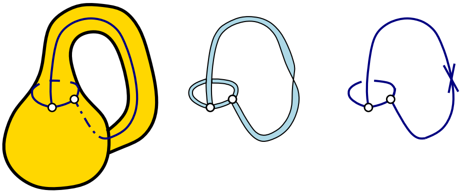
Structure des cartes non orientables à une face

COURTIEL Julien

ancien stagiaire de Guillaume CHAPUY, LIAFA,
nouveau doctorant de Mireille BOUQUET-MELOU, LaBRI.

Groupe de travail du 14 octobre 2011



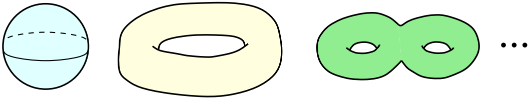
Classification des surfaces

Un théorème classique classifie les surfaces compactes connexes.

On différencie deux principales classes :

Un théorème classique classifie les surfaces compactes connexes.
On différencie deux principales classes :

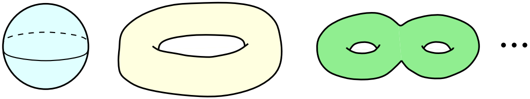
- les surfaces orientables, les tores à g trous,



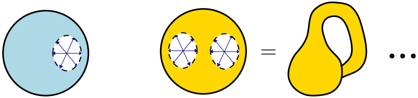
Classification des surfaces

Un théorème classique classifie les surfaces compactes connexes.
On différencie deux principales classes :

- les surfaces orientables, les tores à g trous,

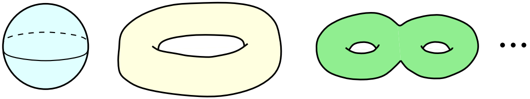


- les surfaces **non orientables**, les recollements de h plans projectifs.



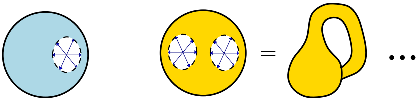
Un théorème classique classifie les surfaces compactes connexes. On différencie deux principales classes :

- les surfaces orientables, les tores à g trous,



  Le **genre** de la surface correspond ici au nombre de trous g.

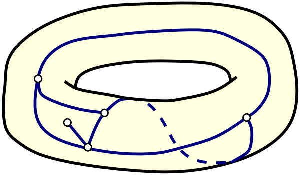
- les surfaces **non orientables**, les recollements de h plans projectifs.



  Le **genre** de la surface correspond ici à la moitié du nombre de plans projectifs, à savoir $\frac{h}{2}$.

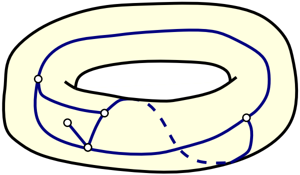
Définition approximative

Une carte combinatoire est un dessin de graphe sur une surface.



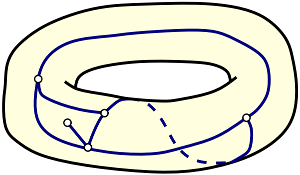
Définition

Une carte combinatoire est



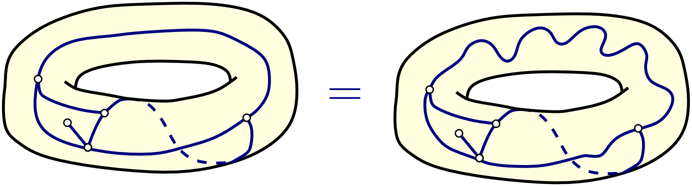
Définition

Une carte combinatoire est la donnée d'une surface compacte et d'un plongement cellulaire d'un graphe dans cette surface, le tout considéré à homéomorphisme orienté près.



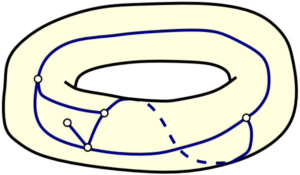
Définition

Une carte combinatoire est la donnée d'une surface compacte et d'un plongement cellulaire d'un graphe dans cette surface, le tout considéré à homéomorphisme orienté près.

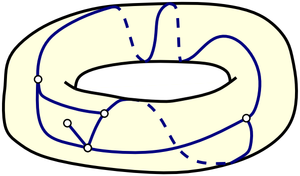


Définition

Une carte combinatoire est la donnée d'une surface compacte et d'un plongement cellulaire d'un graphe dans cette surface, le tout considéré à homéomorphisme orienté près.

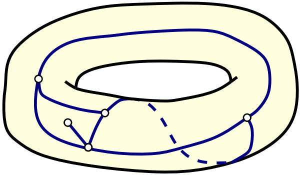


$=$

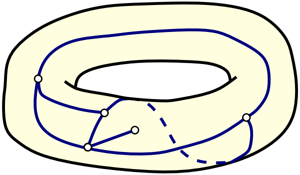


Définition

Une carte combinatoire est la donnée d'une surface compacte et d'un plongement cellulaire d'un graphe dans cette surface, le tout considéré à homéomorphisme orienté près.

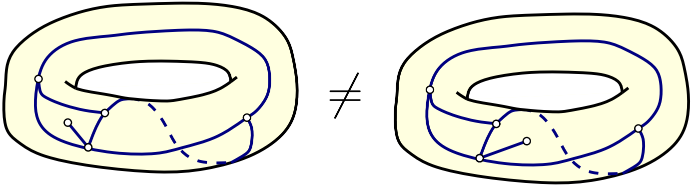


$\neq$



Définition

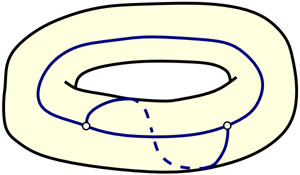
Une carte combinatoire est la donnée d'une surface compacte et d'un plongement cellulaire d'un graphe dans cette surface, le tout considéré à homéomorphisme orienté près.



Une **face** est une composante connexe de la surface privée du plongement du graphe.

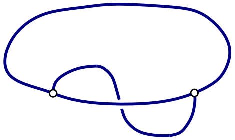
Commençons par **les surfaces orientables**.

On peut "oublier" la surface. Il suffit de garder en mémoire le graphe sous-jacent + l'ordre des arêtes autour de chaque sommet.



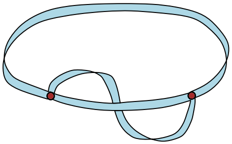
Commençons par **les surfaces orientables**.

On peut "oublier" la surface. Il suffit de garder en mémoire le graphe sous-jacent + l'ordre des arêtes autour de chaque sommet.



Commençons par **les surfaces orientables**.

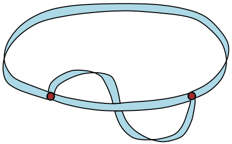
On peut "oublier" la surface. Il suffit de garder en mémoire le graphe sous-jacent + l'ordre des arêtes autour de chaque sommet.

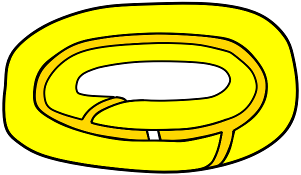


Pour retrouver la carte originelle, on peut transformer chaque arête en ruban ; puis on recolle des disques le long des bords de ces rubans.

Commençons par **les surfaces orientables**.

On peut "oublier" la surface. Il suffit de garder en mémoire le graphe sous-jacent + l'ordre des arêtes autour de chaque sommet.

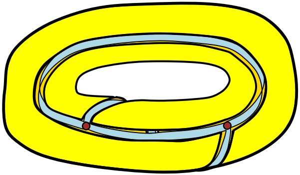




Pour retrouver la carte originelle, on peut transformer chaque arête en ruban ; puis on recolle des disques le long des bords de ces rubans.

Commençons par **les surfaces orientables**.

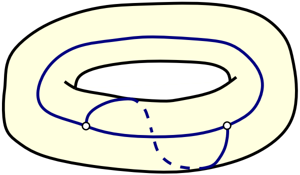
On peut "oublier" la surface. Il suffit de garder en mémoire le graphe sous-jacent + l'ordre des arêtes autour de chaque sommet.



Pour retrouver la carte originelle, on peut transformer chaque arête en ruban ; puis on recolle des disques le long des bords de ces rubans.

Commençons par **les surfaces orientables**.

On peut "oublier" la surface. Il suffit de garder en mémoire le graphe sous-jacent + l'ordre des arêtes autour de chaque sommet.

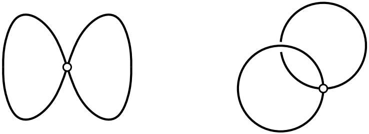


Pour retrouver la carte originelle, on peut transformer chaque arête en ruban ; puis on recolle des disques le long des bords de ces rubans.

Théorème (*Embedding Theorem*)

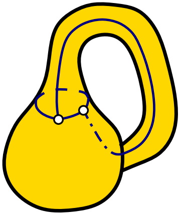
Carte combinatoire **orientable** = donnée d'un graphe + ordre des arêtes autour de chaque sommet

Par exemple, ces deux cartes sont **différentes** :



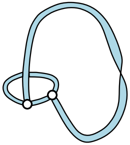
Intéressons-nous maintenant aux **surfaces *non* orientables**. Des informations supplémentaires sont nécessaires.

Considérons cette carte sur la bouteille de Klein :



Intéressons-nous maintenant aux **surfaces *non* orientables**. Des informations supplémentaires sont nécessaires.

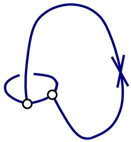
Considérons cette carte sur la bouteille de Klein :



On peut découper la carte au voisinage du graphe. On obtient un ruban tordu tel un ruban de Möbius.

Intéressons-nous maintenant aux **surfaces *non* orientables**. Des informations supplémentaires sont nécessaires.

Considérons cette carte sur la bouteille de Klein :

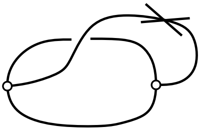


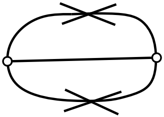
On obtient alors un graphe, où les arêtes tordues ont été marquées par une croix. De telles arêtes sont appelées **twists**.

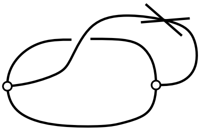
Théorème

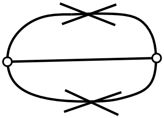
La donnée d'un graphe + ordre des arêtes autour de chaque sommet + ensemble d'arêtes "twists" forme une carte (orientable ou non).
Toute carte peut être obtenue de cette manière. Ceci permet de dessiner toute carte selon une représentation dite par brins.
Deux représentations induisent la même carte ssi on peut obtenir l'une à partir de l'autre par retournements de sommets.

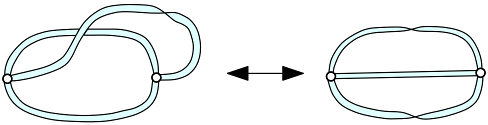
Voici deux représentations d'une même carte :

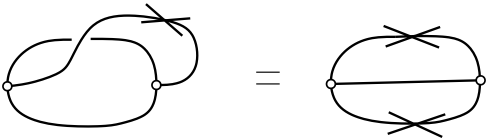


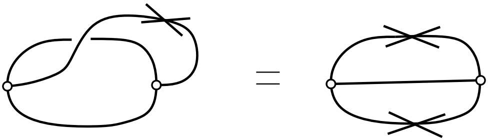








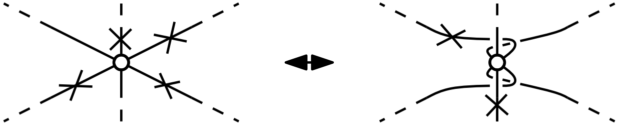


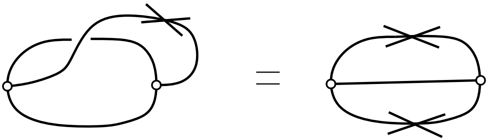


Étant donnée une représentation en brins, le **retournement d'un sommet** consiste :

-

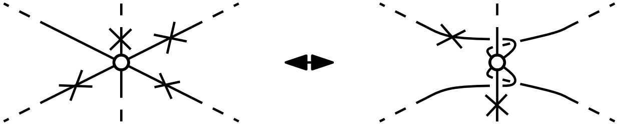
-

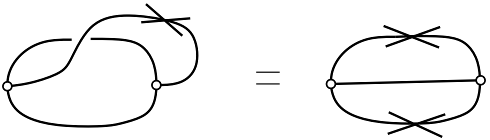




Étant donnée une représentation en brins, le **retournement d'un sommet** consiste :

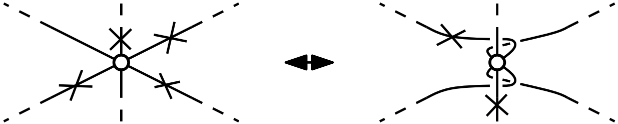
- à inverser l'ordre cyclique des demi-arêtes incidentes à ce sommet,
-





Étant donnée une représentation en brins, le **retournement d'un sommet** consiste :

- à inverser l'ordre cyclique des demi-arêtes incidentes à ce sommet,
- à changer le statut twist/non twist de toutes les arêtes incidentes qui ne sont pas des boucles.

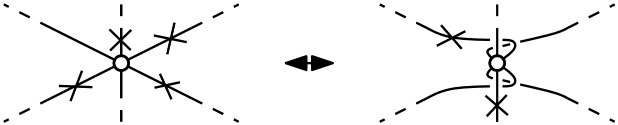


Théorème

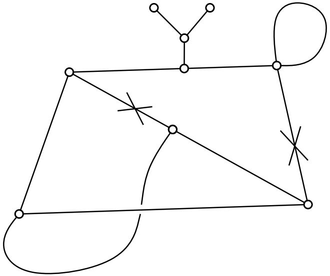
Deux représentations induisent la même carte ssi on peut obtenir l'une à partir de l'autre par retournements de sommets.

Étant donnée une représentation en brins, le **retournement d'un sommet** consiste :

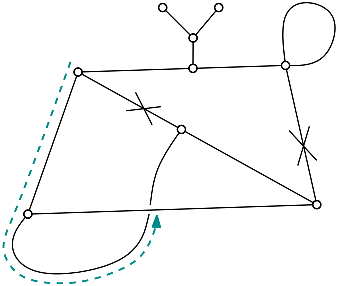
- à inverser l'ordre cyclique des demi-arêtes incidentes à ce sommet,
- à changer le statut twist/non twist de toutes les arêtes incidentes qui ne sont pas des boucles.



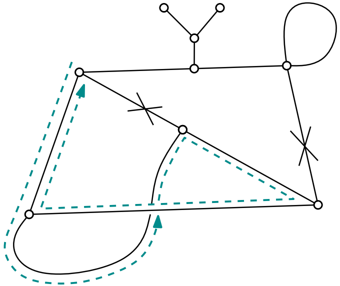
Combien de faces pour cette carte ?



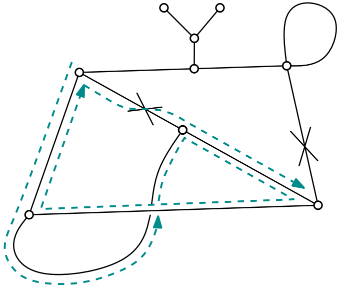
Combien de faces pour cette carte ?



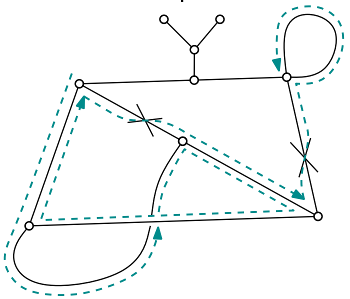
Combien de faces pour cette carte ?



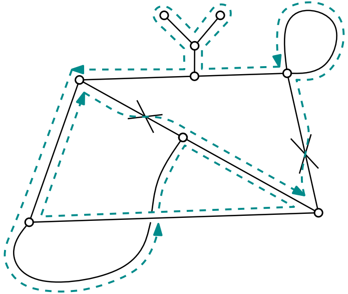
Combien de faces pour cette carte ?



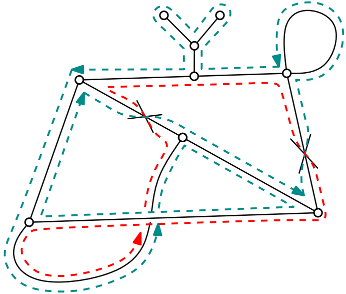
Combien de faces pour cette carte ?



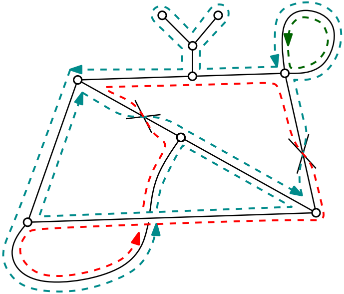
Combien de faces pour cette carte ?



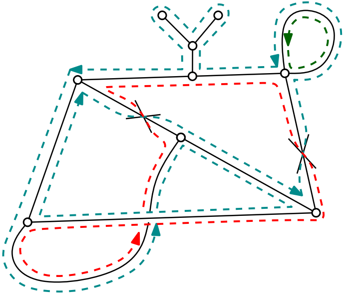
Combien de faces pour cette carte ?



Combien de faces pour cette carte ?

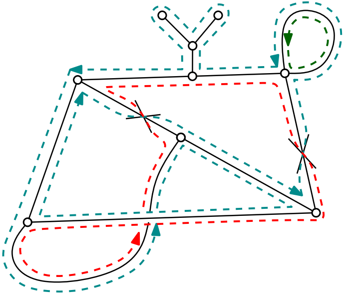


Combien de faces pour cette carte ?



$\hookrightarrow$ 3 faces

Combien de faces pour cette carte ?



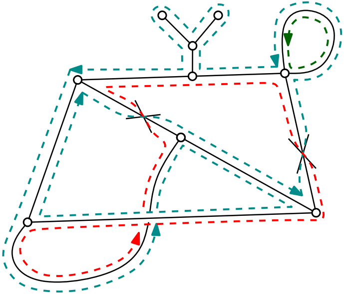
$\hookrightarrow$ 3 faces

Relation d'Euler

Considérons une carte de genre g à s sommets, n arêtes et f faces. Alors :

$$s - n + f = 2 - 2g.$$

Combien de faces pour cette carte ?



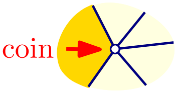
9 sommets, 12 arêtes et 3 faces $\Longrightarrow$ genre 1

Relation d'Euler

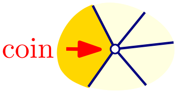
Considérons une carte de genre g à s sommets, n arêtes et f faces. Alors :

$$s - n + f = 2 - 2g.$$

Un **coin** dans une carte est un secteur angulaire (local) déterminé par un sommet et deux demi-arêtes consécutives.
Deux coins sont dits **adjacents** s'ils partagent une demi-arête en commun.

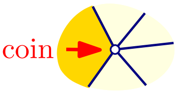


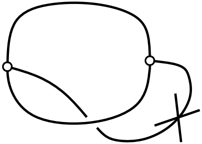
Un **coin** dans une carte est un secteur angulaire (local) déterminé par un sommet et deux demi-arêtes consécutives.
Deux coins sont dits **adjacents** s'ils partagent une demi-arête en commun.



Une carte est dite **enracinée** lorsqu'on a distingué sur cette carte un coin appelé **coin-racine ou racine**. Afin de le représenter, on insérera ce symbole ⺌ à l'endroit où se trouve le coin-racine.

Un **coin** dans une carte est un secteur angulaire (local) déterminé par un sommet et deux demi-arêtes consécutives.
Deux coins sont dits **adjacents** s'ils partagent une demi-arête en commun.

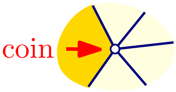


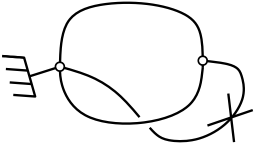


Une carte est dite **enracinée** lorsqu'on a distingué sur cette carte un coin appelé **coin-racine ou racine**. Afin de le représenter, on insérera ce symbole ⧣ à l'endroit où se trouve le coin-racine.

Représentation en brins
Coin, enracinement

Un **coin** dans une carte est un secteur angulaire (local) déterminé par un sommet et deux demi-arêtes consécutives.
Deux coins sont dits **adjacents** s'ils partagent une demi-arête en commun.





Une carte est dite **enracinée** lorsqu'on a distingué sur cette carte un coin appelé **coin-racine ou racine**. Afin de le représenter, on insérera ce symbole à l'endroit où se trouve le coin-racine.

Objectif du stage

<u>But du stage de M2 :</u> Énumérer de manière bijective les cartes (enracinées) non orientables à une face selon le nombre d'arêtes où le genre est fixé.

On cherchera notamment à trouver une relation de récurrence exprimant le nombre de cartes non orientables de genre fixé en fonction des nombres de cartes de genre inférieur.

Méthodes non bijectives pour les cartes non orientables à une face (qui permettent de calculer les fonctions génératrices) :

- Bender et Canfield (1991) ; méthode récursive, "à la Tutte".
- Goulden et Jackson (1997) ; intégrales de matrice.

Méthodes bijectives (recollement de sommets) :

- Chapuy (2009) ; cartes orientables.
- Bernardi et Chapuy (2011) ; cartes non orientables précubiques (i.e. tous les sommets sont de degré 1 ou 3.).

Objectif : Généraliser les deux dernières méthodes.

Méthodes non bijectives pour les cartes non orientables à une face (qui permettent de calculer les fonctions génératrices) :

- Bender et Canfield (1991) ; méthode récursive, "à la Tutte".
- Goulden et Jackson (1997) ; intégrales de matrice.

Méthodes bijectives (recollement de sommets) :

- Chapuy (2009) ; cartes orientables.
- Bernardi et Chapuy (2011) ; cartes non orientables précubiques (i.e. tous les sommets sont de degré 1 ou 3.).

Objectif : Généraliser les deux dernières méthodes.

Méthodes non bijectives pour les cartes non orientables à une face (qui permettent de calculer les fonctions génératrices) :

- Bender et Canfield (1991) ; méthode récursive, "à la Tutte".
- Goulden et Jackson (1997) ; intégrales de matrice.

Méthodes bijectives (recollement de sommets) :

- Chapuy (2009) ; cartes orientables.
- Bernardi et Chapuy (2011) ; cartes non orientables précubiques (i.e. tous les sommets sont de degré 1 ou 3.).

Objectif : Généraliser les deux dernières méthodes.

Méthodes non bijectives pour les cartes non orientables à une face (qui permettent de calculer les fonctions génératrices) :

- Bender et Canfield (1991) ; méthode récursive, "à la Tutte".
- Goulden et Jackson (1997) ; intégrales de matrice.

Méthodes bijectives (recollement de sommets) :

- Chapuy (2009) ; cartes orientables.
- Bernardi et Chapuy (2011) ; cartes non orientables précubiques (i.e. tous les sommets sont de degré 1 ou 3.).

Objectif : Généraliser les deux dernières méthodes.

Les séries génératrices

Cas orientable :

Cas non orientable :

- $\delta = \sqrt{1-4x}$
- $M_g =$ série génératrice de cartes orientables à une face de genre g selon le nombre d'arêtes
- $N_g =$ série génératrice de cartes non orientables à une face de genre g selon le nombre d'arêtes

Les séries génératrices

Cas orientable :

$$M_0 = \frac{2}{\delta + 1}$$

$$M_1 = \frac{(\delta - 1)^2(\delta + 1)^2}{16\delta^5}$$

$$M_2 = \frac{-21(\delta - 1)^4(\delta + 1)^4(\delta^2 - 5)}{1024\delta^{11}}$$

Cas non orientable :

- $\delta = \sqrt{1 - 4x}$
- M_g = série génératrice de cartes orientables à une face de genre g selon le nombre d'arêtes
- N_g = série génératrice de cartes non orientables à une face de genre g selon le nombre d'arêtes

Les séries génératrices

Cas orientable :

$$M_0 = \frac{2}{\delta + 1}$$

$$M_1 = \frac{(\delta-1)^2(\delta+1)^2}{16\delta^5}$$

$$M_2 = \frac{-21(\delta-1)^4(\delta+1)^4(\delta^2-5)}{1024\delta^{11}}$$

Cas non orientable :

$$N_{\frac{1}{2}} = \frac{1-\delta}{2\delta^2}$$

$$N_1 = \frac{(\delta-1)^2(\delta+1)(\delta+3)}{8\delta^5}$$

$$N_{\frac{3}{2}} = \frac{(\delta-1)^3(\delta+1)^2(11\delta^2-29\delta-64)}{64\delta^8}$$

- $\delta = \sqrt{1-4x}$
- M_g = série génératrice de cartes orientables à une face de genre g selon le nombre d'arêtes
- N_g = série génératrice de cartes non orientables à une face de genre g selon le nombre d'arêtes

Les cardinaux

Cas orientable :

Cas non orientable :

- $Cat(n) := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ = nombre de Catalan
- $\epsilon_g(n)$ = nombre de cartes orientables à une face de genre g à n arêtes
- $\nu_g(n)$ = nombre de cartes non orientables à une face de genre g à n arêtes

Cas orientable :

$$\epsilon_0(n) = Cat(n)$$

$$\epsilon_1(n) = \frac{(n+1)n(n-1)}{12} Cat(n)$$

$$\epsilon_2(n) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(5n-2)}{1440} Cat(n)$$

Cas non orientable :

- $Cat(n) := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ = nombre de Catalan
- $\epsilon_g(n)$ = nombre de cartes orientables à une face de genre g à n arêtes
- $\nu_g(n)$ = nombre de cartes non orientables à une face de genre g à n arêtes

Cas orientable :

$$\epsilon_0(n) = Cat(n)$$

$$\epsilon_1(n) = \frac{(n+1)n(n-1)}{12} Cat(n)$$

$$\epsilon_2(n) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(5n-2)}{1440} Cat(n)$$

Cas non orientable :

$$\nu_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{1}{2}4^n - \binom{2n-1}{n}$$

$$\nu_1(n) = \frac{n^2}{2}\binom{2n}{n} - \frac{n}{4}4^n$$

$$\nu_{\frac{3}{2}} = \frac{n(n-1)(8n-7)}{48}4^n - \frac{n(n-1)(7n-2)}{24}\binom{2n}{n}$$

- $Cat(n) := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ = nombre de Catalan
- $\epsilon_g(n)$ = nombre de cartes orientables à une face de genre g à n arêtes
- $\nu_g(n)$ = nombre de cartes non orientables à une face de genre g à n arêtes

Cas orientable :

$$2g\epsilon_g(n) = \binom{n+3-2g}{3}\epsilon_{g-1}(n) + \binom{n+5-2g}{5}\epsilon_{g-2}(n) + \dots$$

Cas non orientable précubique :

$$(2g-1)\nu_g^{pc}(n-2) = 4\binom{n}{3}\nu_{g-1}^{pc}(n) + 3\binom{n}{3}\epsilon_{g-1}^{pc}(n)$$

Aucune relation de récurrence n'est connue à notre connaissance pour le cas général non orientable.

- $\epsilon_g(n)$ = nombre de cartes orientables à une face de genre g à n arêtes
- $\epsilon_g^{pc}(n)$ = nombre de cartes orientables précubiques à une face de genre g à n arêtes
- $\nu_g^{pc}(n)$ = nombre de cartes non orientables précubiques à une face de genre g à n arêtes

Ce que j'ai effectué lors du stage :

1. Découverte de bijections pour les cartes de genre $\frac{1}{2}$ (plan projectif), qui expliquent les relations

$$N_{\frac{1}{2}} = \frac{1-\delta}{2\delta^2}$$

et

$$\nu_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{1}{2}4^n - \binom{2n-1}{n}.$$

2. Définition et étude des entrelacements (principale piste exploitée).
3. Découverte d'une bijection pour les cartes de genre 1 (bouteille de Klein), qui justifie l'égalité

$$N_1 = \frac{(\delta-1)^2(\delta+1)(\delta+3)}{8\delta^5}.$$

Ce que j'ai effectué lors du stage :

1. Découverte de bijections pour les cartes de genre $\frac{1}{2}$ (plan projectif), qui expliquent les relations

$$N_{\frac{1}{2}} = \frac{1-\delta}{2\delta^2}$$

et

$$\nu_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{1}{2}4^n - \binom{2n-1}{n}.$$

2. Définition et étude des entrelacements (principale piste exploitée).
3. Découverte d'une bijection pour les cartes de genre 1 (bouteille de Klein), qui justifie l'égalité

$$N_1 = \frac{(\delta-1)^2(\delta+1)(\delta+3)}{8\delta^5}.$$

Les principales "découvertes"

Ce que j'ai effectué lors du stage :

1. Découverte de bijections pour les cartes de genre $\frac{1}{2}$ (plan projectif), qui expliquent les relations

$$N_{\frac{1}{2}} = \frac{1-\delta}{2\delta^2}$$

et

$$\nu_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{1}{2}4^n - \binom{2n-1}{n}.$$

2. Définition et étude des entrelacements (principale piste exploitée).
3. Découverte d'une bijection pour les cartes de genre 1 (bouteille de Klein), qui justifie l'égalité

$$N_1 = \frac{(\delta-1)^2(\delta+1)(\delta+3)}{8\delta^5}.$$

Ce que j'ai effectué lors du stage :

1. Découverte de bijections pour les cartes de genre $\frac{1}{2}$ (plan projectif), qui expliquent les relations
$$N_{\frac{1}{2}} = \frac{1-\delta}{2\delta^2}$$
et
$$\nu_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{1}{2}4^n - \binom{2n-1}{n}.$$
$\hookrightarrow$ suite de l'exposé
2. Définition et étude des entrelacements (principale piste exploitée).
3. Découverte d'une bijection pour les cartes de genre 1 (bouteille de Klein), qui justifie l'égalité
$$N_1 = \frac{(\delta-1)^2(\delta+1)(\delta+3)}{8\delta^5}.$$

Bijections pour le plan projectif

À quoi ressemble une carte à une face sur le plan projectif ?

Bijections pour le plan projectif

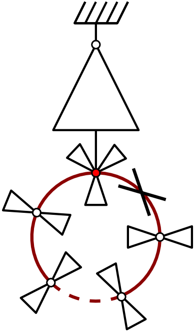
À quoi ressemble une carte à une face sur le plan projectif ?
D'après la relation d'Euler, le nombre de sommets est égal au nombre d'arêtes.

À quoi ressemble une carte à une face sur le plan projectif ?

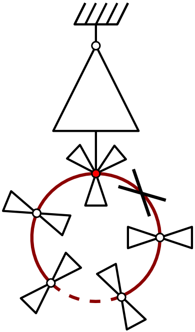
D'après la relation d'Euler, le nombre de sommets est égal au nombre d'arêtes.

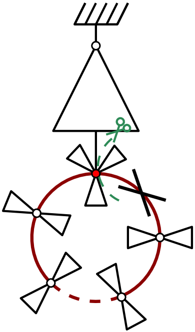
Par conséquent, le graphe sous-jacent admet un unique cycle.

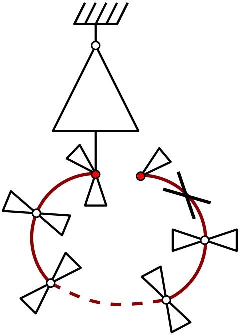
Ainsi, à retournements de sommets près, toute carte à une face du plan projectif est de la forme :

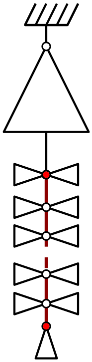


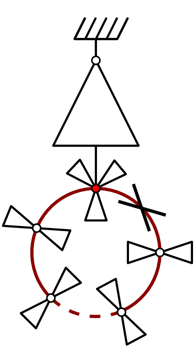
où chaque triangle représente un arbre plan enraciné.



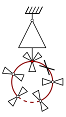
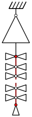




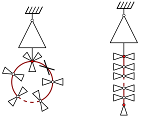




$\hookrightarrow$ Bijection avec les arbres plans avec deux noeuds marqués tels qu'un des deux noeuds est descendant (strict) de l'autre.

$\hookrightarrow$ Bijection avec les arbres plans avec deux noeuds marqués tels qu'un des deux noeuds est descendant (strict) de l'autre.



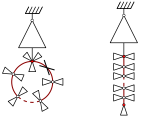
$\hookrightarrow$ Bijection avec les arbres plans avec deux noeuds marqués tels qu'un des deux noeuds est descendant (strict) de l'autre.

Première bijection

Le nombre de cartes du plan projectif à une face est égal à :

$$p_n = \sum_{\tau \text{arbre plan}} lc(\tau),$$

où $lc(\tau)$ est la longueur de cheminement de τ, c'est-à-dire la somme des profondeurs pour tous les noeuds de τ.



$\hookrightarrow$ Bijection avec les arbres plans avec deux noeuds marqués tels qu'un des deux noeuds est descendant (strict) de l'autre.

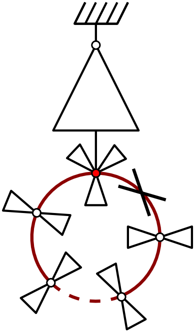
Première bijection

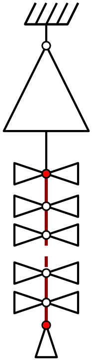
Le nombre de cartes du plan projectif à une face est égal à :

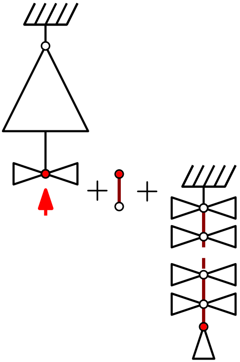
$$p_n = \sum_{\tau \text{arbre plan}} lc(\tau),$$

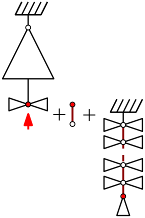
où $lc(\tau)$ est la longueur de cheminement de τ, c'est-à-dire la somme des profondeurs pour tous les noeuds de τ.

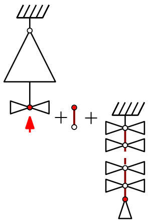
Fait de manière non bijective dans Flajolet et Sedgewick.











Deuxième bijection

La fonction génératrice $P(x)$ des p_n peut s'écrire :

$$P(x) = x\ T_{\odot}(x)\ T_{\angle}(x),$$

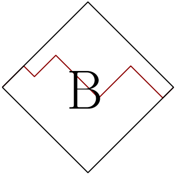
où $T_{\odot}(x) = \sum(n+1)Cat(n)x^n$ désigne la fonction génératrice des arbres plans avec un sommet marqué, et
$T_{\angle}(x) = \sum(2n+1)Cat(n)x^n$ celle des arbres plans avec un coin marqué.

Bijection entre :

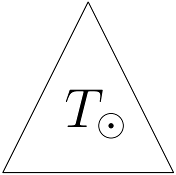
- les chemins à $2n$ pas $\nearrow$ ou $\searrow$ commençant à $(0,0)$ et finissant en $(2n,0)$ (symbolisés par B)
- et les arbres pointés (symbolisés par $T_{\odot}$) ?

Bijection entre :

- les chemins à $2n$ pas $\nearrow$ ou $\searrow$ commençant à $(0, 0)$ et finissant en $(2n, 0)$ (symbolisés par B)
- et les arbres pointés (symbolisés par $T_\odot$) ?



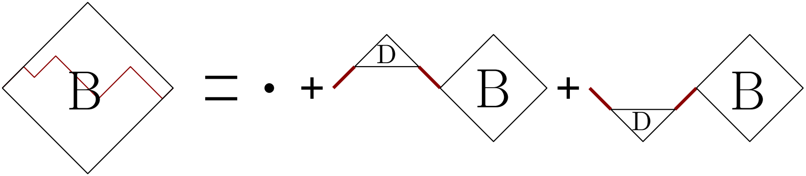
=

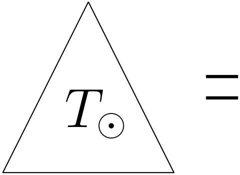


=

Bijection entre :

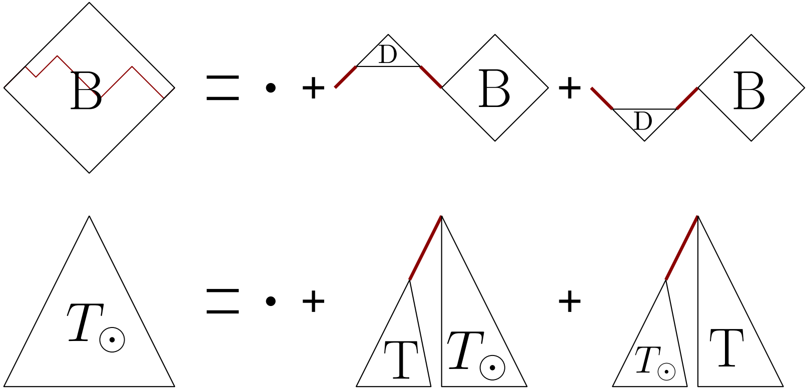
- les chemins à $2n$ pas $\nearrow$ ou $\searrow$ commençant à $(0,0)$ et finissant en $(2n,0)$ (symbolisés par B)
- et les arbres pointés (symbolisés par $T_\odot$) ?





Bijection entre :

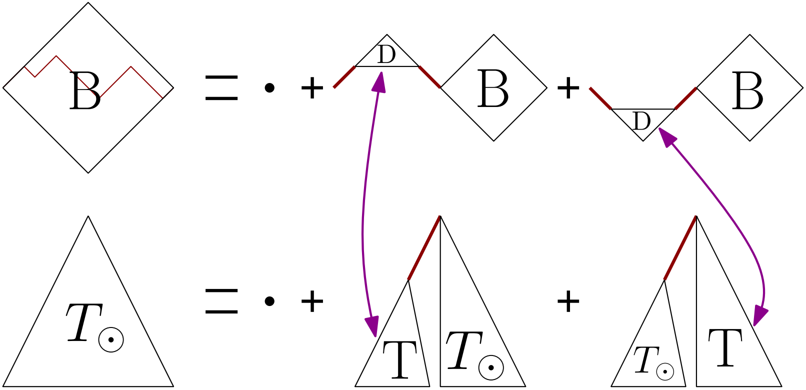
- les chemins à $2n$ pas $\nearrow$ ou $\searrow$ commençant à $(0,0)$ et finissant en $(2n,0)$ (symbolisés par B)
- et les arbres pointés (symbolisés par $T_\odot$) ?



Bijections pour le plan projectif
Petit aparté

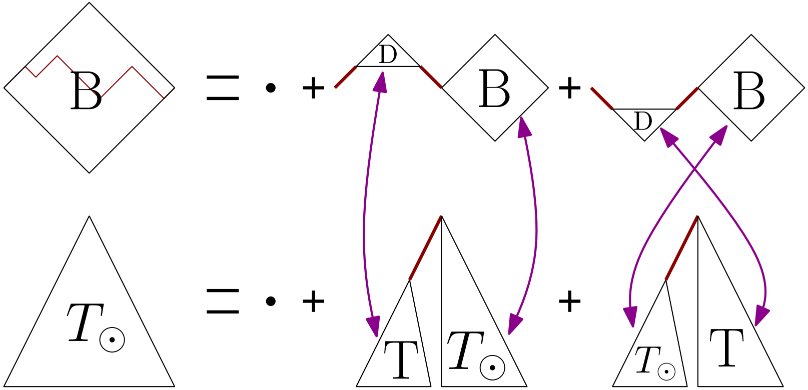
Bijection entre :

- les chemins à $2n$ pas $\nearrow$ ou $\searrow$ commençant à $(0,0)$ et finissant en $(2n,0)$ (symbolisés par B)
- et les arbres pointés (symbolisés par $T_\odot$) ?

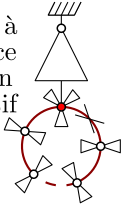


Bijection entre :

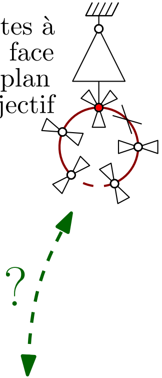
- les chemins à $2n$ pas $\nearrow$ ou $\searrow$ commençant à $(0,0)$ et finissant en $(2n,0)$ (symbolisés par B)
- et les arbres pointés (symbolisés par $T_\odot$) ?



Cartes à une face du plan projectif

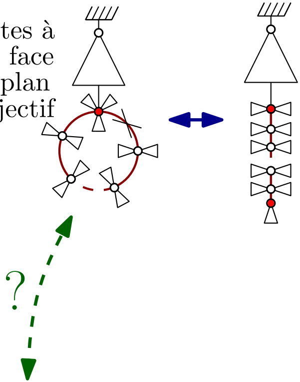


Cartes à une face du plan projectif



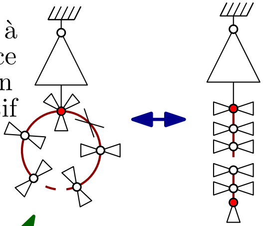
Cardinal :
$\frac{1}{2}4^n - \binom{2n-1}{n}$

Cartes à une face du plan projectif



Cardinal :
$\frac{1}{2}4^n - \binom{2n-1}{n}$

Cartes à une face du plan projectif

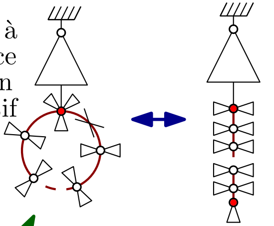


?

Cardinal :

$$\frac{1}{2}4^n - \binom{2n-1}{n}$$
$$= \frac{1}{2}\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right)$$

Cartes à une face du plan projectif



?

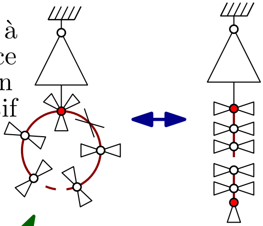
Cardinal :

$\frac{1}{2}4^n - \binom{2n-1}{n}$

$= \frac{1}{2}\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right)$

Chemins à $2n$ pas $\nearrow$ ou $\searrow$ commençant en $(0,0)$ et se terminant en ordonnée > 0

Cartes à une face du plan projectif



?

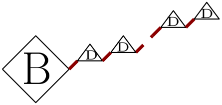
Cardinal : $\frac{1}{2}4^n - \binom{2n-1}{n}$

$= \frac{1}{2}\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right)$

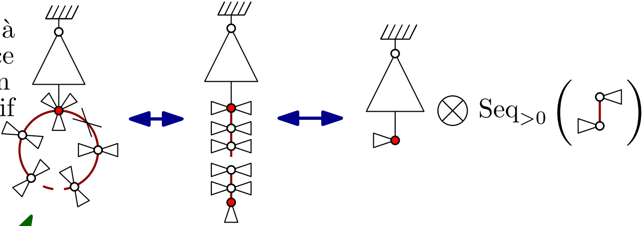
$\longleftrightarrow$

Chemins à $2n$ pas $\nearrow$ ou $\searrow$ commençant en $(0,0)$ et se terminant en ordonnée > 0

$\longleftrightarrow$



Cartes à une face du plan projectif

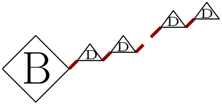


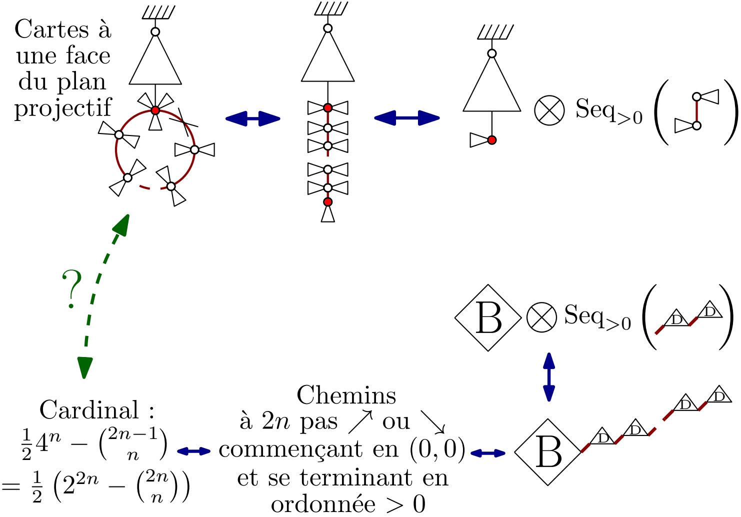
Cardinal :
$\frac{1}{2}4^n - \binom{2n-1}{n}$
$= \frac{1}{2}\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right)$

$\longleftrightarrow$

Chemins
à $2n$ pas $\nearrow$ ou $\searrow$
commençant en $(0,0)$
et se terminant en
ordonnée > 0

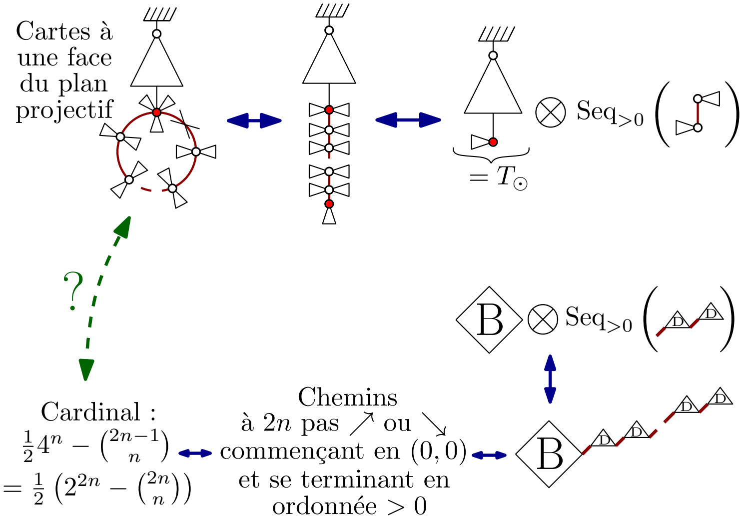
$\longleftrightarrow$




Cartes à une face du plan projectif
$\otimes \mathrm{Seq}_{>0}$
?
B
$\otimes \mathrm{Seq}_{>0}$
D
Cardinal :
$\frac{1}{2}4^n - \binom{2n-1}{n}$
$= \frac{1}{2}\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right)$
Chemins à $2n$ pas $\nearrow$ ou $\searrow$ commençant en $(0,0)$ et se terminant en ordonnée > 0
B
D

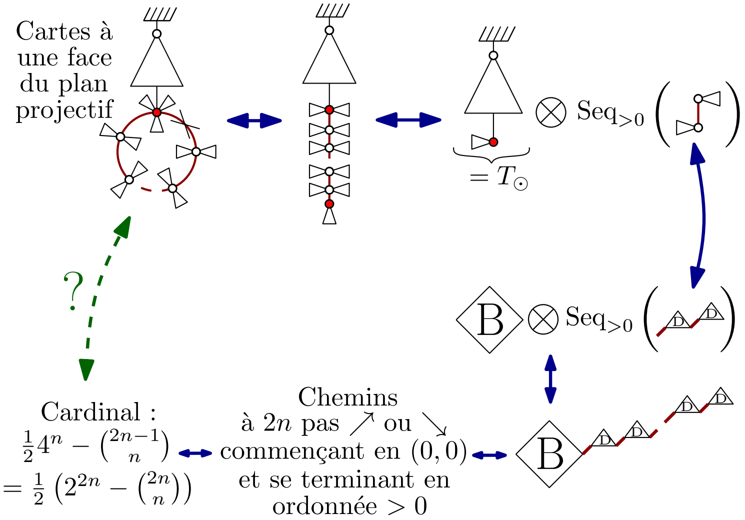
Bijections pour le plan projectif

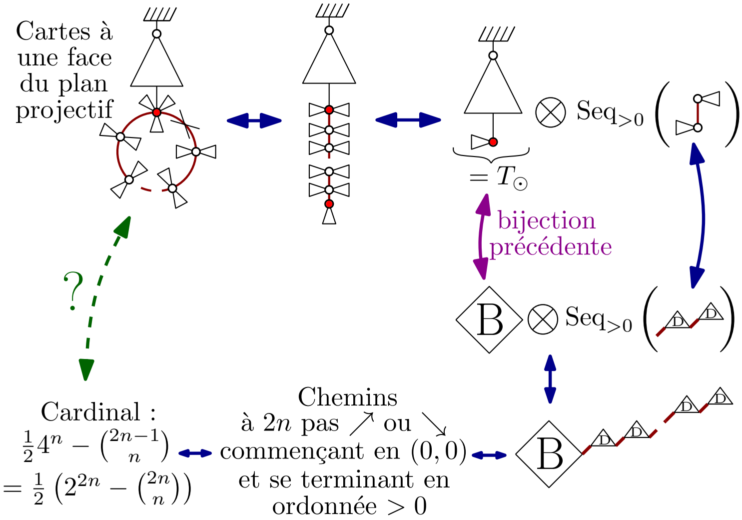
Troisième idée



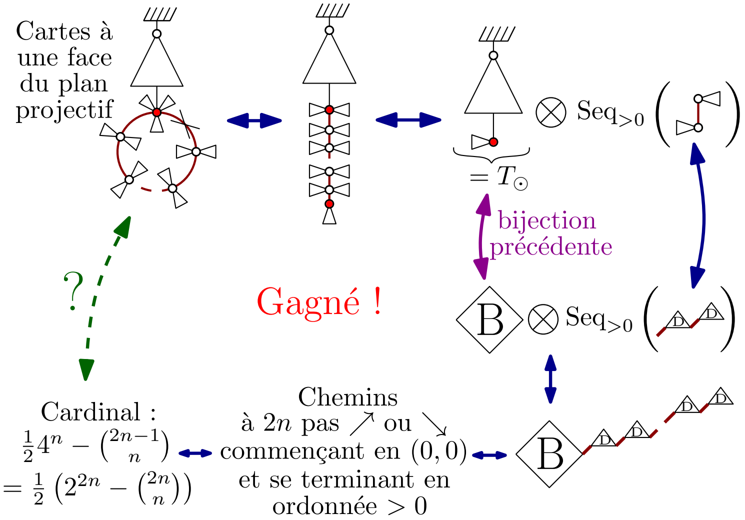
Bijections pour le plan projectif

Troisième idée

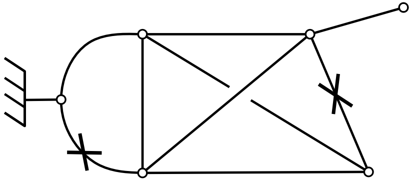


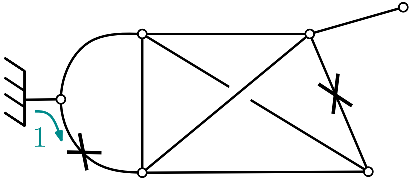


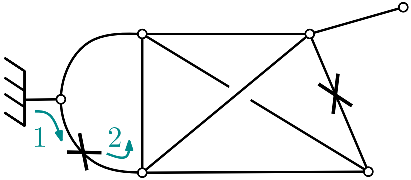
Cartes à une face du plan projectif
$\otimes$ Seq$_{>0}$
$= T_\odot$
bijection précédente
B $\otimes$ Seq$_{>0}$
D
?
Cardinal :
$\frac{1}{2}4^n - \binom{2n-1}{n}$
$= \frac{1}{2}\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right)$
Chemins à $2n$ pas $\nearrow$ ou $\searrow$ commençant en $(0,0)$ et se terminant en ordonnée > 0
B

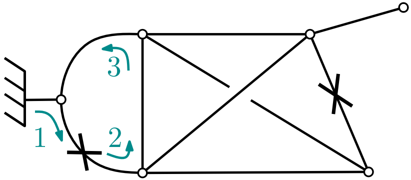


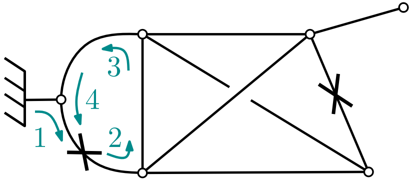
Cartes à une face du plan projectif
$= T_{\odot}$
$\otimes$ Seq$_{>0}$
bijection précédente
Gagné !
?
B
$\otimes$ Seq$_{>0}$
D
D
B
D
D
D
D
Cardinal :
$\frac{1}{2}4^n - \binom{2n-1}{n}$
$= \frac{1}{2}\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right)$
Chemins à $2n$ pas $\nearrow$ ou $\searrow$ commençant en $(0,0)$ et se terminant en ordonnée > 0

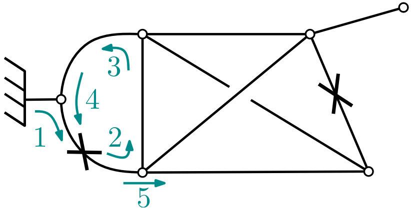


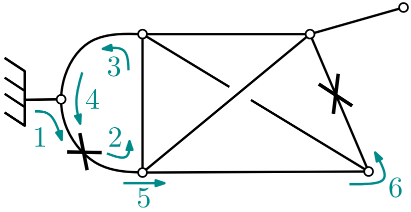

1

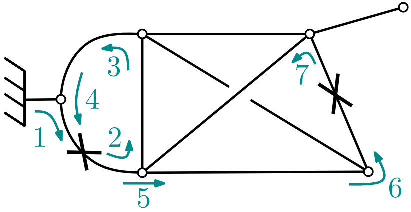

1
2

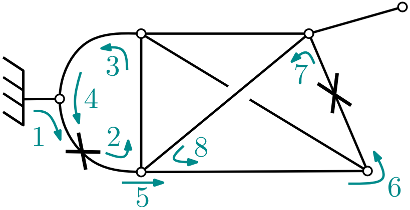

3
1
2


1
2
3
4

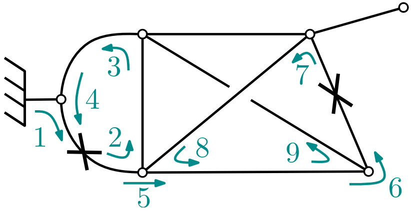

1
2
3
4
5

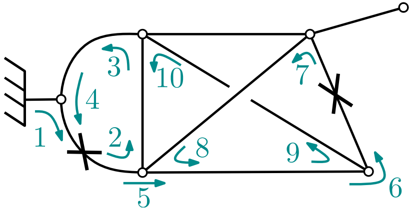

1
2
3
4
5
6


1
2
3
4
5
6
7

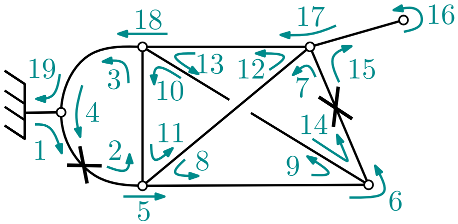


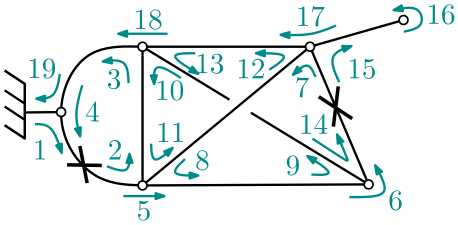
1
2
3
4
5
6
7
8


1
2
3
4
5
6
7
8
9



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


18
17
16
19
3
13
12
15
10
7
4
14
11
1
2
8
9
6
5

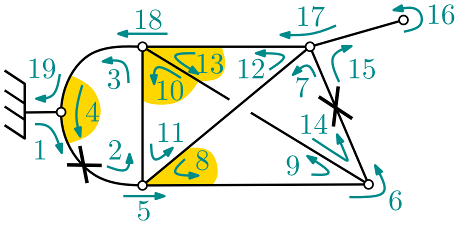


Coin entrelacé, entrelacement

Un coin c est dit **entrelacé** s'il vérifie les conditions suivantes :

- Il n'est pas le premier coin visité de son sommet,
- Le coin adjacent b qui est du côté de la base de la flèche (et non de la pointe) a été visité **après** c.

La demi-arête comprise entre b et c est appelée **entrelacement**.

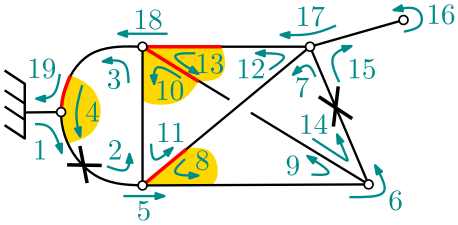


Coin entrelacé, entrelacement

Un coin c est dit **entrelacé** s'il vérifie les conditions suivantes :

- Il n'est pas le premier coin visité de son sommet,
- Le coin adjacent b qui est du côté de la base de la flèche (et non de la pointe) a été visité **après** c.

La demi-arête comprise entre b et c est appelée **entrelacement**.



Coin entrelacé, entrelacement

Un coin c est dit **entrelacé** s'il vérifie les conditions suivantes :

- Il n'est pas le premier coin visité de son sommet,
- Le coin adjacent b qui est du côté de la base de la flèche (et non de la pointe) a été visité **après** c.

La demi-arête comprise entre b et c est appelée **entrelacement**.

Pourquoi les entrelacements nous ont semblé intéressants ?

1. Heuristique intéressante.
2. Sur une surface de genre g donnée, il y a exactement $2g$ entrelacements.
3. Généralisent les trisections (= notion découlant des travaux de Chapuy).
4. Robustesse de la définition. (Les entrelacements sont invariants par retournements de sommets.)

Malheureusement la piste des entrelacements n'a pas abouti...

Pourquoi les entrelacements nous ont semblé intéressants ?

1. Heuristique intéressante.
2. Sur une surface de genre g donnée, il y a exactement $2g$ entrelacements.
3. Généralisent les trisections (= notion découlant des travaux de Chapuy).
4. Robustesse de la définition. (Les entrelacements sont invariants par retournements de sommets.)

Malheureusement la piste des entrelacements n'a pas abouti...

Pourquoi les entrelacements nous ont semblé intéressants ?

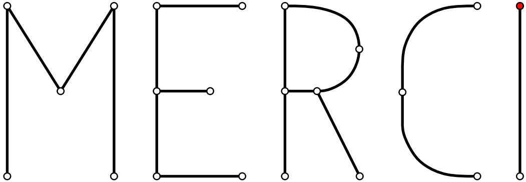
1. Heuristique intéressante.
2. Sur une surface de genre g donnée, il y a exactement $2g$ entrelacements.
3. Généralisent les trisections (= notion découlant des travaux de Chapuy).
4. Robustesse de la définition. (Les entrelacements sont invariants par retournements de sommets.)

Malheureusement la piste des entrelacements n'a pas abouti...

Pourquoi les entrelacements nous ont semblé intéressants ?

1. Heuristique intéressante.
2. Sur une surface de genre g donnée, il y a exactement $2g$ entrelacements.
3. Généralisent les trisections (= notion découlant des travaux de Chapuy).
4. Robustesse de la définition. (Les entrelacements sont invariants par retournements de sommets.)

Malheureusement la piste des entrelacements n'a pas abouti...



Avez-vous des questions ?