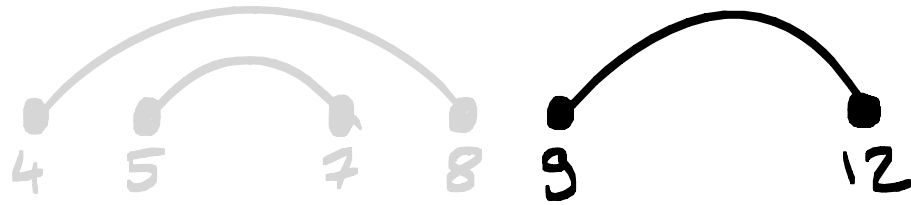
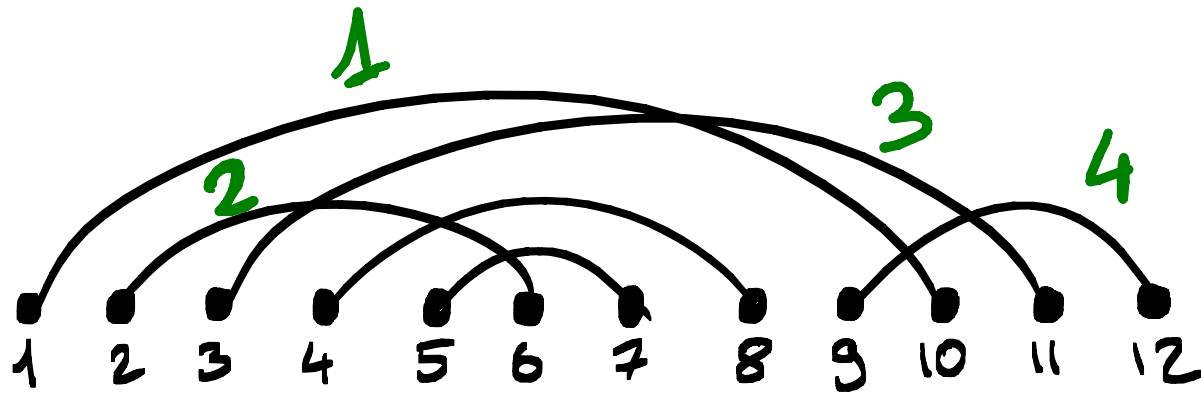


# ORDRE D'INTERSECTION

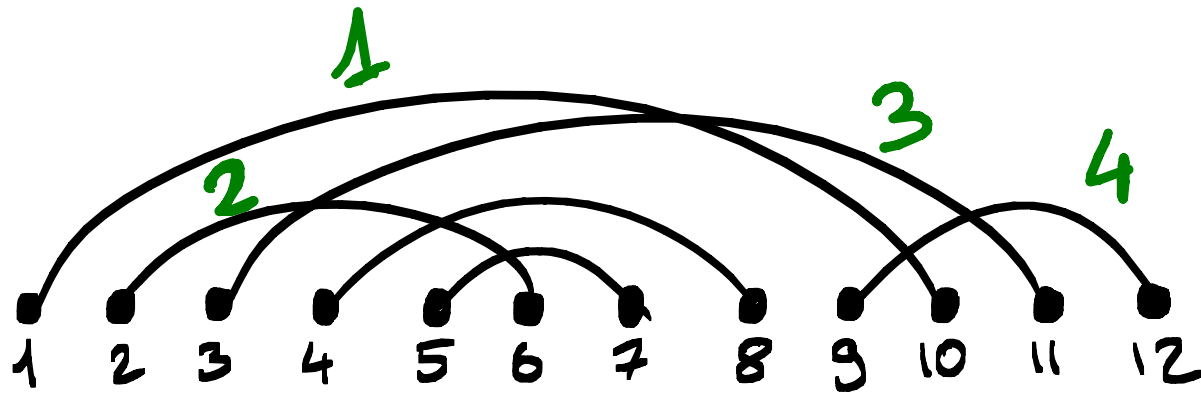




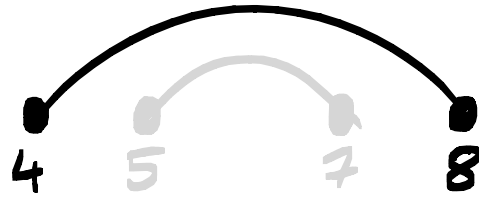
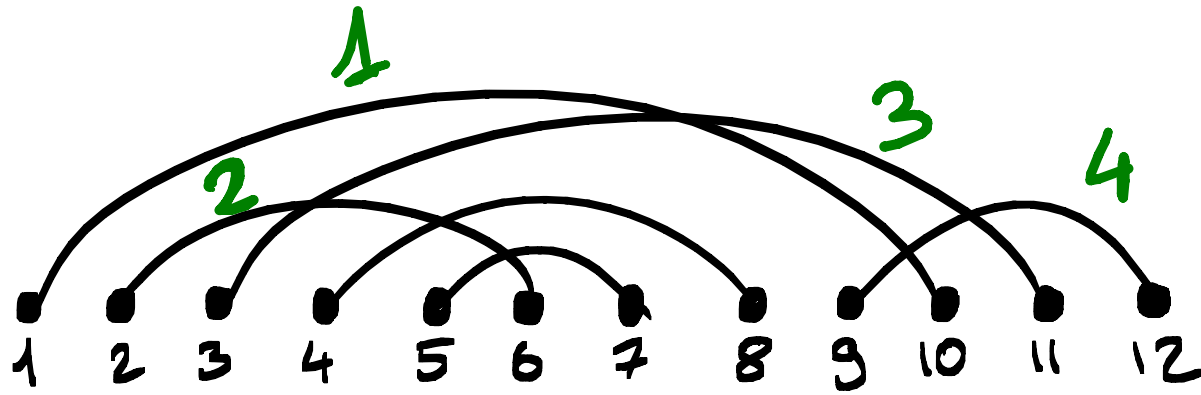
# ORDRE D'INTERSECTION



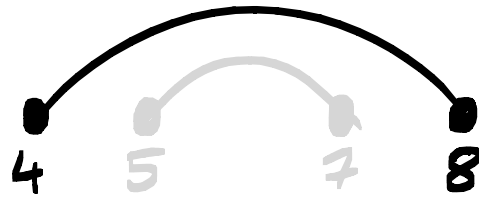
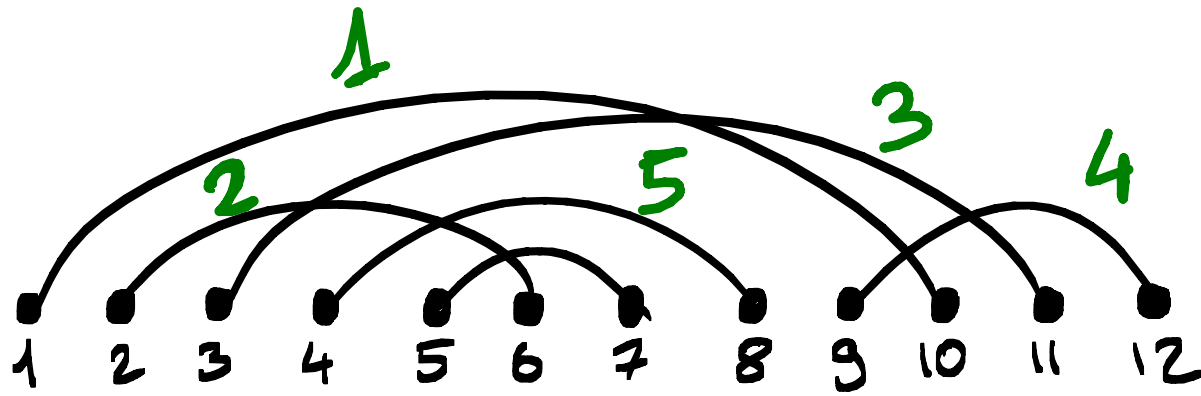
# ORDRE D'INTERSECTION



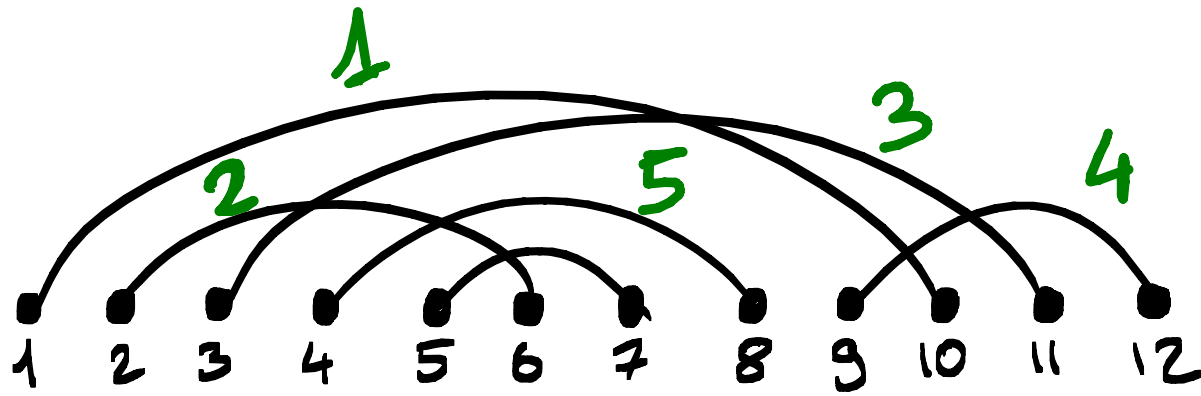
# ORDRE D'INTERSECTION



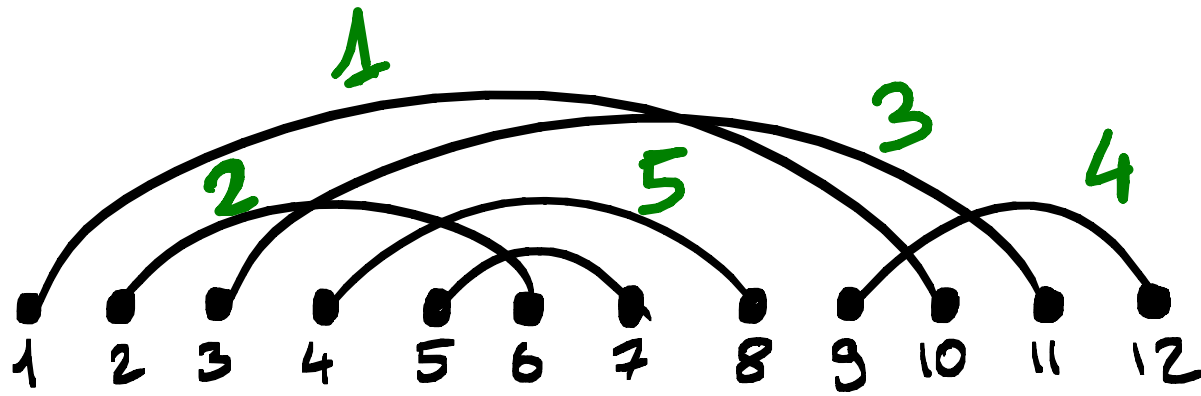
# ORDRE D'INTERSECTION



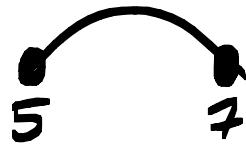
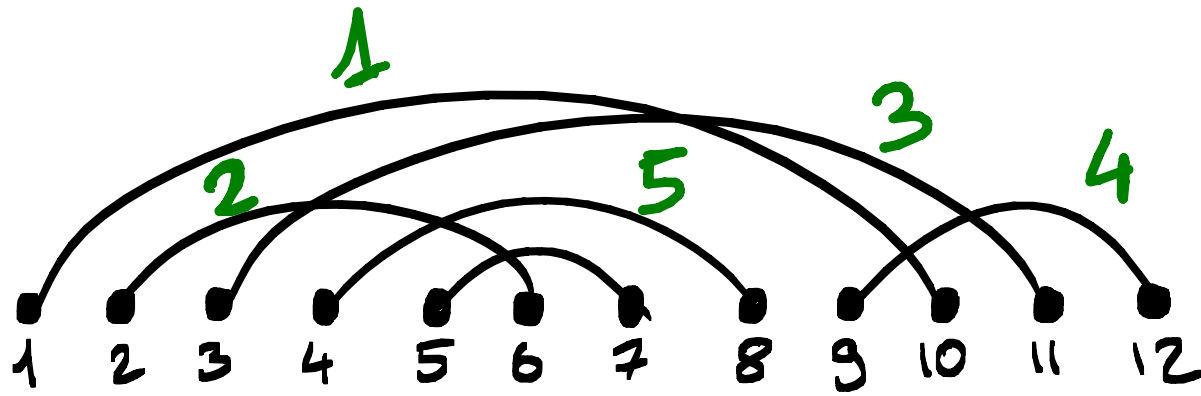
# ORDRE D'INTERSECTION



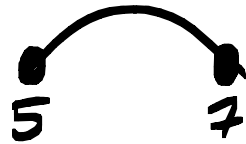
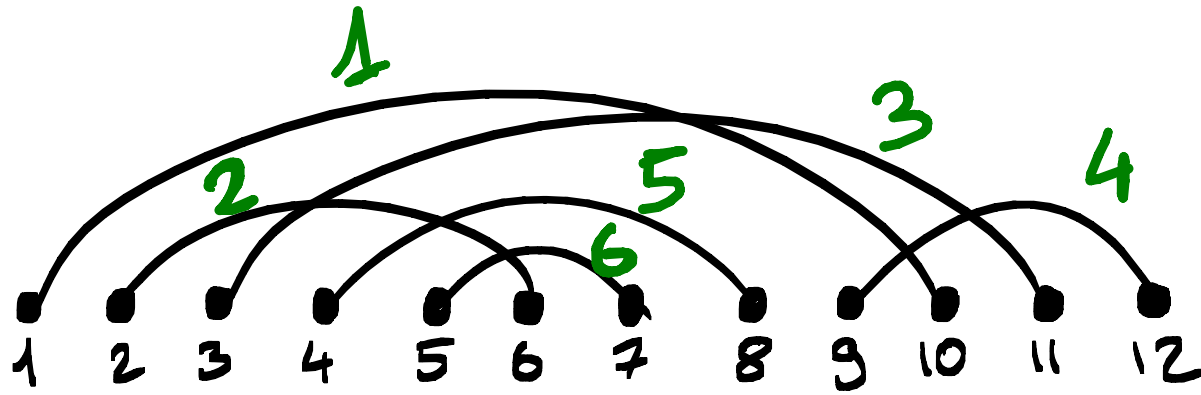
# ORDRE D'INTERSECTION



# ORDRE D'INTERSECTION

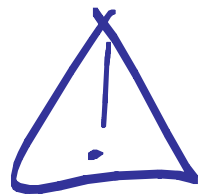
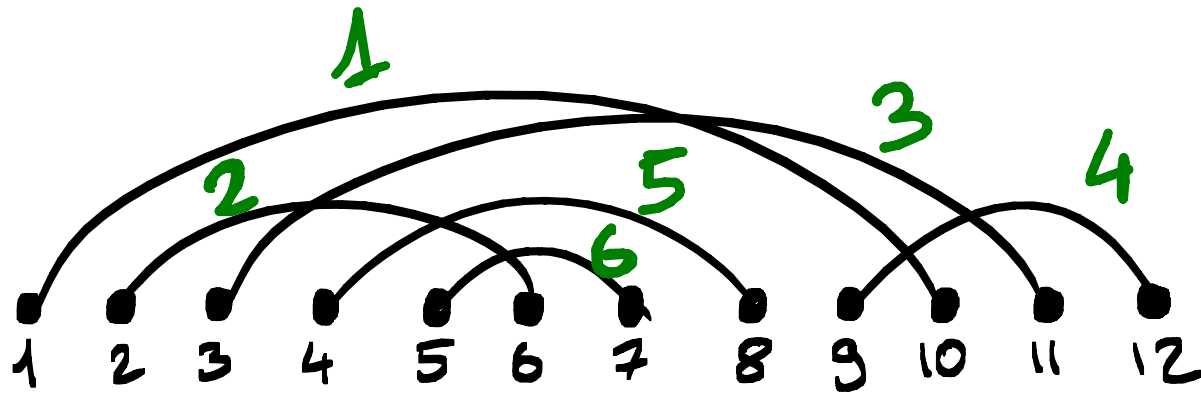


# ORDRE D'INTERSECTION



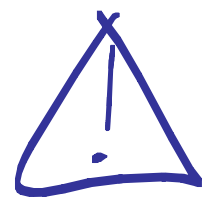
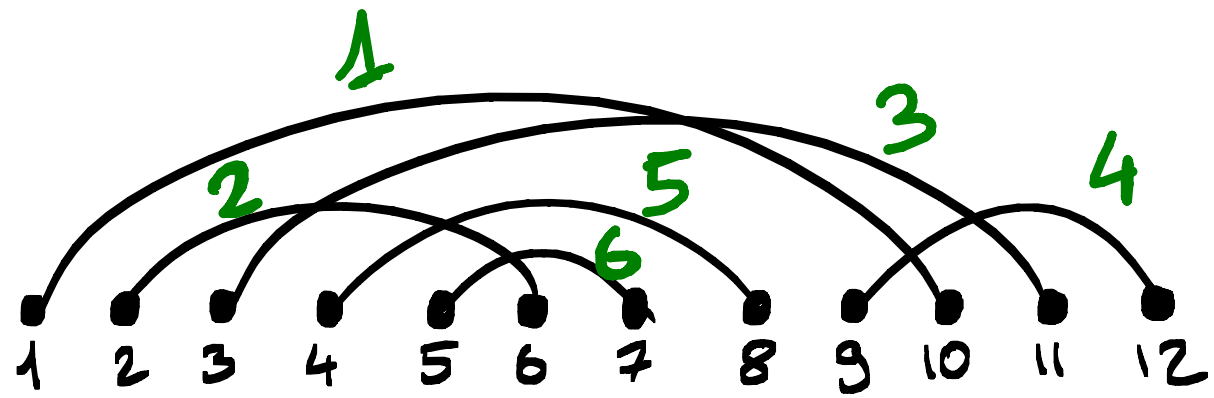


# ORDRE D'INTERSECTION



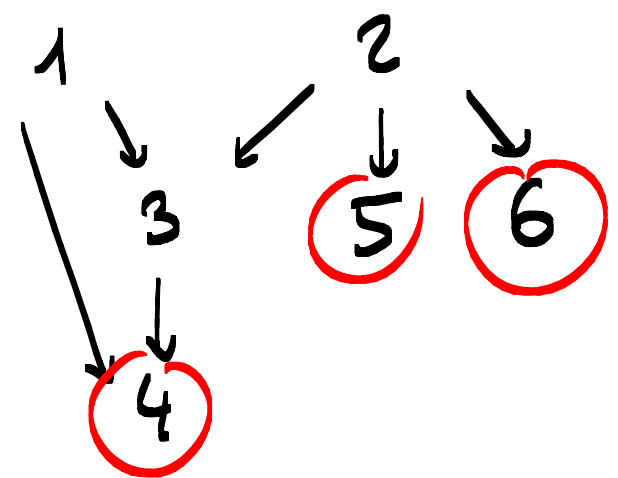
ordre  $\neq$  ordre selon la  
d'intersection plus petite extrémité

# ORDRE D'INTERSECTION



ordre d'intersection  $\neq$  ordre selon la plus petite extrémité

graphe d'intersection :



# QUESTIONS QU'ON VA SE POSER

→ nombre moyen de cordes terminales?

→ position de la première corde terminale?

→ nombre de cordes terminales consécutives?

# QUESTIONS QU'ON VA SE POSER

→ nombre moyen de cordes terminales?

→ position de la première corde terminale?

→ nombre de cordes terminales consécutives?

... mais pourquoi on se demande ça?

# EQUATIONS DE DYSON-SCHWINGER

→ relations entre fonctions de Green en théorie des champs quantiques.

# EQUATIONS DE DYSON-SCHWINGER

→ relations entre fonctions de Green en théorie des champs quantiques.

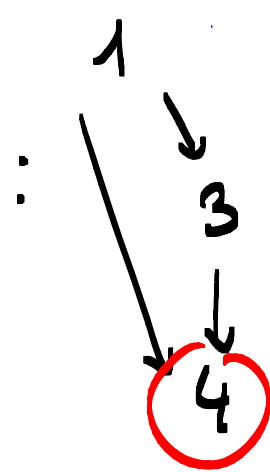
Théorème [Marie, Yeats] Les solutions à "certaines" équations de Dyson-Schwinger s'écrivent

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \frac{L^i}{i!} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{connexe de cordes} \\ \text{où les cordes terminales} \\ \text{ont pour positions } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{avec } t_1 \geq i}} \alpha^{|C|} \beta_0^{|C|-k} \beta_{t_1-i} \beta_{t_2-t_1} \beta_{t_3-t_2} \dots \beta_{t_k-t_{k-1}}$$

où  $\frac{\beta_0}{\rho} + \beta_1 + \beta_2 \rho + \beta_3 \rho^2 + \dots =$  série de Laurent d'une intégrale de Feynman régularisée

# EQUATIONS DE DYSON-SCHWINGER

graphe  
d'intersection



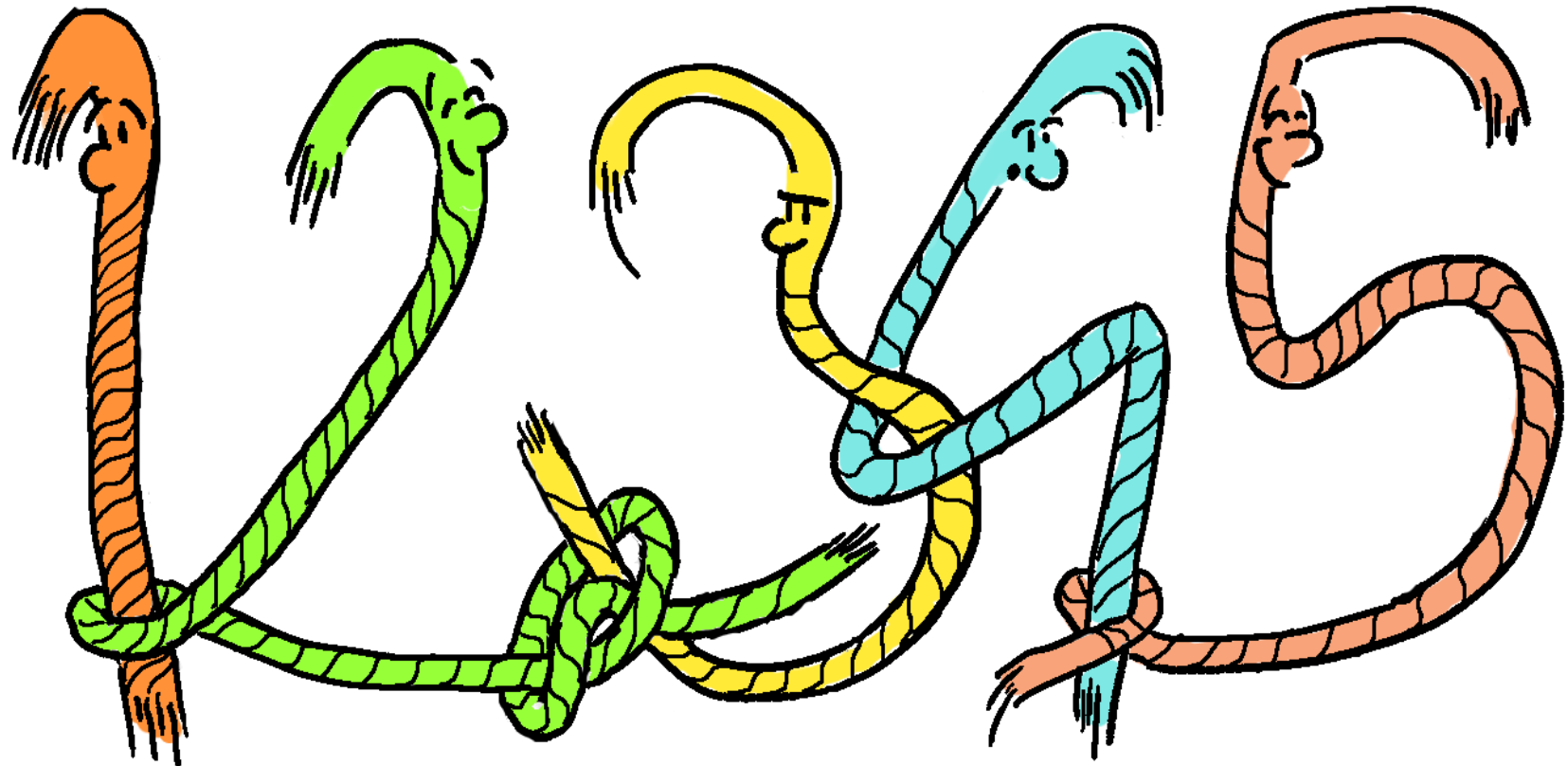
$$(*) = \begin{cases} x^6 b_0^3 b_{4-i} b_i^2 & \text{si } i \leq 4, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \frac{L^i}{i!} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{connexe de cordes} \\ \text{où les cordes terminées} \\ \text{ont pour positions } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{avec } t_1 \geq i}} x^{|C|} b_0^{|C|-k} b_{t_1-i} b_{t_2-t_1} b_{t_3-t_2} \dots b_{t_k-t_{k-1}}$$

(\*)

où  $\frac{b_0}{x} + b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \dots =$  série de Laurent d'une intégrale de Feynman régularisée

# DE L'ÉNUMÉRATION DES DIAGRAMMES CONNEXES DE CORDES





# HISTORIQUE...

Sur l'énumération des diagrammes de cordes :

→ théorie des nœuds (invariants de Vassiliev)

→ modèle de graphes aléatoires

→ bio-informatique (structures secondaires d'ARN)

→ cumulants

→ ...

## HISTORIQUE...

Sur l'énumération des diagrammes de cordes :

- théorie des nœuds (invariants de Vassiliev)
- modèle de graphes aléatoires
- bio-informatique (structures secondaires d'ARN)
- cumulants
- ...

Sur l'énumération de diagrammes connexes de cordes :

3 papiers :

# HISTORIQUE...

Sur l'énumération des diagrammes de cordes :

- théorie des nœuds (invariants de Vassiliev)
- modèle de graphes aléatoires
- bio-informatique (structures secondaires d'ARN)
- cumulants
- ...

Sur l'énumération de diagrammes connexes de cordes :

3 papiers :

1. [Touchard, 1952] = la préhistoire

# HISTORIQUE...

Sur l'énumération des diagrammes de cordes:

- théorie des nœuds (invariants de Vassiliev)
- modèle de graphes aléatoires
- bio-informatique (structures secondaires d'ARN)
- cumulants
- ...

Sur l'énumération de diagrammes connexes de cordes:

3 papiers:

1 - [Touchard, 1952] = la préhistoire

2 - [Stein-Everett, 1978] = des formules!

# HISTORIQUE...

Sur l'énumération des diagrammes de cordes:

- théorie des nœuds (invariants de Vassiliev)
- modèle de graphes aléatoires
- bio-informatique (structures secondaires d'ARN)
- cumulants
- ...

Sur l'énumération de diagrammes connexes de cordes:

3 papiers:

1 - [Touchard, 1952] = la préhistoire

2 - [Stein-Everett, 1978] = des formules!

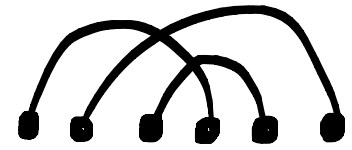
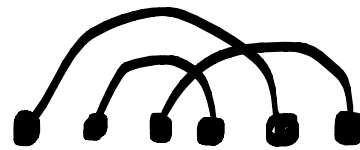
3 - [Flajolet-Noy, 2000] = de la combi analytique!!

# FORMULE DE STEIN

$C_n$  = nombre de diagrammes connexes à  $n$  cordes

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 1 \quad C_3 = 4 \quad C_4 = 27$$

Pour  $n=3$ ,

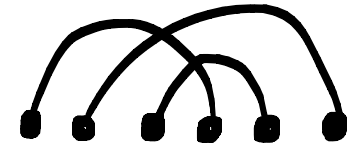
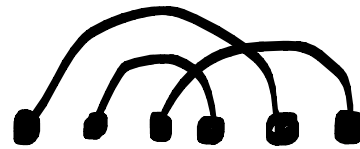


# FORMULE DE STEIN

$C_n$  = nombre de diagrammes connexes à  $n$  cordes

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 1 \quad C_3 = 4 \quad C_4 = 27 \quad C_5 = 248$$

Pour  $n=3$ ,



# FORMULE DE STEIN

$C_n$  = nombre de diagrammes connexes à  $n$  cordes

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 1 \quad C_3 = 4 \quad C_4 = 27 \quad C_5 = 248$$

Pour  $n=3$ ,



Théorème [Stein]

$$C_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} C_k \times C_{n-k}$$



# FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$$

# FORMULE DE STEIN

Théorème  $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$

Corollaire:  $c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

# FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

(chang. de var.  $k \leftarrow n-k$ )

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2k-1) c_{n-k} c_k$$

Corollaire:  $c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

# FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

(chang. de var.  $k \leftarrow n-k$ )

⊕

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2k-1) c_{n-k} c_k$$

---

$$2c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2) c_k c_{n-k}$$

Corollaire:  $c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$

# FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

⊕

(chang. de var.  $k \leftarrow n-k$ )

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2k-1) c_{n-k} c_k$$

---

$$2c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2) c_k c_{n-k}$$

%2 (

Corollaire:  $c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$

# FORMULE DE STEIN

Théorème  $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$

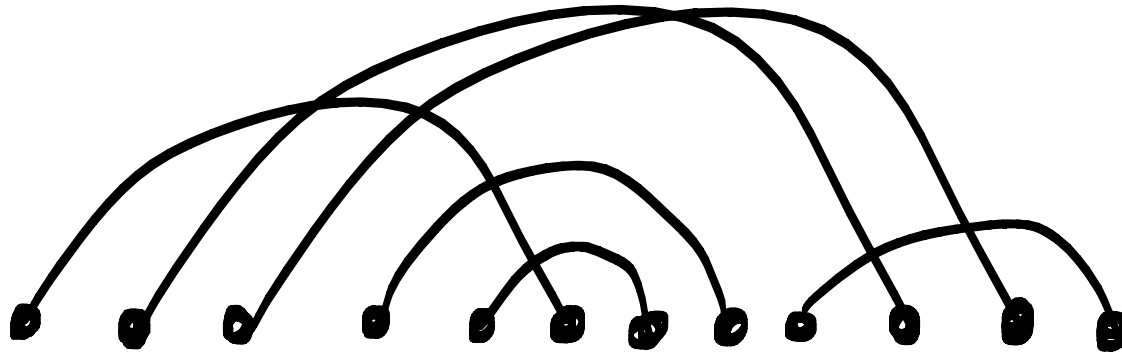
Preuve:

# FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

Preuve:

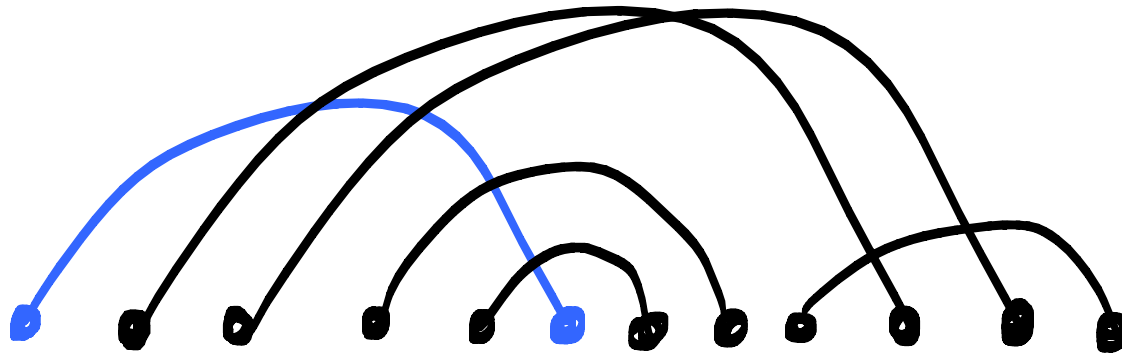


# FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

Preuve:



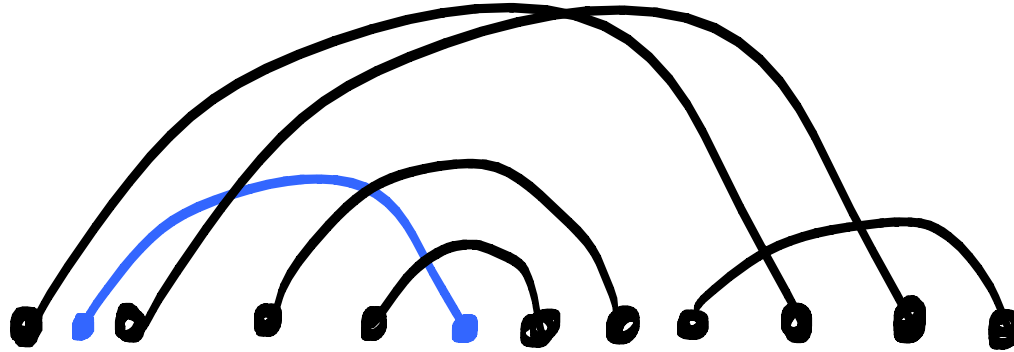


# FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

Preuve:

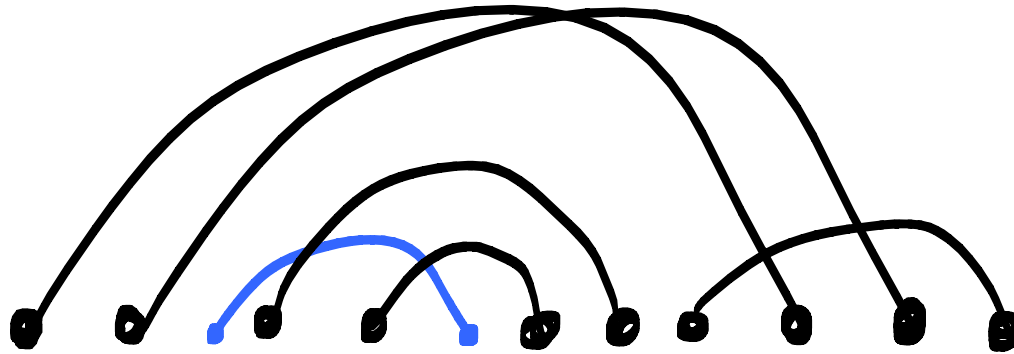


# FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

Preuve:

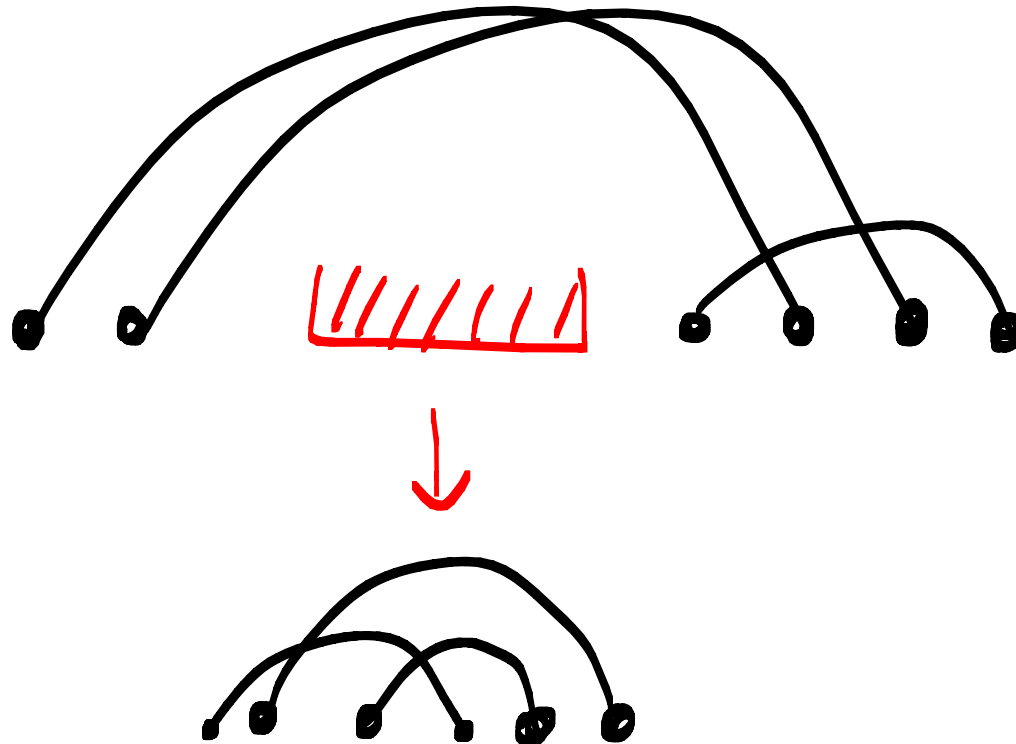


# FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

Preuve:



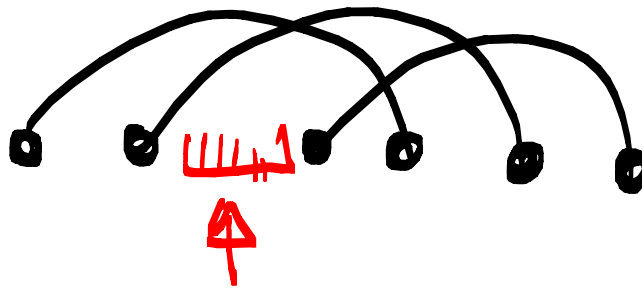
# FORMULE DE STEIN

Théorème

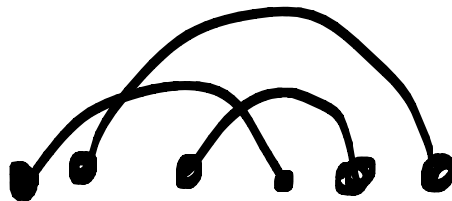
$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

Preuve:

si  $k$  cordes



$2k-1$  emplacements possibles



# $c_n$ VS CATALAN

DIAGRAMMES  
CONNEXES

$$c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

CATALAN

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

# $c_n$ VS CATALAN

DIAGRAMMES  
CONNEXES

$$c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

$$c_n \geq (n-1) \times c_1 \times c_{n-1}$$

CATALAN

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

# $c_n$ VS CATALAN

DIAGRAMMES  
CONNEXES

$$c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

$$c_n \geq (n-1) \times c_1 \times c_{n-1}$$

$$c_n \geq (n-1)!$$

CATALAN

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

# $c_n$ VS CATALAN

DIAGRAMMES  
CONNEXES

$$c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

$$c_n \geq (n-1) \times c_1 \times c_{n-1}$$

$$c_n \geq (n-1)!$$

→ pas analytique

CATALAN

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

→ analytique



# $c_n$ VS CATALAN

DIAGRAMMES  
CONNEXES

$$c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

$$c_n \geq (n-1) \times c_1 \times c_{n-1}$$
$$c_n \geq (n-1)!$$

→ pas analytique

↑  
Conséquence: - Les séries génératrices ordinaires  
ne sont pas adaptées.

CATALAN

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

→ analytique

# $c_n$ VS CATALAN

DIAGRAMMES  
CONNEXES

$$c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

$$c_n \geq (n-1) \times c_1 \times c_{n-1}$$
$$c_n \geq (n-1)!$$

→ pas analytique

↑  
Conséquence: - Les séries génératrices ordinaires  
ne sont pas adaptées.

- Mais il n'existe pas de relations simples liant  
les séries génératrices exponentielles...

CATALAN

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

→ analytique

# COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

[Stein-Everett]

$$c_n \sim \frac{1}{e} \times (2n-1)!!$$

Conséquence :  $\mathbb{P}(\text{diagramme soit connexe}) \rightarrow \frac{1}{e}$

# COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

[Stein-Everett]

$$c_n \sim \frac{1}{e} \times (2n-1)!!$$

Conséquence :  $\mathbb{P}(\text{diagramme soit connexe}) \rightarrow \frac{1}{e}$

---

[Flajolet-Noy]

- Nbe de composantes connexes - 1  $\sim$  Poisson(1)
- $n$  - taille de la  $\oplus$  large composante  $\sim$  Poisson(1)

# COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

[Stein-Everett]

$$c_n \sim \frac{1}{e} \times (2n-1)!!$$

Conséquence :  $\mathbb{P}(\text{diagramme soit connexe}) \rightarrow \frac{1}{e}$

---

[Flajolet-Noy]

- Nbe de composantes connexes - 1  $\sim$  Poisson(1)
  - $n$  - taille de la  $\oplus$  large composante  $\sim$  Poisson(1)
- 

Notre modeste contribution :  $\frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

# STATISTIQUES SUR LES CORDES TERMINALES

JE VOUS DIS  
QUE JE SUIS EN  
SECONDE...



# TERMES LOG-DOMINANTS.

Retour sur les solutions des éq. de D-S :

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \frac{L^i}{i!} \sum_{\substack{\text{C diagramme} \\ \text{connexe de cordes} \\ \text{où les cordes terminées} \\ \text{ont pour positions } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{avec } t_1 \geq i}} x^{|\mathcal{C}|} b_0^{|\mathcal{C}|-k} b_{t_1-i} b_{t_2-t_1} b_{t_3-t_2} \dots b_{t_k-t_{k-1}}$$

$\underline{Q}^0 : [x^m] G(x, L) = \text{polynôme en } L \text{ de degré } m$

Coefficients dominants? (=termes log-dominants)

# TERMES LOG-DOMINANTS.

Retour sur les solutions des éq. de D-S :

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \frac{L^i}{i!} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{connexe de cordes} \\ \text{où les cordes terminées} \\ \text{ont pour positions } t_1 < t_2 < \dots < t_\ell \\ \text{avec } t_1 \geq i}} x^{|C|} b_0^{|C|-k} b_{t_1-i} b_{t_2-t_1} b_{t_3-t_2} \dots b_{t_\ell-t_{\ell-1}}$$

Q<sup>o</sup> :  $[x^m] G(x, L)$  = polynôme en  $L$  de degré  $m$

Coefficients dominants? (=termes log-dominants)

La somme est indexée par les  $C$  tels que  $t_1 \geq |C| - \ell$   
pour  $\ell$  petit.



# UNE SEULE CORDE TERMINALE

nombre de diagrammes  $C$  à  $n$  cordes avec  $t_1 \geq n$ ?

# UNE SEULE CORDE TERMINALE

nombre de diagrammes  $C$  à  $n$  cordes avec  $t_1 \geq n$

= nombre de diagrammes à  $n$  cordes dont 1 seule terminale

= ?

# UNE SEULE CORDE TERMINALE

nombre de diagrammes  $C$  à  $n$  cordes avec  $t_1 \geq n$

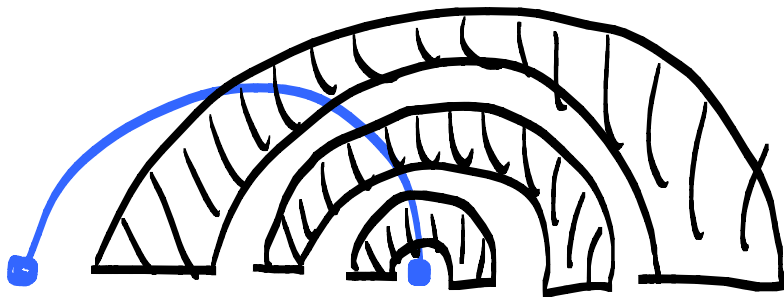
= nombre de diagrammes à  $n$  cordes dont 1 seule terminale

$$= (2n - 3)!!$$

# UNE SEULE CORDE TERMINALE

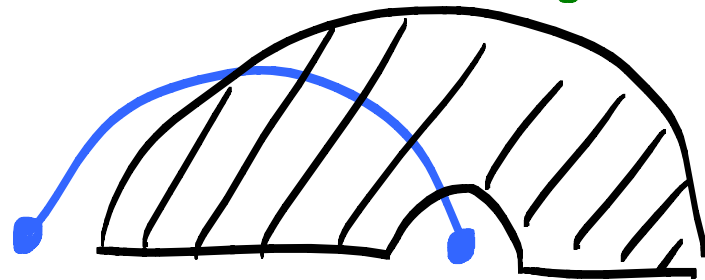
nombre de diagrammes  $C$  à  $n$  cordes avec  $t_1 \geq n$   
= nombre de diagrammes à  $n$  cordes dont 1 seule terminale  
=  $(2n - 3)!!$

Preuve:



↑  
impossible

1 seul bloc de taille  $n-1$



↑  
 $2n-3$  emplacements possibles

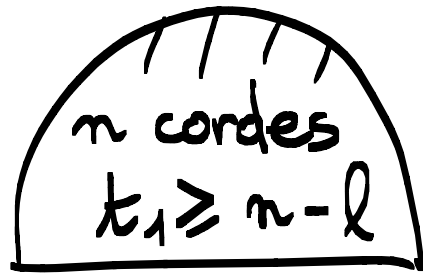
# FORME DES TERMES LOG-DOMINANTS

→ Il existe une relation de récurrence reliant les termes log-dominants

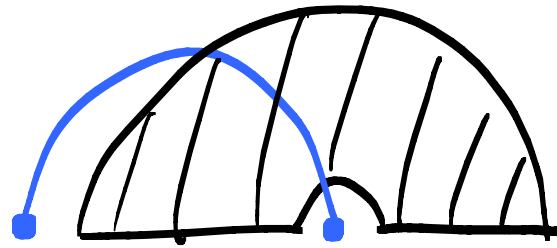
Théorème : Pour  $l \geq 0$ , le nombre de diagrammes  $C$  connexes à  $n$  cordes telle que la première corde terminale est à la position  $n-l$  est équivalent à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{l+1} l!} \times \frac{\ln(n)^l}{n! n^{\frac{3}{2}}}$$

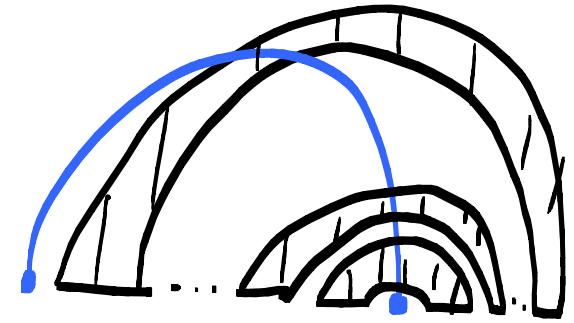
# RÉCURRENCE



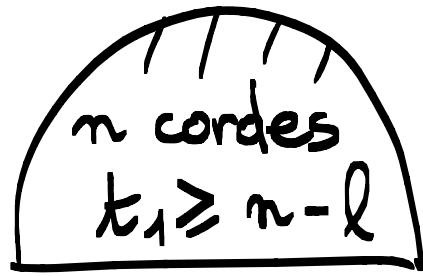
=



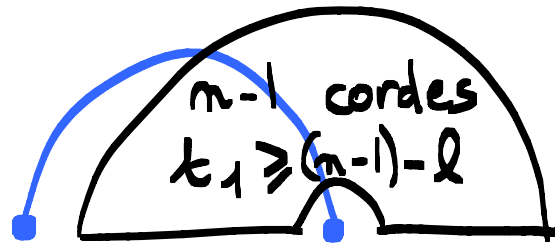
$\oplus$



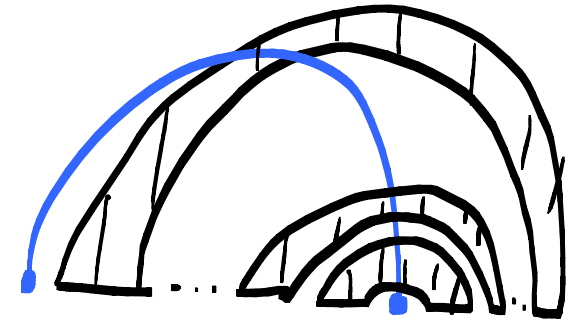
# RÉCURRENCE



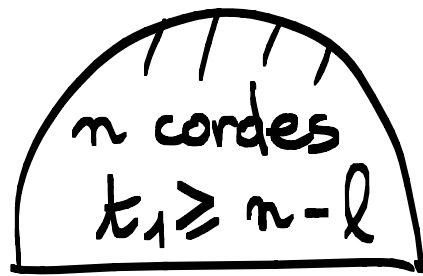
=



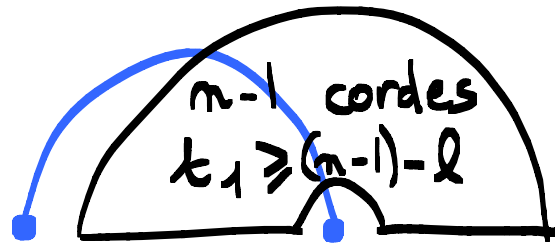
$\oplus$



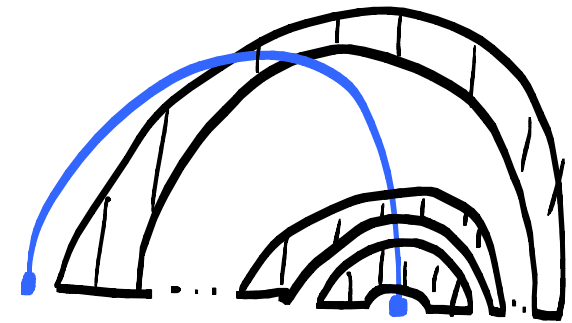
# RÉCURRENCE



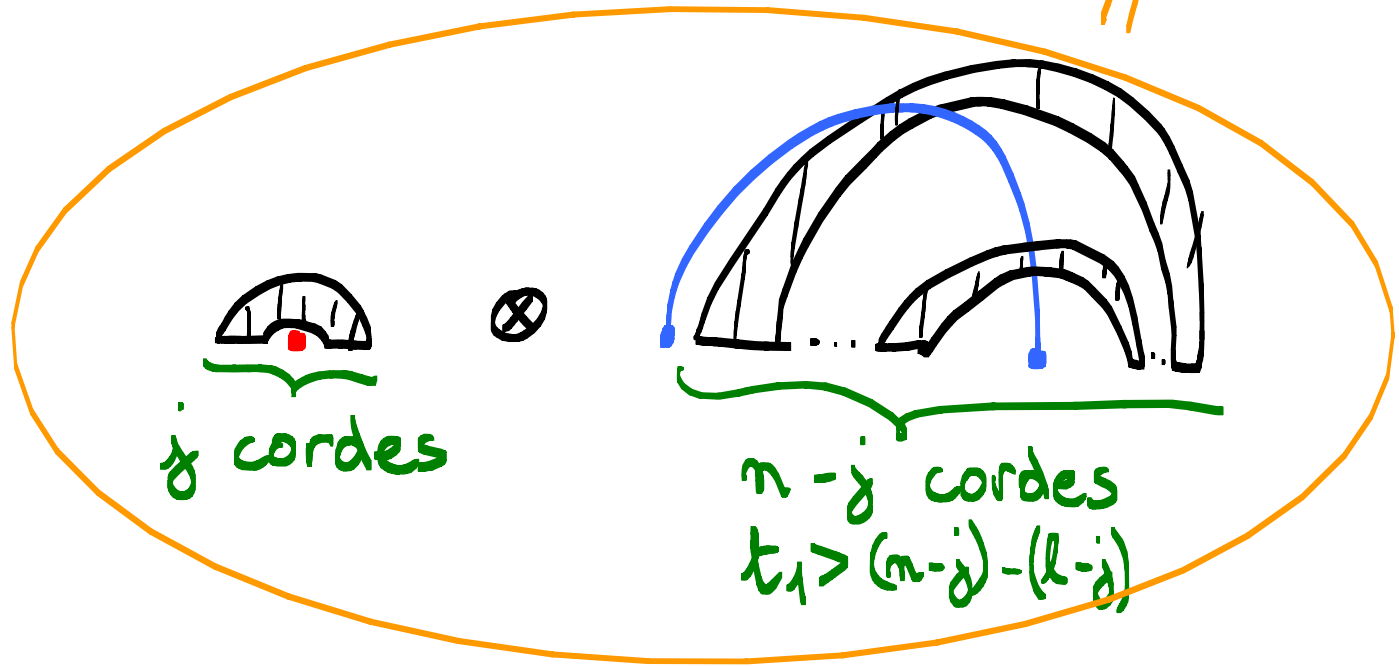
=



$\oplus$

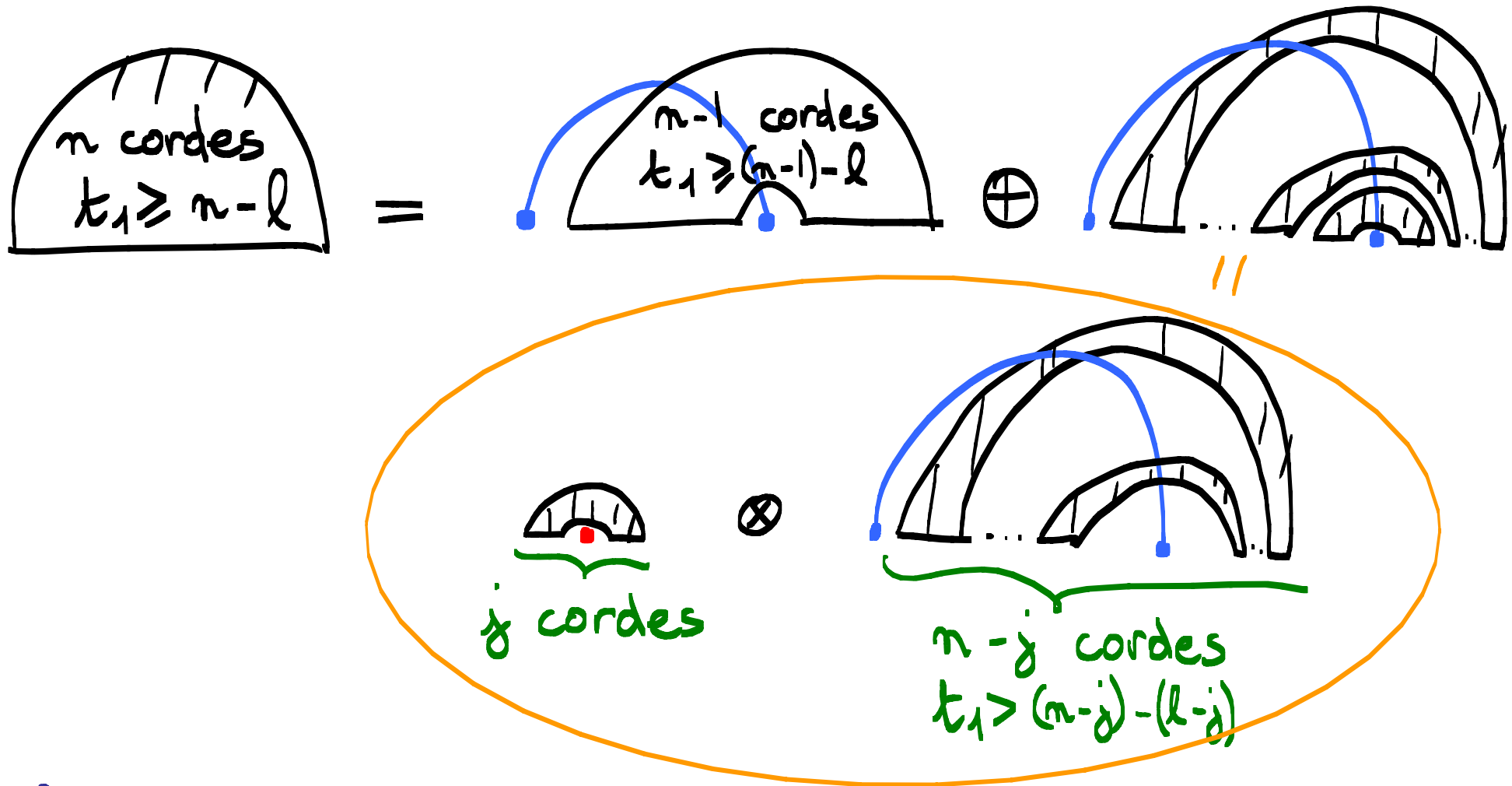


//





# RÉCURRENCE



$b_{n,l}$  = nbe de diagrammes connexes à  $n$  cordes  
 avec  $t_1 \geq n-l$

$$b_{n,l} = (2n-3) b_{n-1,l} + \sum_{j=1}^{\min(l, n-1)} (2j-1) c_j b_{n-j, l-j}$$

# NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

$C(z, u) =$  série génératrice (ordinaire)  
des diagrammes connexes  
avec un poids  $z$  par corde  
et un poids  $u$  par corde terminale

# NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

$C(z, u) =$  série génératrice (ordinaire)  
des diagrammes connexes  
avec un poids  $z$  par corde  
et un poids  $u$  par corde terminale

Spécification :



# NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

$C(z, u) =$  série génératrice (ordinaire)  
des diagrammes connexes  
avec un poids  $z$  par corde  
et un poids  $u$  par corde terminale

Spécification :

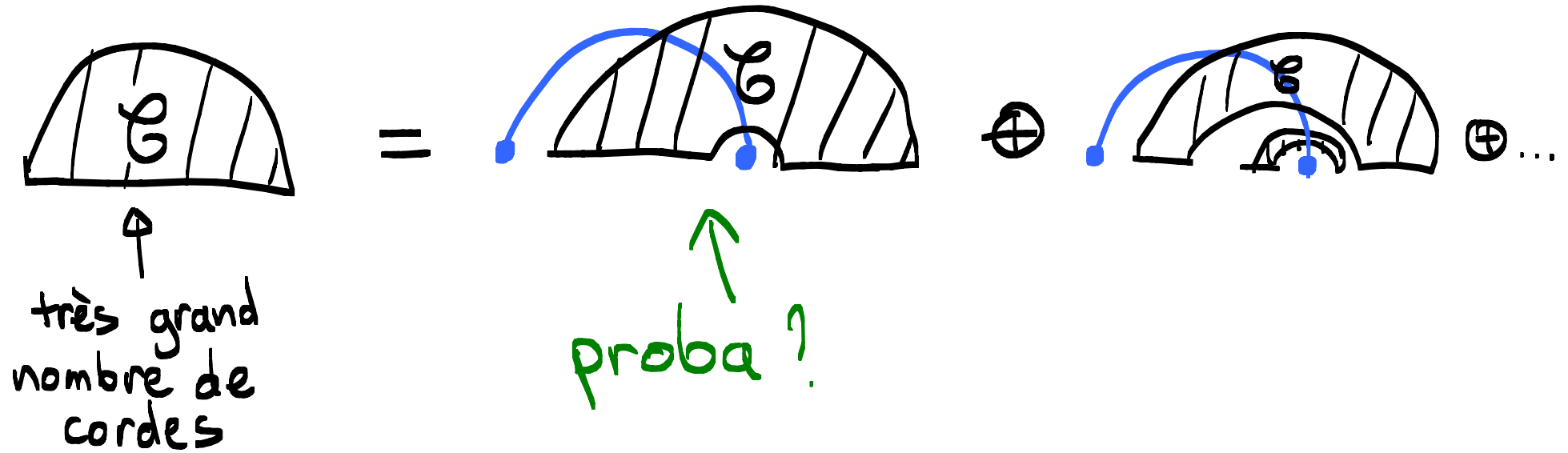


$$C(z, u) = z u + z \frac{2z \frac{\partial C}{\partial z}(z, u) - C(z, u)}{1 - 2z \frac{\partial C}{\partial z}(z, u) + C(z, u)}$$

impossible à résoudre?

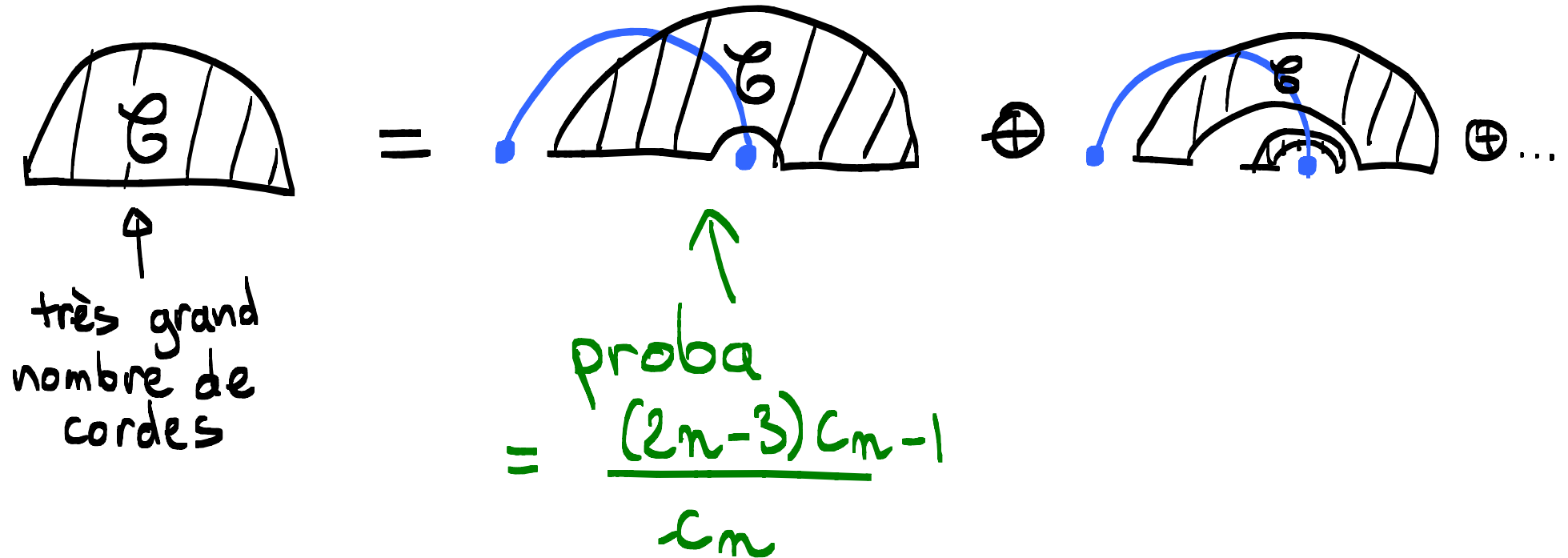
# NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Idée:



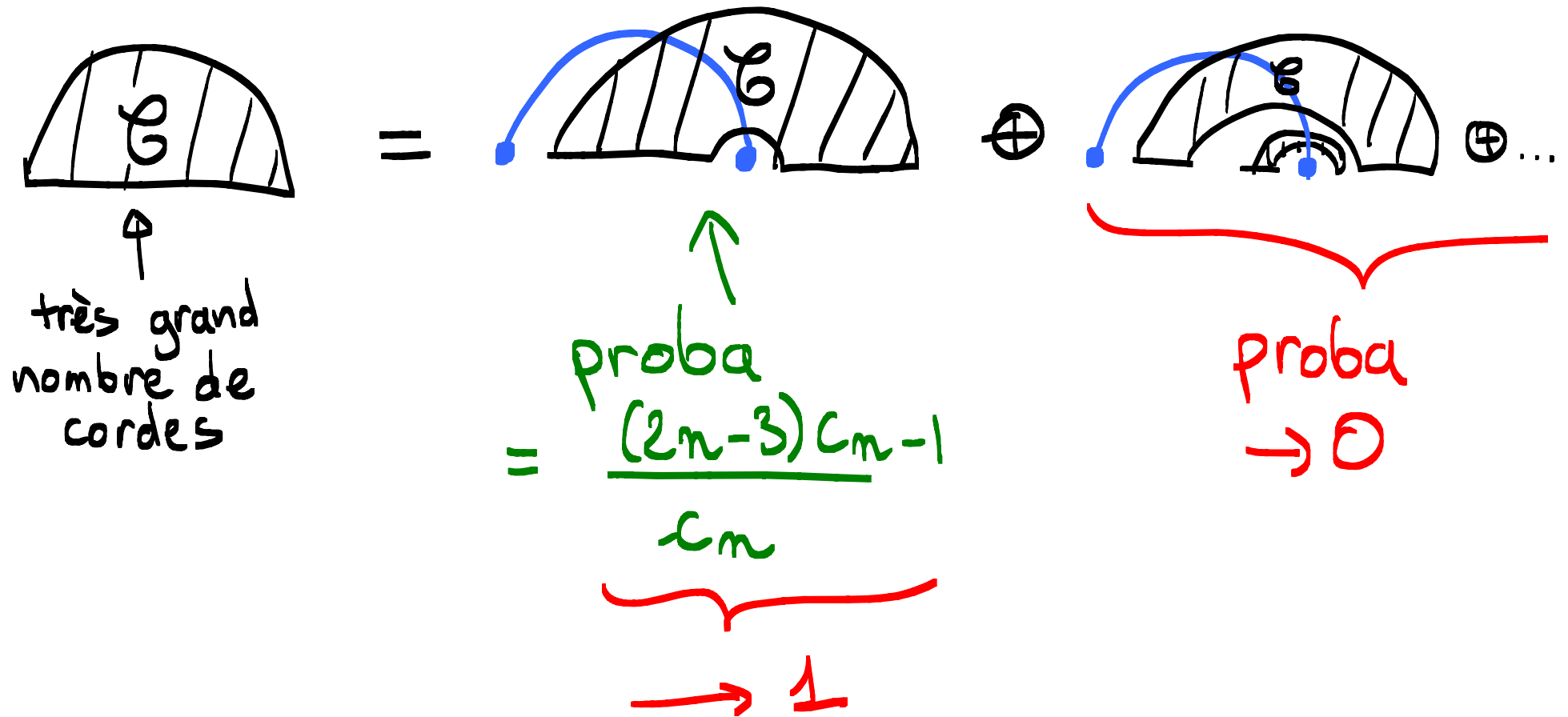
# NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Idée:



# NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

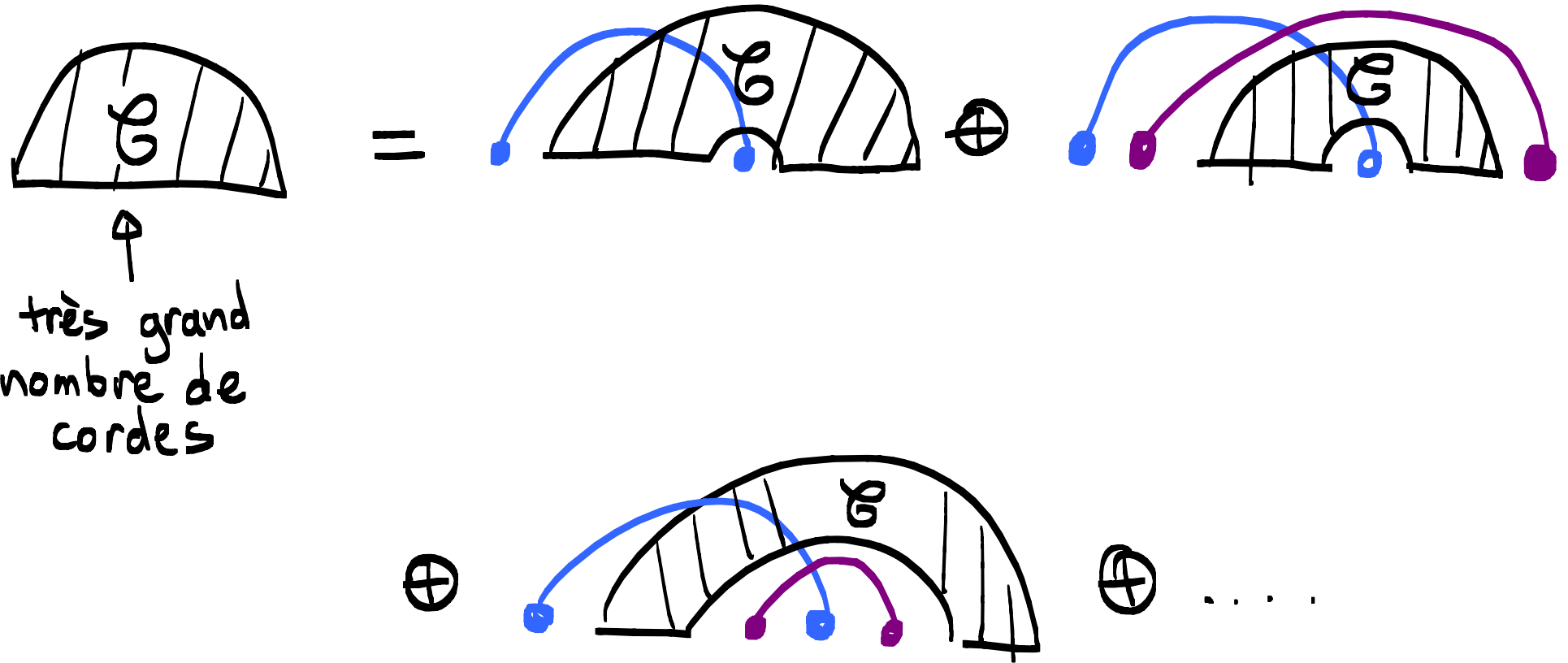
Idée:



Intéressant mais pas suffisant...

# NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

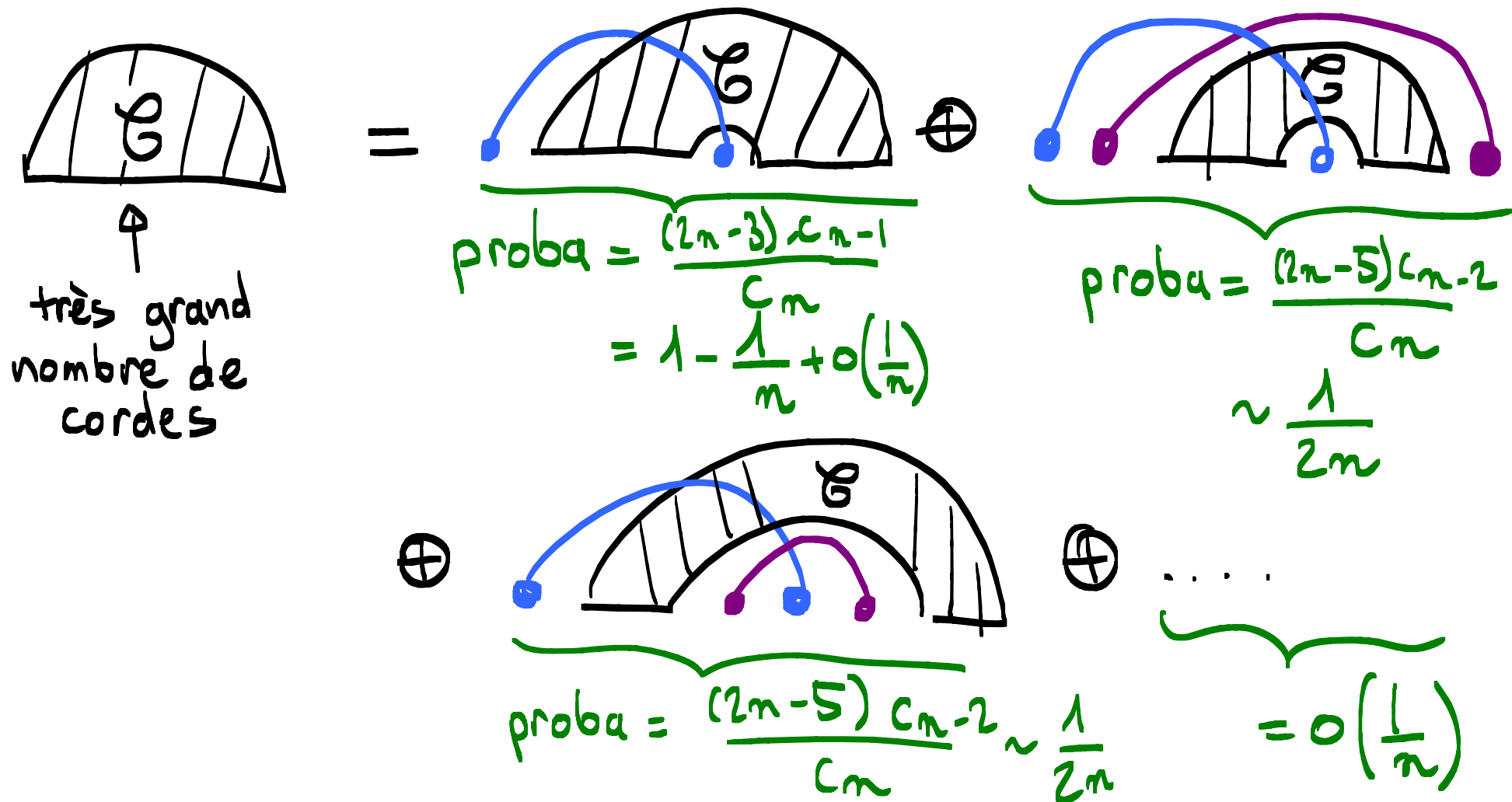
Idée:





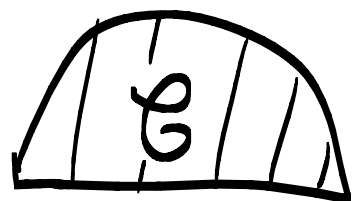
# NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Idée:

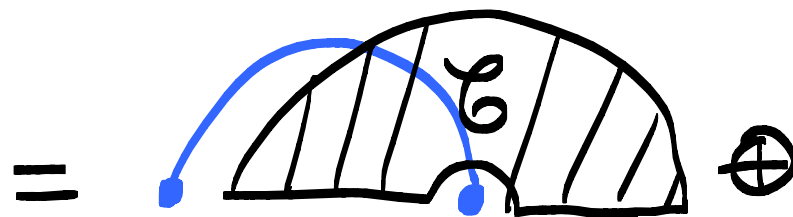


# NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

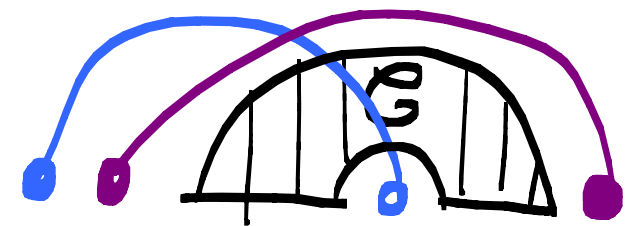
Idée:



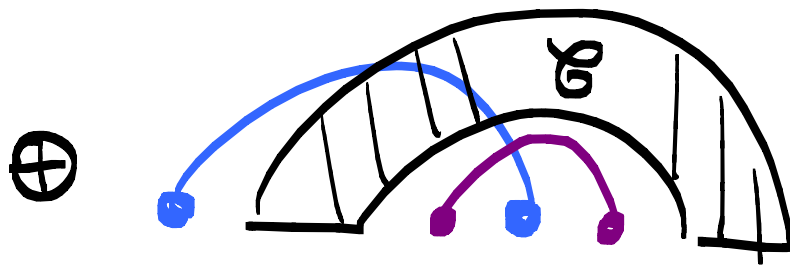
↑  
très grand  
nombre de  
cordes



$$\text{proba} = \frac{(2n-3)C_{n-1}}{C_n} \\ = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$



$$\text{proba} = \frac{(2n-5)C_{n-2}}{C_n} \\ \sim \frac{1}{2n}$$



$$\text{proba} = \frac{(2n-5)C_{n-2}}{C_n} \sim \frac{1}{2n}$$

⋮

~~$$= o\left(\frac{1}{n}\right)$$~~

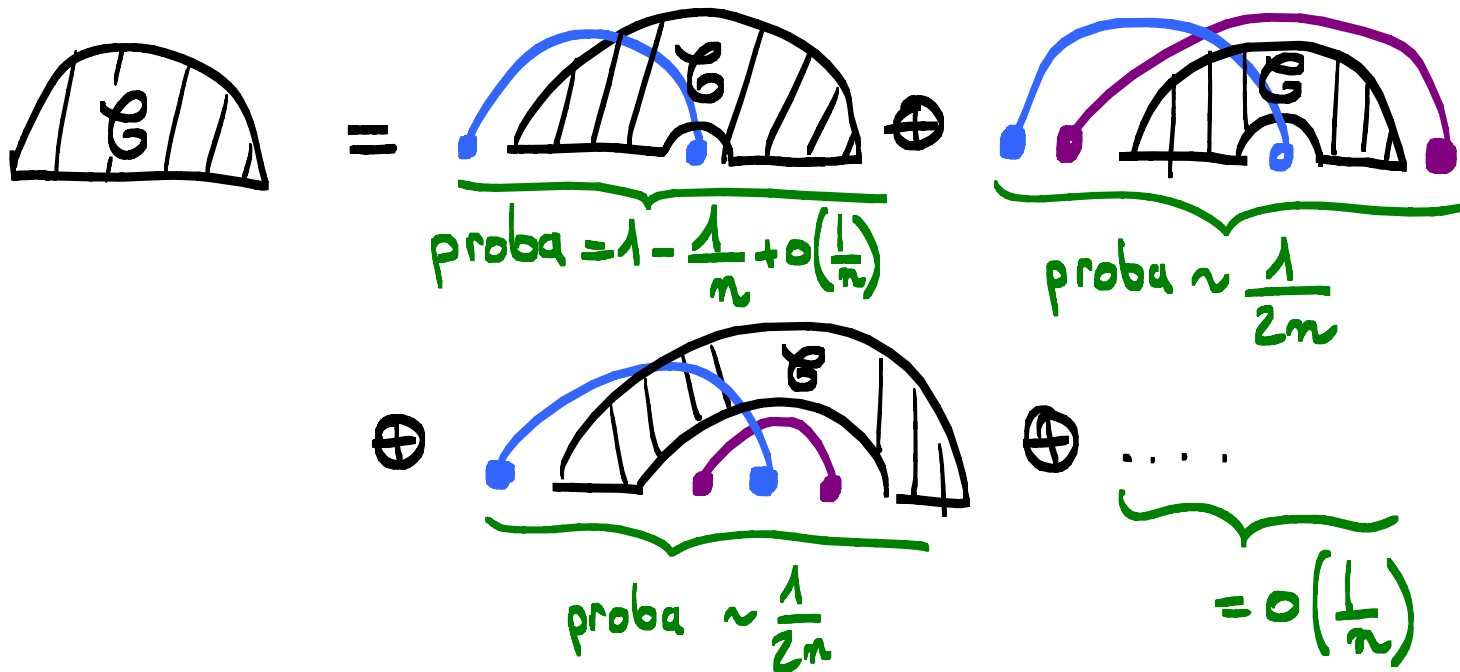
négligeons ça

# NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Idee: Posons

$$p_{m,k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) p_{m-1,k} + \frac{1}{n} p_{m-2,k-1}$$

Dans l'idée,  $n$  = nbe de cordes  
 $k$  = nbe de cordes terminales.



# NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Idée: Posons

$$p_{n,k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) p_{n-1,k} + \frac{1}{n} p_{n-2,k-1}$$

Résultat 1:  $\sum_{k=0}^n k p_{n,k} = \text{nbe moyen}$   
de cordes terminales  
 $+ o(\ln n)$

# NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Idée: Posons

$$p_{n,k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) p_{n-1,k} + \frac{1}{n} p_{n-2,k-1}$$

Résultat 1:  $\sum_{k=0}^n k p_{n,k} =$  nbe moyen  
de cordes terminales  
 $+ o(\ln n)$

Résultat 2:  $\sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n p_{n,k} x^n y^k$  est facile  
à calculer...

## NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Théorème: Le nombre moyen de cordes terminales dans un diagramme connexe est asymptotiquement équivalent à  $\ln(n)$ .

# NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Théorème: Le nombre moyen de cordes terminales dans un diagramme connexe est asymptotiquement équivalent à  $\ln(n)$ .

Conjectures: → La loi limite est gaussienne

$$\rightarrow [z^n] C(z, u) \sim C \frac{2^n}{n!} n^{u-\frac{3}{2}}$$

# NOMBRE DE CORDES TERMINALES ADJACENTES

cordes adjacentes = (corde position  $p$ , corde position  $p+1$ )

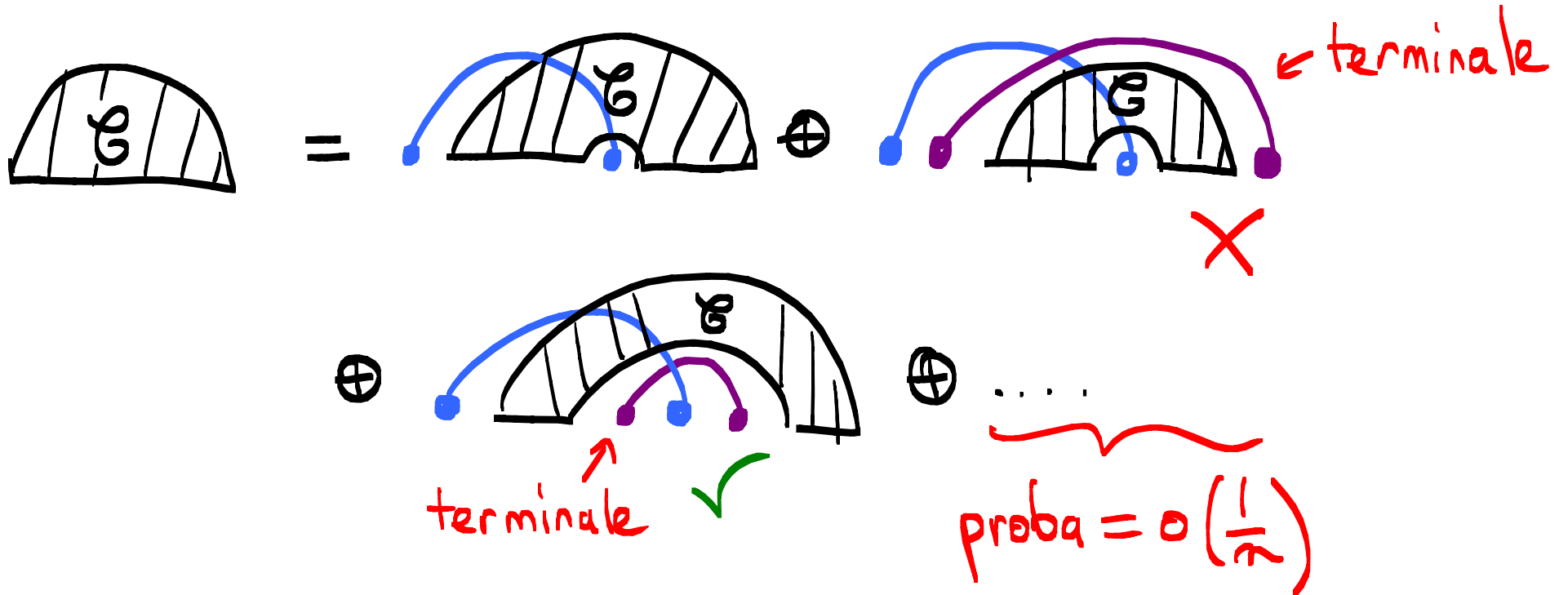
Question : nombre moyen de cordes terminales adjacentes?



# NOMBRE DE CORDES TERMINALES ADJACENTES

cordes adjacentes = (corde position  $p$ , corde position  $p+1$ )

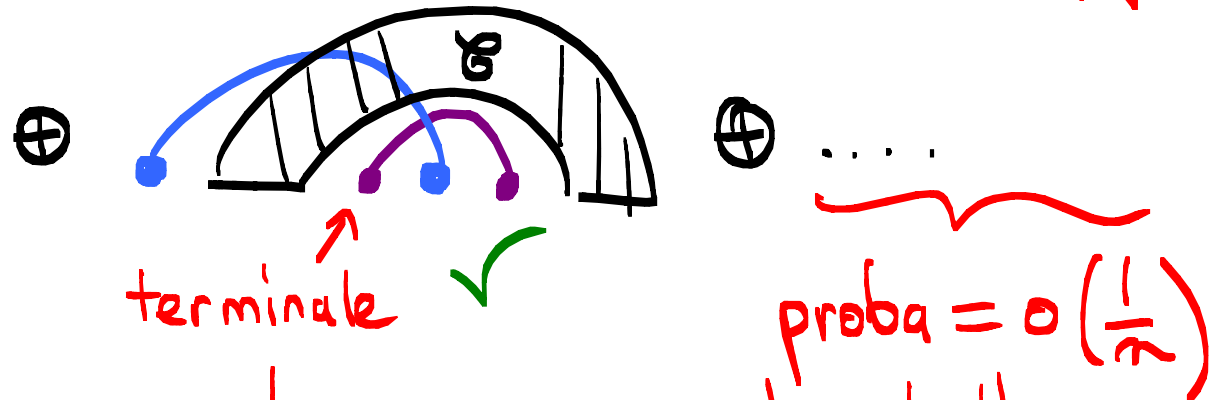
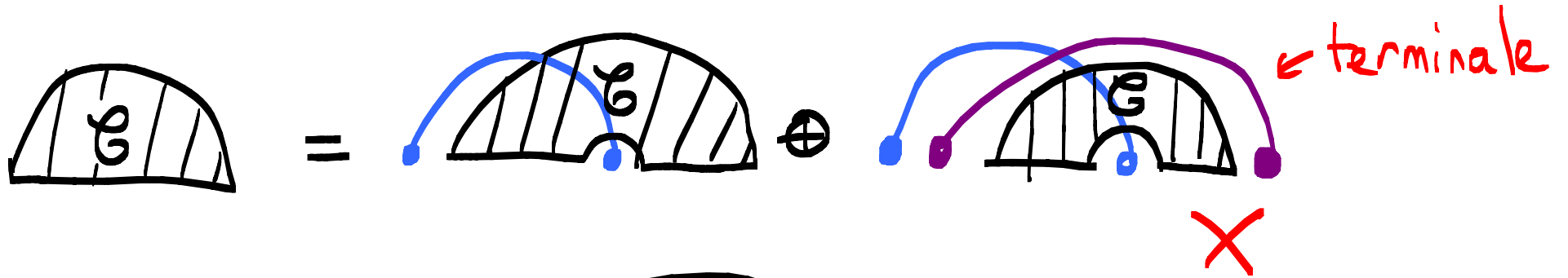
Question : nombre moyen de cordes terminales adjacentes?



# NOMBRE DE CORDES TERMINALES ADJACENTES

cordes adjacentes = (corde position  $p$ , corde position  $p+1$ )

Question : nombre moyen de cordes terminales adjacentes?



Théorème : nombre moyen de telles cordes  
 $\sim \frac{\ln(n)}{2}$

# POSITION DE LA PREMIÈRE CORDE TERMINALE

$t_1$  = v.a qui donne la position de la 1<sup>ère</sup> corde terminale

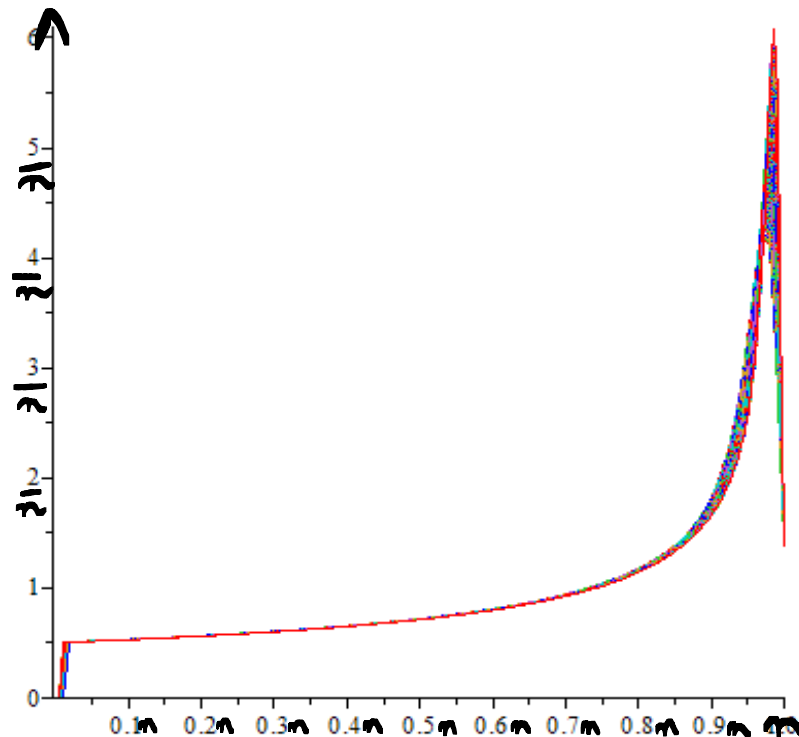
Théorème :  $E(t_1) \sim \frac{2}{3} n$

# POSITION DE LA PREMIÈRE CORDE TERMINALE

$t_1 = v.a$  qui donne la position de la 1<sup>ère</sup> corde terminale

Théorème :  $E(t_1) \sim \frac{2}{3} n$

Loi limite?



↑ écart avec 0

# CONCLUSION

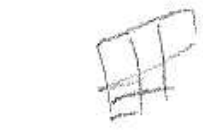
→ méthode pour obtenir les premiers moments  
mais quant aux lois??

→ les cordes terminales cachent-elles vraiment  
des composantes connexes?

Remarques/critiques bienvenues!

PUB

17.4.13.13.13.13



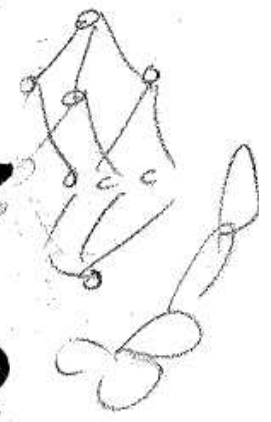
3



Combinatorics

$$(x^2, y) = \langle \dots \rangle \times \dots$$

$$\dots \in \mathbb{R}^n$$
$$\dots \in \mathbb{SO}(2)$$



Journées



Université de  
Vancouver

11-12 juillet 2016 - VANCOUVER  
(après FPSAC)