Cartes planaires équipées d'une forêt couvrante

Le cas régulier

COURTIEL Julien

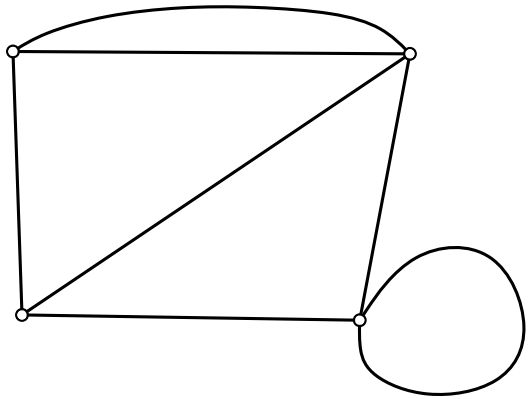
travail joint avec Mireille BOUSQUET-MÉLOU, LaBRI.

Journée Cartes, 15 mai 2012

Définition

Carte planaire = graphe connexe
+ plongement de ce graphe sur une sphère,
le tout considéré à isotopie/déformation près.

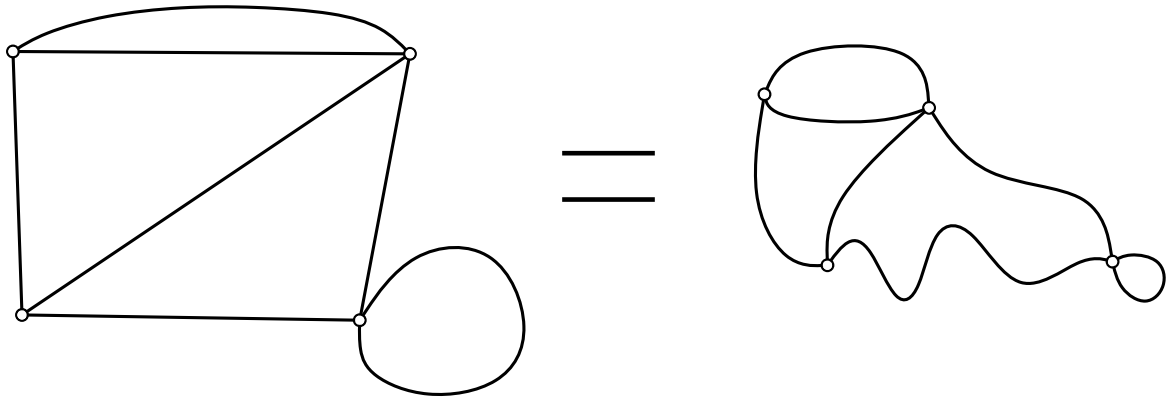
Exemple :



Définition

Carte planaire = graphe connexe
+ plongement de ce graphe sur une sphère,
le tout considéré à isotopie/déformation près.

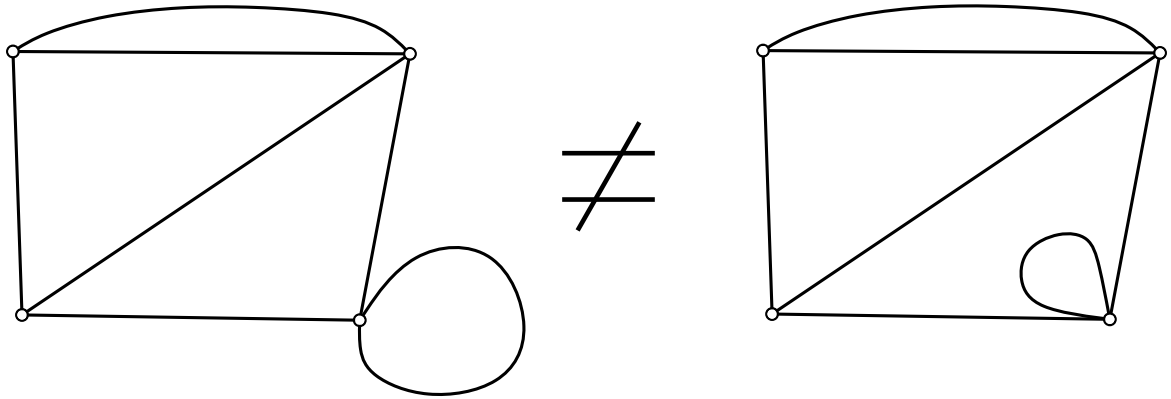
Exemple :



Définition

Carte planaire = graphe connexe
+ plongement de ce graphe sur une sphère,
le tout considéré à isotopie/déformation près.

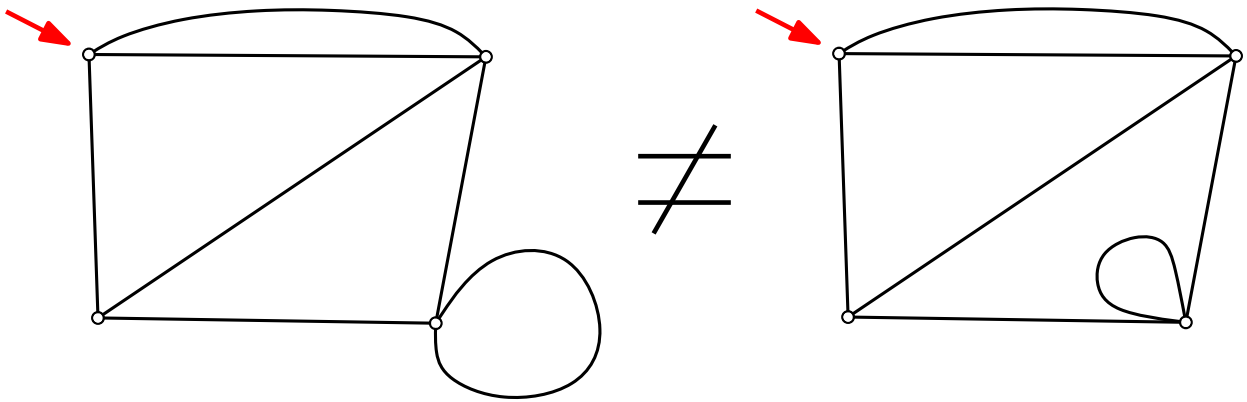
Exemple :



Définition

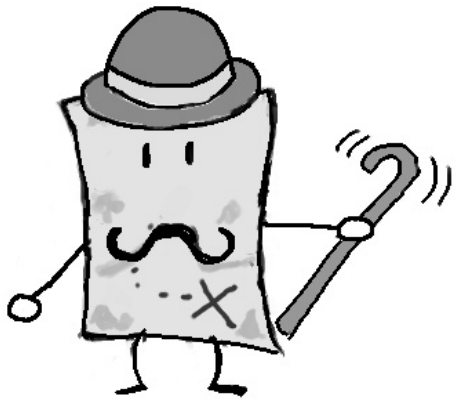
Carte planaire = graphe connexe
+ plongement de ce graphe sur une sphère,
le tout considéré à isotopie/déformation près.

Exemple :



Les cartes considérées dans cet exposé sont **enracinées** en un coin.

Contexte et motivation



Potts, son polynôme et sa série génératrice

Pour un graphe G, le polynôme de Potts se définit comme :

$$P_G(q,\nu) := \sum_{\substack{\text{coloriage de } G \\ \text{à } q \text{ couleurs}}} \nu^{\#\text{arêtes monochromatiques}}.$$

- Le cas $\nu = 0$ revient à étudier le **polynôme chromatique** ;
- Le cas $q = 2$ est le **modèle d'Ising**.

Proposition

Le polynôme de Potts est un polynôme en ν et q !

Soit $\mathfrak{C}$ une classe de cartes planaires.
On définit la **série génératrice de Potts** associée à $\mathfrak{C}$ comme

$$M(q,\nu,t,z) := \frac{1}{q} \sum_{C \in \mathfrak{C}} t^{|E(C)|} z^{|F(C)|} P_C(q,\nu).$$

Nature de la série ?

Question : Nature de la série $M(q, \nu, t, z)$?

Nature de la série ?

Question : Nature de la série $M(q, \nu, t, z)$?

- **Est-elle algébrique ?** Existe-t-il un polynôme P non nul appartenant à $\mathbb{Q}(q, \nu, t, z)[X]$ vérifiant

$$P(M) = 0?$$

- **Est-elle différentiellement finie (ou holonome) ?** Existe-t-il une équation différentielle **linéaire** non triviale (par rapport à t) à coefficients dans $\mathbb{Q}(q, \nu, t, z)$ satisfaite par M ?
- **Est-elle différentiellement algébrique ?** Existe-t-il un entier k et un polynôme P de $\mathbb{Q}(q, \nu, t, z)[X_0, X_1, \ldots, X_k]$ tel que

$$P(M, \frac{\partial M}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^k M}{\partial t^k}) = 0?$$

Nature de la série ?

Question : Nature de la série $M(q, \nu, t, z)$?

- **Est-elle algébrique ?** Existe-t-il un polynôme P non nul appartenant à $\mathbb{Q}(q, \nu, t, z)[X]$ vérifiant

$$P(M) = 0?$$

NON, l'asymptotique des coefficients pour certaines valeurs de q et ν est en $\rho^{-n} n^{-3}$. [Mullin,1967][Flajolet,1985]

- **Est-elle différentiellement finie (ou holonome) ?** Existe-t-il une équation différentielle **linéaire** non triviale (par rapport à t) à coefficients dans $\mathbb{Q}(q, \nu, t, z)$ satisfaite par M ?
- **Est-elle différentiellement algébrique ?** Existe-t-il un entier k et un polynôme P de $\mathbb{Q}(q, \nu, t, z)[X_0, X_1, \ldots, X_k]$ tel que

$$P(M, \frac{\partial M}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^k M}{\partial t^k}) = 0?$$

La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires générales est différentiellement algébrique.

Ce résultat subsiste quand on remplace les cartes planaires générales par des quasi-triangulations.

La preuve est un véritable tour de force. Mais :

- L'équation différentielle algébrique obtenue est énorme.
- Preuve lourde et technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.

La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires générales est différentiellement algébrique.

Ce résultat subsiste quand on remplace les cartes planaires générales par des quasi-triangulations.

La preuve est un véritable tour de force. Mais :

- L'équation différentielle algébrique obtenue est énorme.
- Preuve lourde et technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.

La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires générales est différentiellement algébrique.

Ce résultat subsiste quand on remplace les cartes planaires générales par des quasi-triangulations.

La preuve est un véritable tour de force. Mais :

- L'équation différentielle algébrique obtenue est énorme.
- Preuve lourde et technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.

La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires générales est différentiellement algébrique.

Ce résultat subsiste quand on remplace les cartes planaires générales par des quasi-triangulations.

La preuve est un véritable tour de force. Mais :

- L'équation différentielle algébrique obtenue est énorme.
- Preuve lourde et technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.

La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires générales est différentiellement algébrique.

Ce résultat subsiste quand on remplace les cartes planaires générales par des quasi-triangulations.

La preuve est un véritable tour de force. Mais :

- L'équation différentielle algébrique obtenue est énorme.
- Preuve lourde et technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.

La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires générales est différentiellement algébrique.

Ce résultat subsiste quand on remplace les cartes planaires générales par des quasi-triangulations.

La preuve est un véritable tour de force. Mais :

- L'équation différentielle algébrique obtenue est énorme.
- Preuve lourde et technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.

Motivation : Essayer de résoudre ces problèmes, notamment en étudiant des cas particuliers.

De Potts à Tutte

Le **polynôme de Tutte** d'un graphe connexe G se définit comme :

$$T_G(\mu,\nu) := \sum_{A\subseteq E(G)} (\mu-1)^{cc(A)-1}(\nu-1)^{|A|+cc(A)-|V(G)|},$$

où $cc(A)$ est le nombre de composantes connexes de $(V(G),A)$.

Proposition [Fortuin, Kasteleyn, 1972]

Pour G connexe et $q=(\mu-1)(\nu-1)$, on a

$$P_G(q,\nu) = (\mu-1)(\nu-1)^{|V(G)|}T_G(\mu,\nu).$$

De Potts à Tutte

Le **polynôme de Tutte** d'un graphe connexe G se définit comme :

$$T_G(\mu,\nu) := \sum_{A \subseteq E(G)} (\mu-1)^{cc(A)-1}(\nu-1)^{|A|+cc(A)-|V(G)|},$$

où $cc(A)$ est le nombre de composantes connexes de $(V(G),A)$.

Proposition [Fortuin, Kasteleyn, 1972]

Pour G connexe et $q=(\mu-1)(\nu-1)$, on a

$$P_G(q,\nu) = (\mu-1)(\nu-1)^{|V(G)|}\, T_G(\mu,\nu).$$

Théorème [Tutte, 1954]

$$T_G(\mu,\nu) = \sum_{\text{arbre couvrant}} \mu^{\#\text{activité interne}}\nu^{\#\text{activité externe}}.$$

Corollaire immédiat : $T_G(\mu,\nu)$ est un polynôme à coefficients positifs.

Spécialisations du polynôme de Tutte

Le **polynôme de Tutte** d'un graphe connexe G se définit comme :

$$T_G(\mu,\nu) := \sum_{A\subseteq E(G)} (\mu-1)^{cc(A)-1}(\nu-1)^{|A|+cc(A)-|V(G)|}.$$

Le polynôme de Tutte admet de nombreuses interprétations combinatoires quand il est évalué en certains points.

La spécialisation qui va nous intéresser dans cet exposé est $\nu = 1$:

$$T_G(\mu,1)$$

Spécialisations du polynôme de Tutte

Le **polynôme de Tutte** d'un graphe connexe G se définit comme :

$$T_G(\mu,\nu) := \sum_{A \subseteq E(G)} (\mu-1)^{cc(A)-1}(\nu-1)^{|A|+cc(A)-|V(G)|}.$$

Le polynôme de Tutte admet de nombreuses interprétations combinatoires quand il est évalué en certains points.

La spécialisation qui va nous intéresser dans cet exposé est $\nu = 1$:

$$T_G(\mu,1) = \sum_{\substack{A \subseteq E(G) \\ |A|+cc(A)=|V(G)|}} (\mu-1)^{cc(A)-1}$$

Spécialisations du polynôme de Tutte

Le **polynôme de Tutte** d'un graphe connexe G se définit comme :

$$T_G(\mu,\nu) := \sum_{A\subseteq E(G)} (\mu-1)^{cc(A)-1}(\nu-1)^{|A|+cc(A)-|V(G)|}.$$

Le polynôme de Tutte admet de nombreuses interprétations combinatoires quand il est évalué en certains points.

La spécialisation qui va nous intéresser dans cet exposé est $\nu = 1$:

$$T_G(\mu,1) = \sum_{\substack{A\subseteq E(G)\\ A \text{ sans cycle}}} (\mu-1)^{cc(A)-1}$$

Spécialisations du polynôme de Tutte

Le **polynôme de Tutte** d'un graphe connexe G se définit comme :

$$T_G(\mu,\nu) := \sum_{A\subseteq E(G)} (\mu-1)^{cc(A)-1}(\nu-1)^{|A|+cc(A)-|V(G)|}.$$

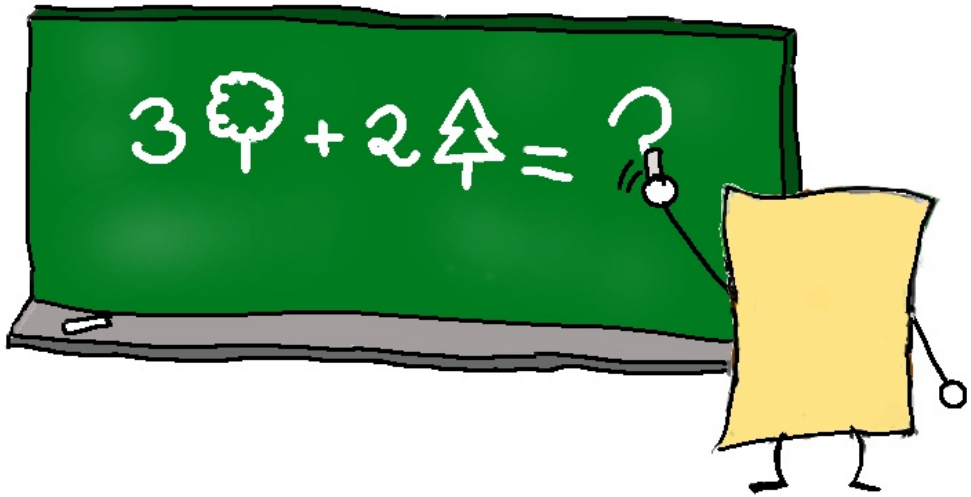
Le polynôme de Tutte admet de nombreuses interprétations combinatoires quand il est évalué en certains points.

La spécialisation qui va nous intéresser dans cet exposé est $\nu = 1$:

$$T_G(\mu,1) = \sum_{\substack{A\subseteq E(G)\\ A \text{ sans cycle}}} u^{cc(A)-1}$$

où on a posé $u = \mu - 1$.
Remarque : Considérer alors $0 > u \geq -1$ a du sens.

Combinatoire des forêts couvrantes



Blocked edges on Eulerian maps and mobiles (...),
de Bouttier, Di Francesco et Guitter (2008).

Une **forêt couvrante** dans un graphe G est un ensemble d'arêtes sans cycle.

Sauf mention contraire, $\mathfrak{C}$ désignera maintenant l'ensemble des cartes tétravalentes (tous les sommets ont pour degré 4).

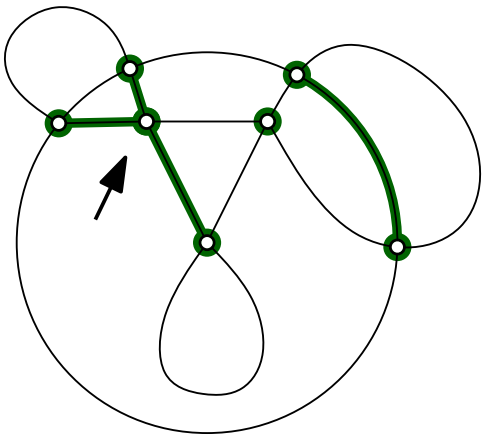
On appelle $\mathfrak{F}$ l'ensemble des cartes de $\mathfrak{C}$ munies d'une forêt couvrante, et $F(u,z)$ la série génératrice associée :

$$F(u,z) := \sum_{C \in \mathfrak{F}} u^{cc(\text{forêt de } C)-1} z^{|F(C)|}.$$

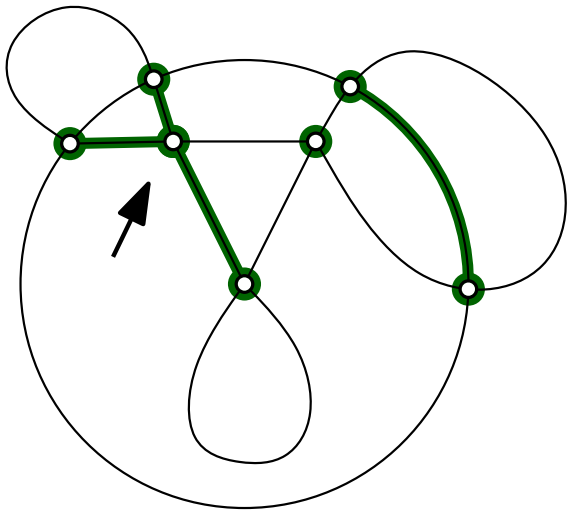
(Chaque sommet non incident à l'ensemble des arêtes de la forêt compte pour une composante connexe.)

Exemple : La contribution à la série $F(u,z)$ de la carte munie de la forêt couvrante ci-contre est de :

$$u^2 z^9.$$

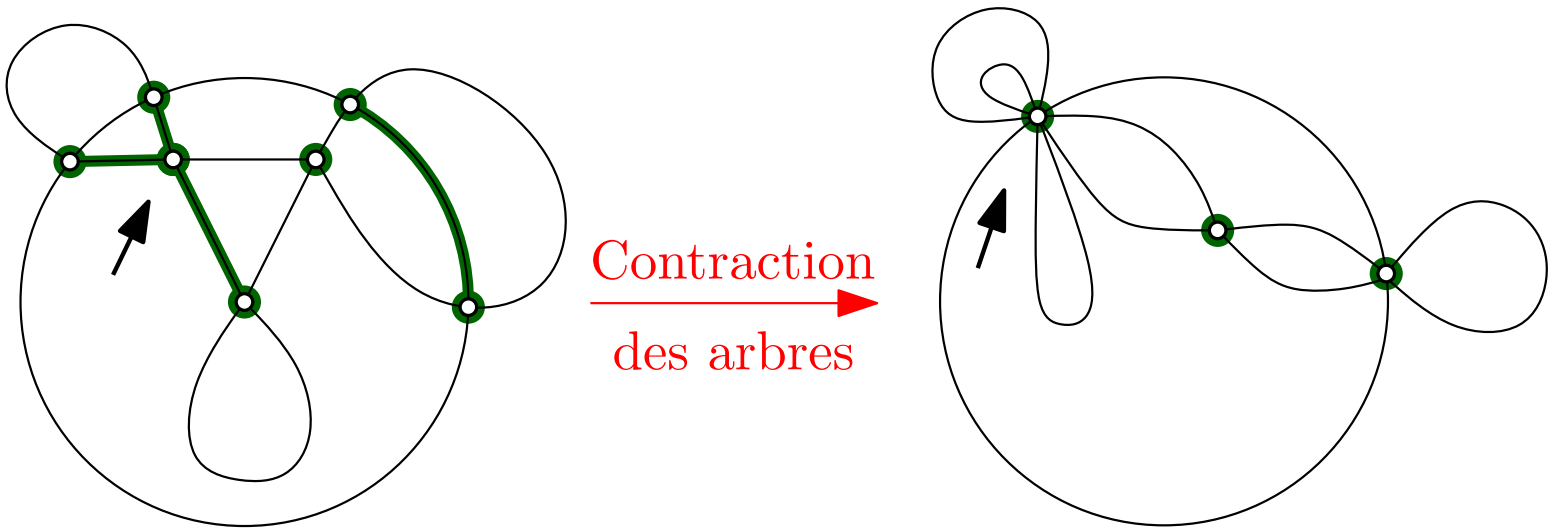


Contraction des arbres



Contraction des arbres

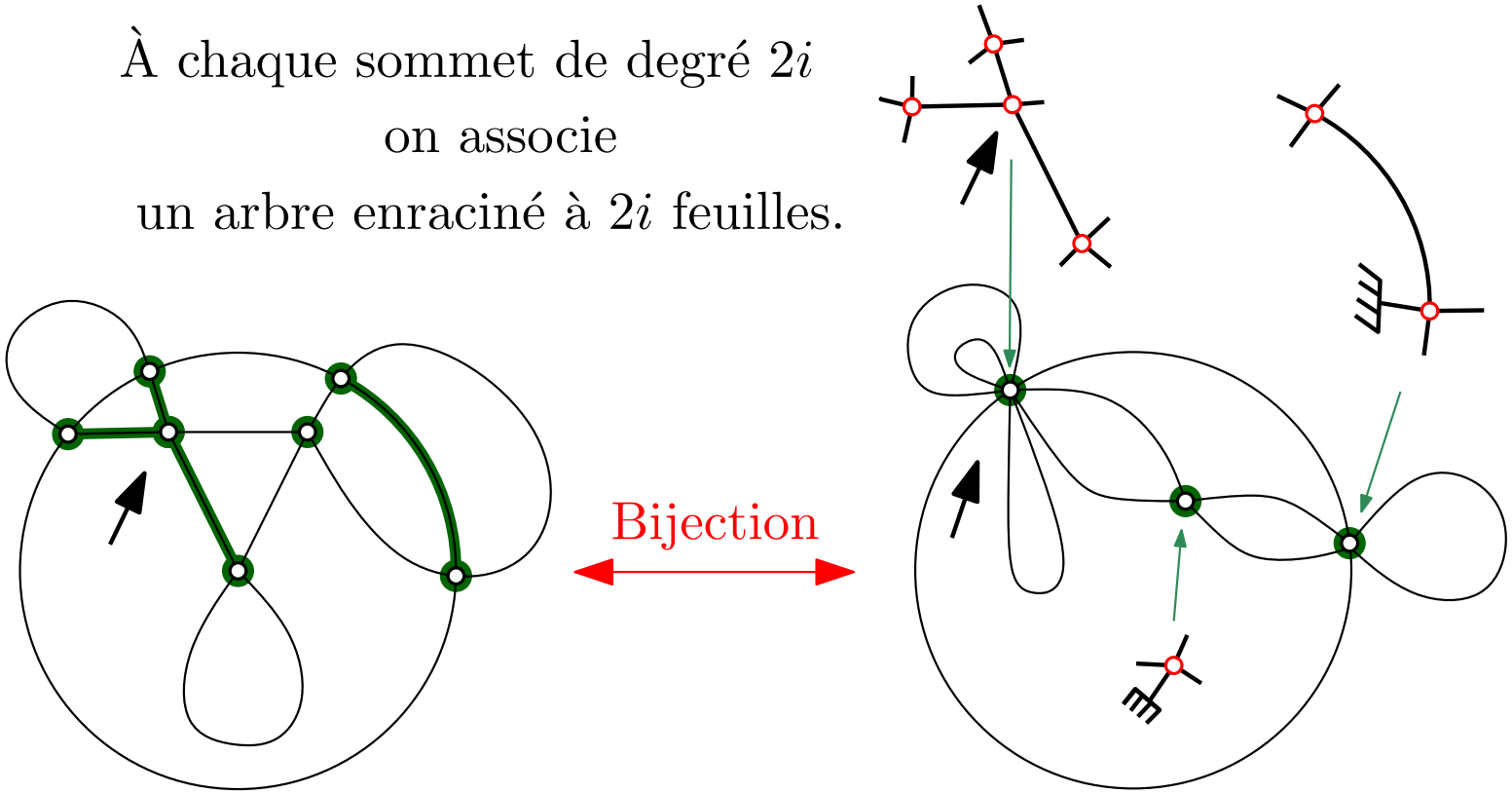
En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.



Contraction des arbres

En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.

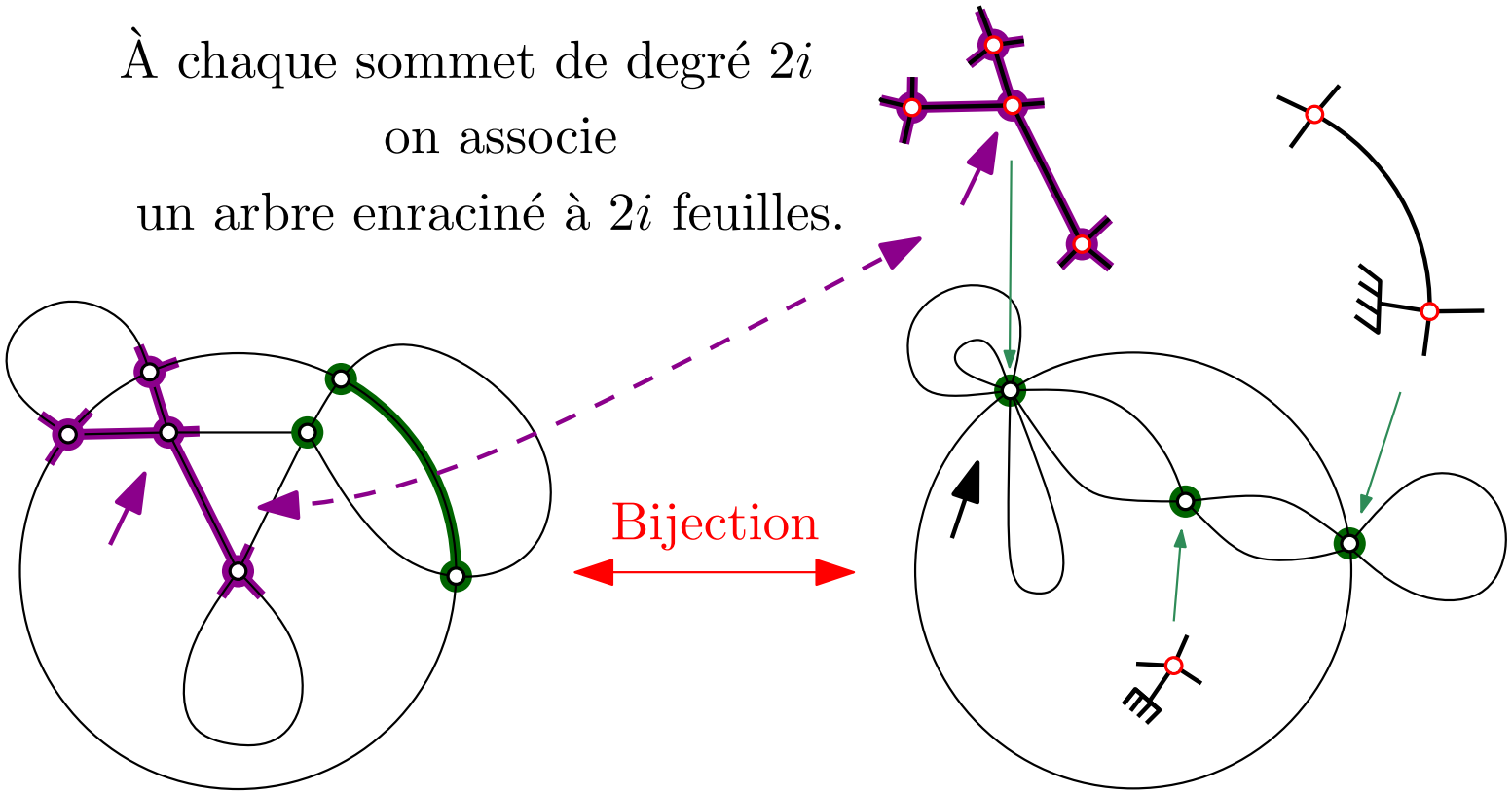
À chaque sommet de degré $2i$
on associe
un arbre enraciné à $2i$ feuilles.



Contraction des arbres

En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.

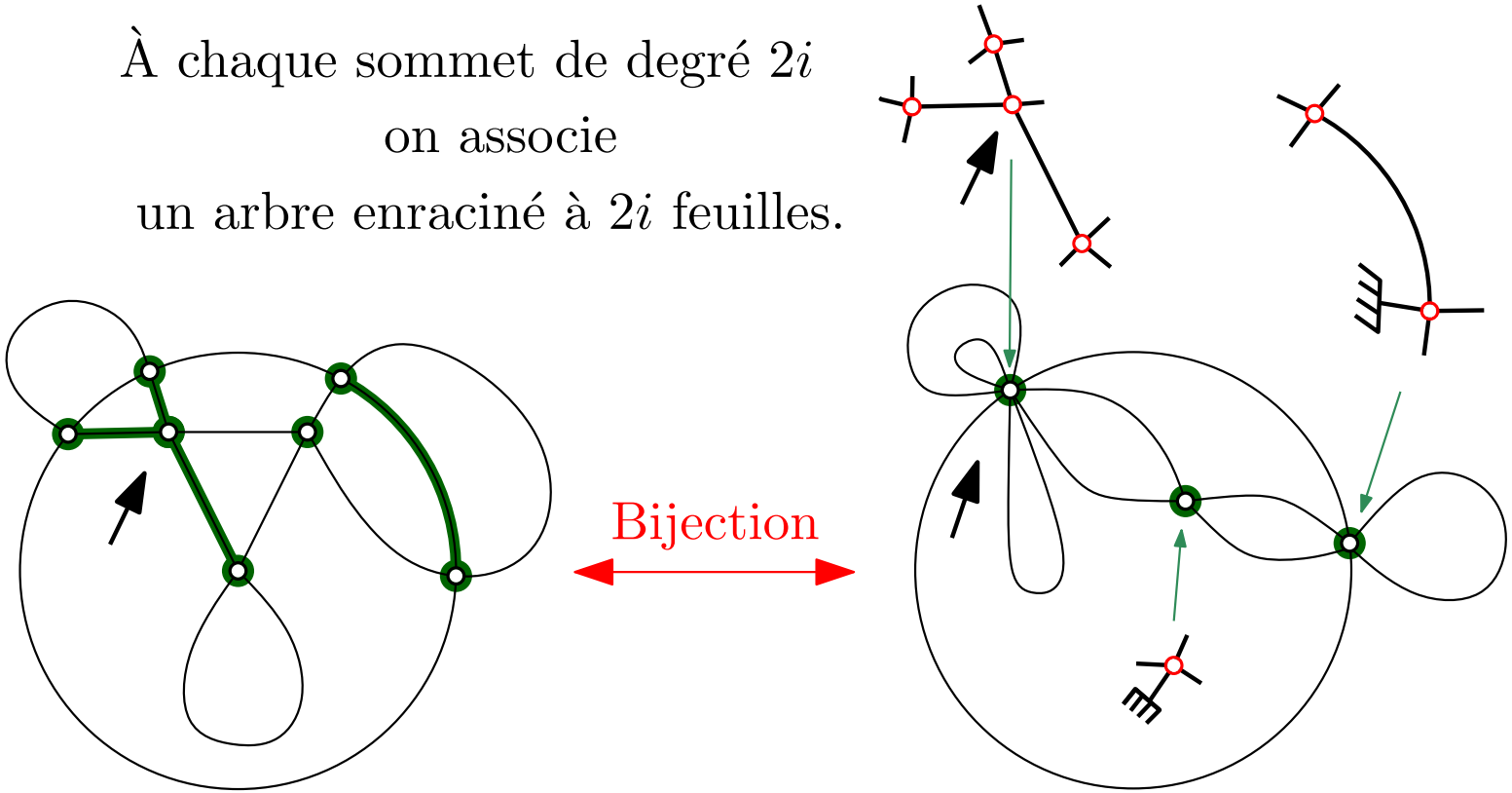
À chaque sommet de degré $2i$
on associe
un arbre enraciné à $2i$ feuilles.



Contraction des arbres

En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.

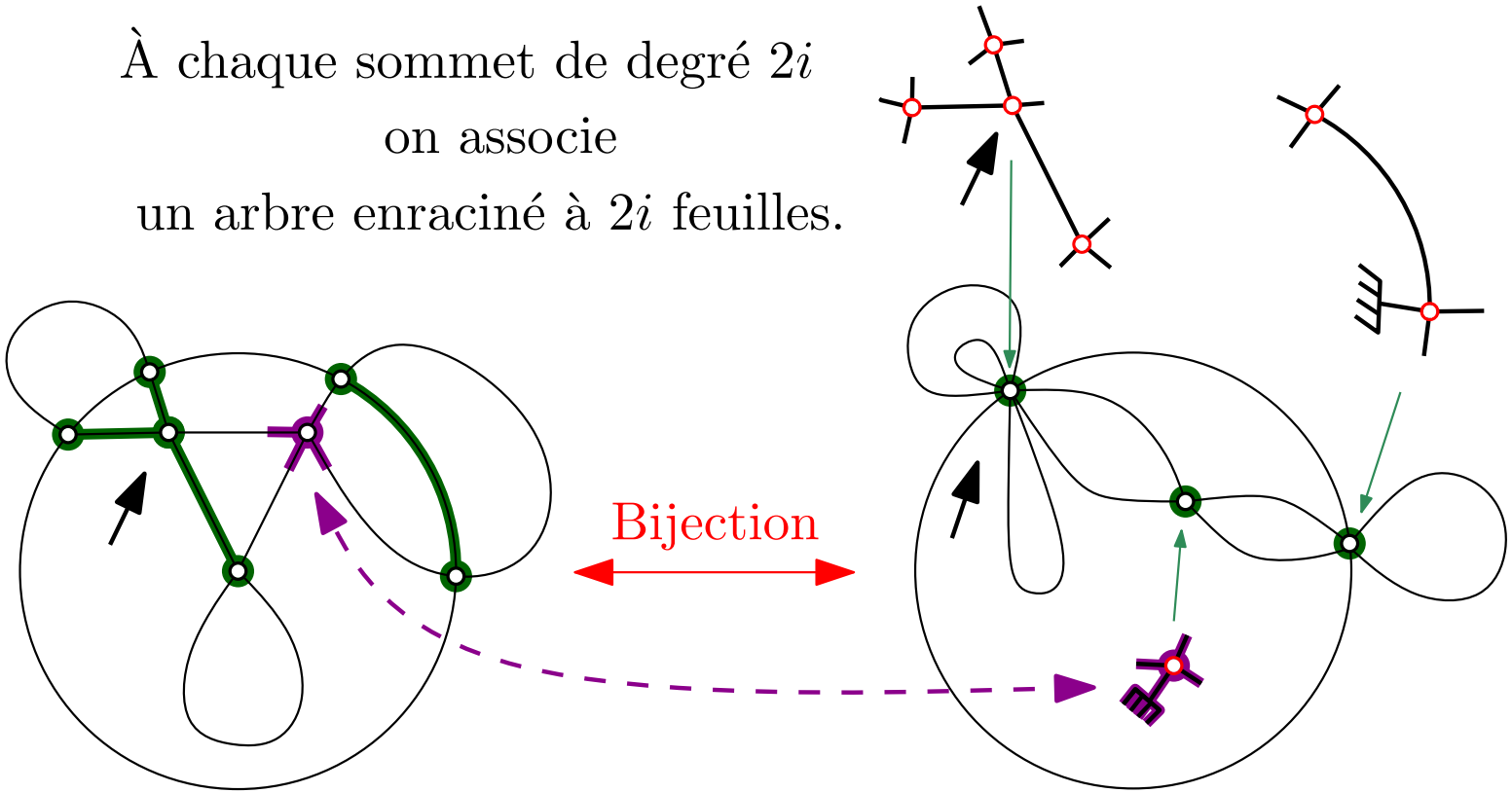
À chaque sommet de degré $2i$
on associe
un arbre enraciné à $2i$ feuilles.



Contraction des arbres

En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.

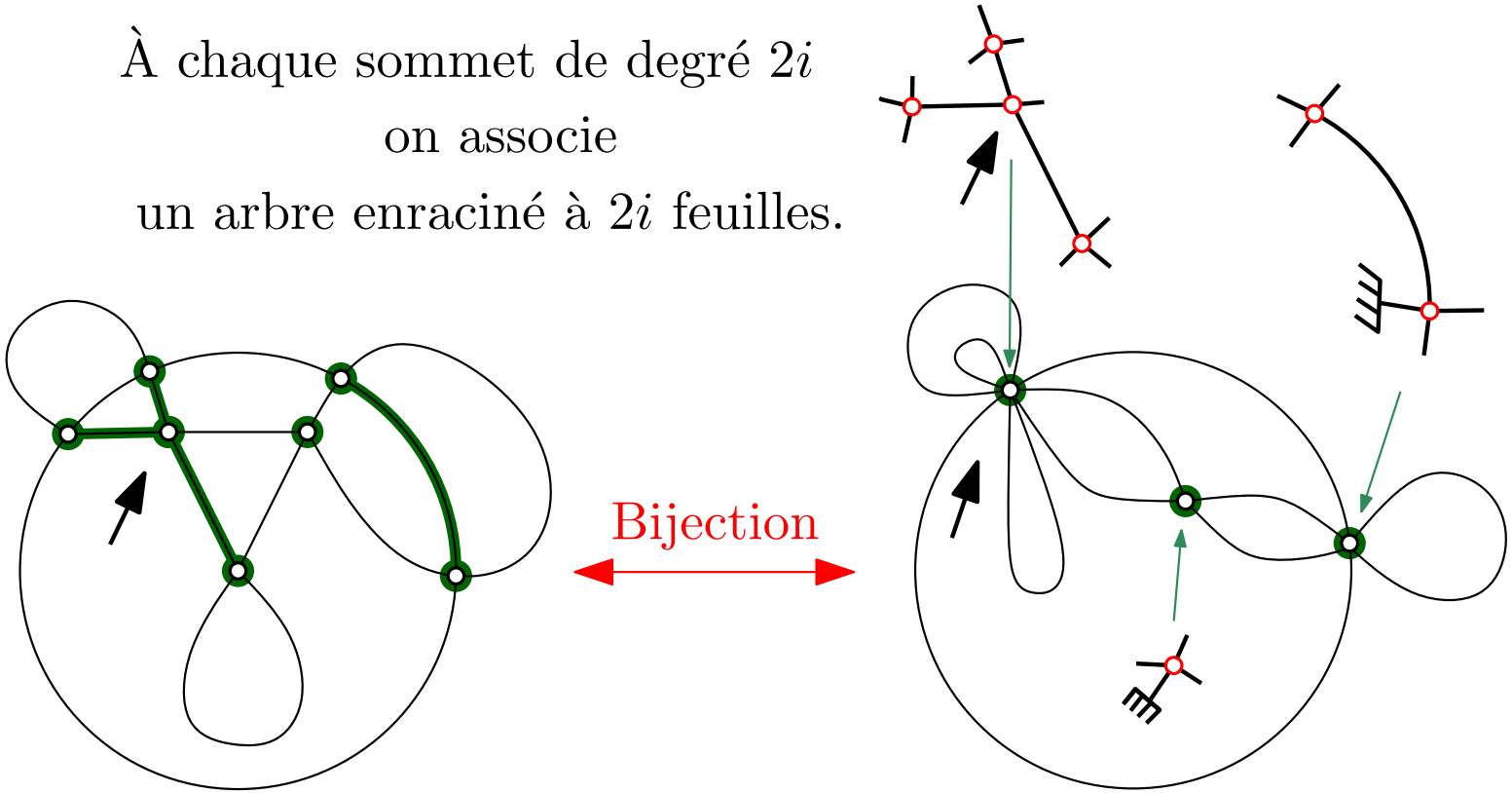
À chaque sommet de degré $2i$
on associe
un arbre enraciné à $2i$ feuilles.



Contraction des arbres

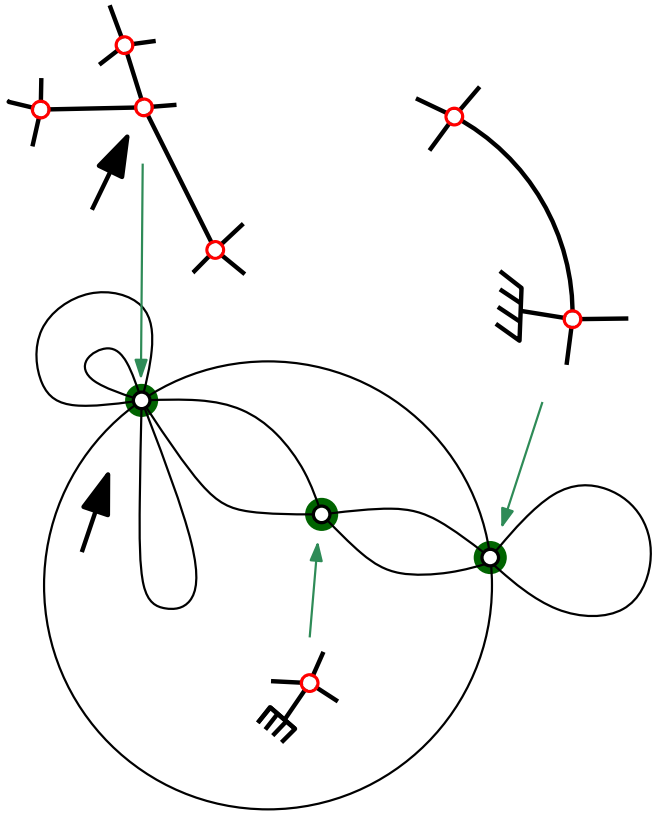
En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.

À chaque sommet de degré $2i$
on associe
un arbre enraciné à $2i$ feuilles.



Contraction des arbres

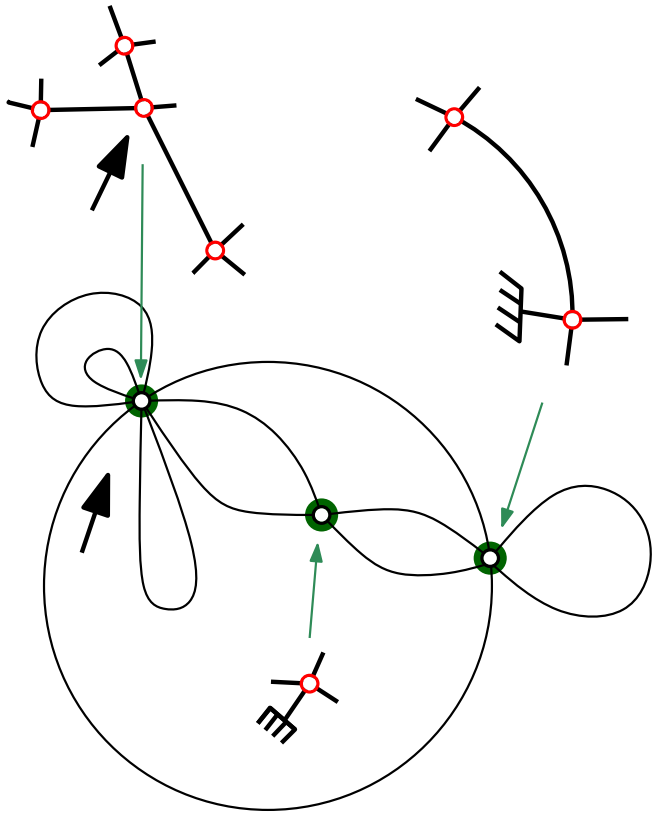
En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.



un élément de $\mathfrak{F}$

Contraction des arbres

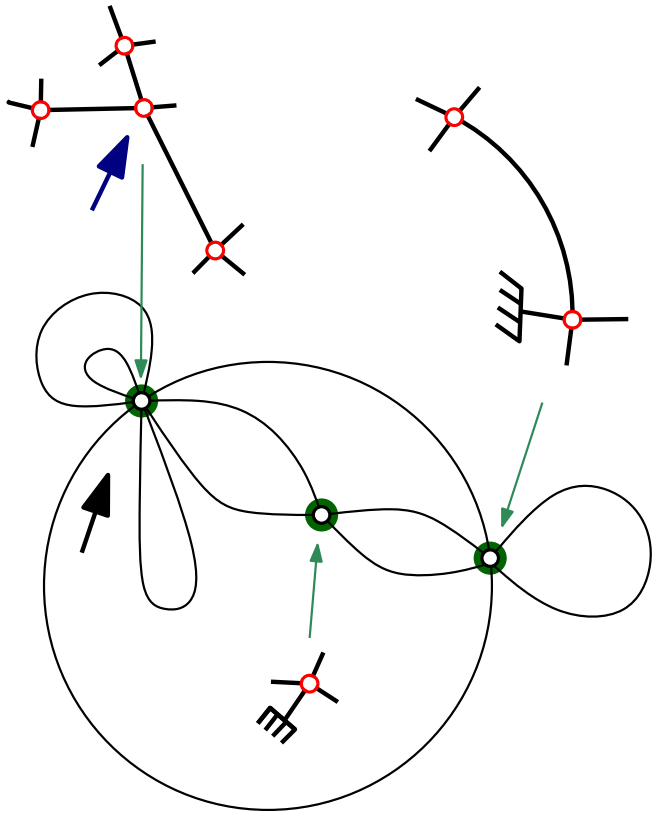
En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.



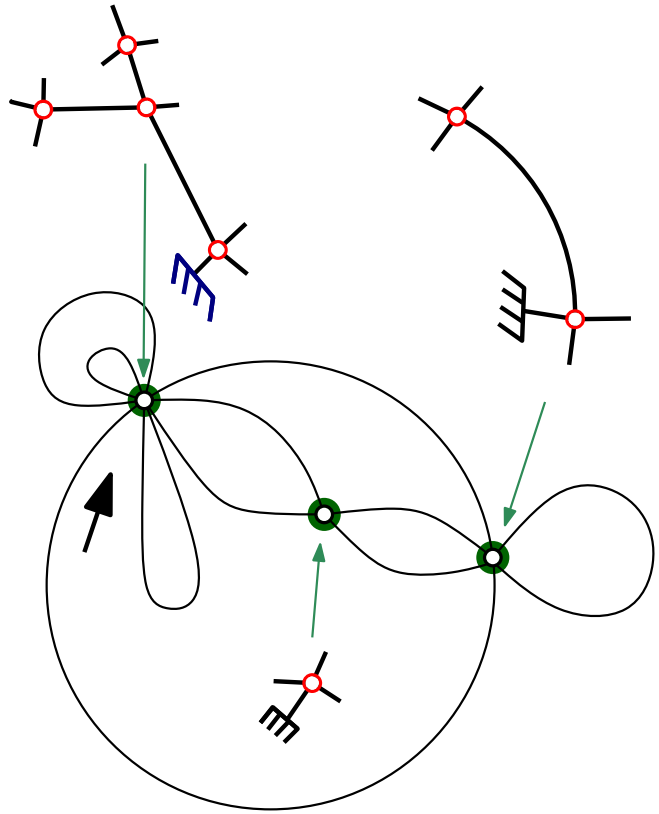
un élément de $\mathfrak{F}$

Contraction des arbres

En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.



un élément de $\mathfrak{F}$



un élément de "$\mathfrak{B}$"

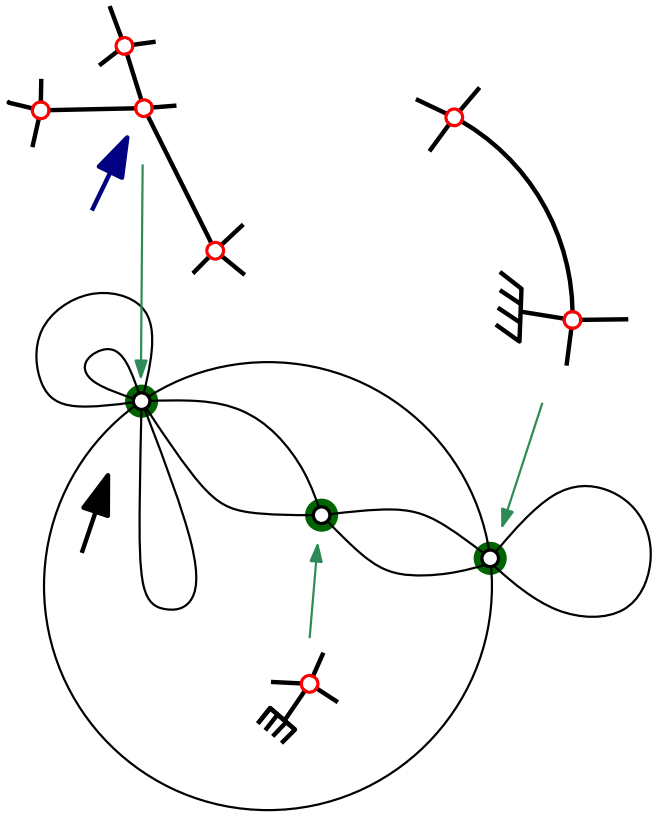
L'arbre racine d'un élément de $\mathfrak{F}$ est enraciné sur un **sommet interne**.

L'arbre racine d'un élément de $\mathfrak{B}$ est enraciné sur une **feuille**.

Lien entre F et B

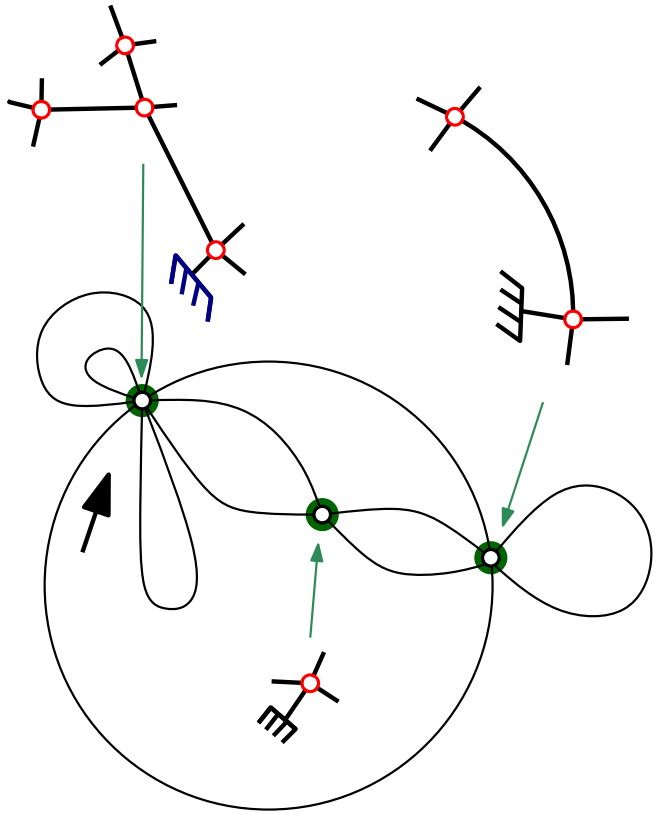
Ensemble : $\mathfrak{F}$

Série génératrice : $F(u,z)$



Ensemble : $\mathfrak{B}$

Série génératrice : $B(u,z)$



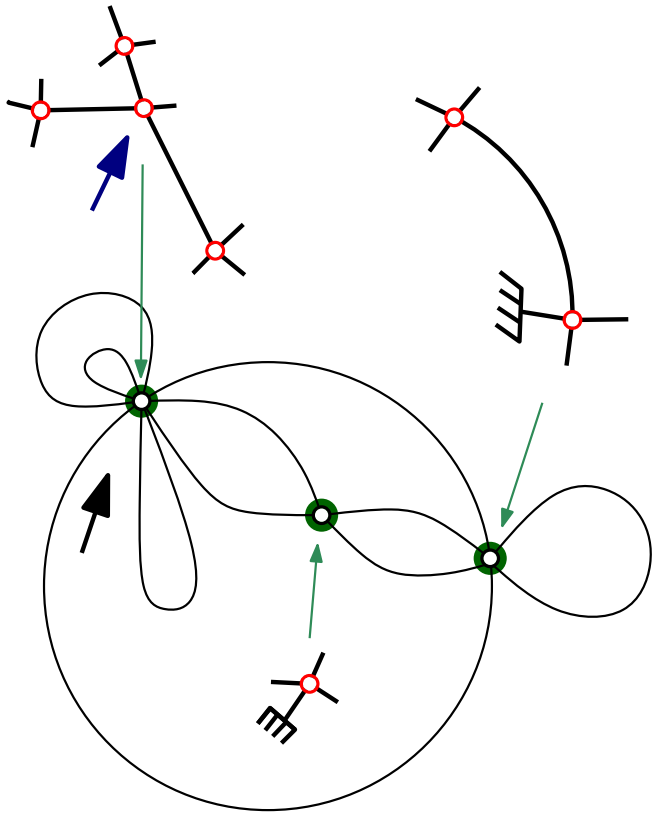
Par un argument de double-enracinement, on a :

$$(n+k)\,[u^k z^{n+2}]F(u,z) \;=\; 2n\,[u^k z^{n+2}]B(u,z).$$

Lien entre F et B

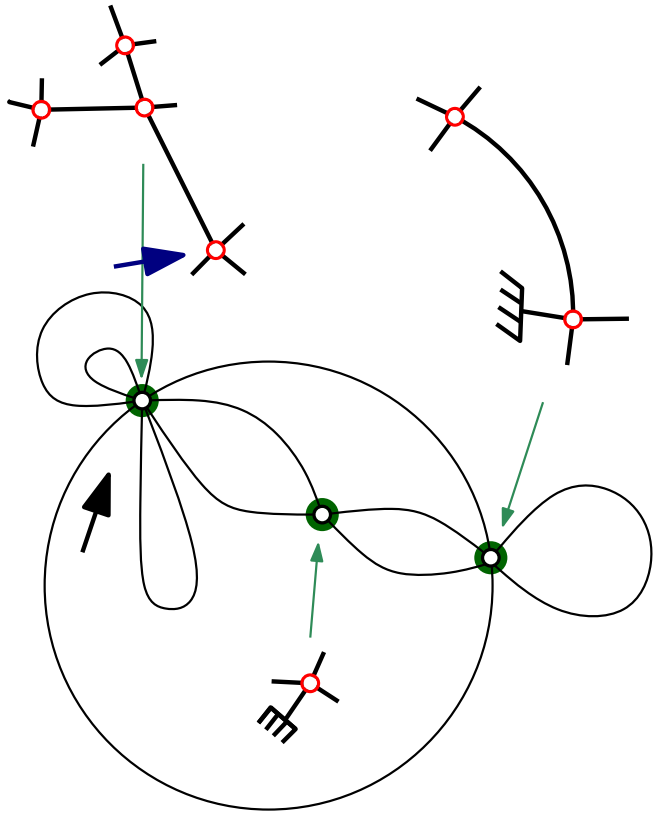
Ensemble : $\mathfrak{F}$

Série génératrice : $F(u,z)$



Ensemble : $\mathfrak{B}$

Série génératrice : $B(u,z)$

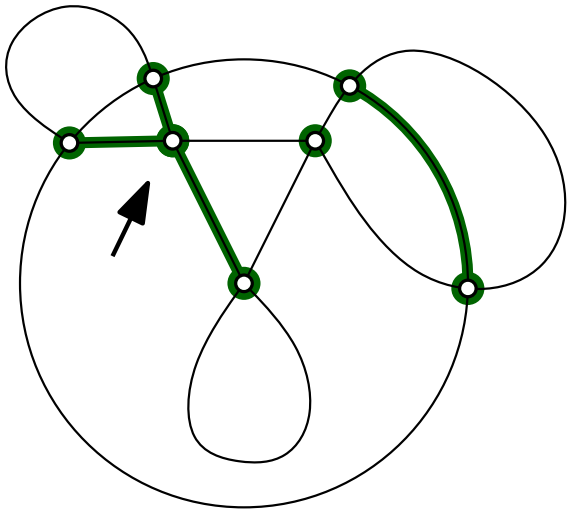


Par un argument de double-enracinement, on a :

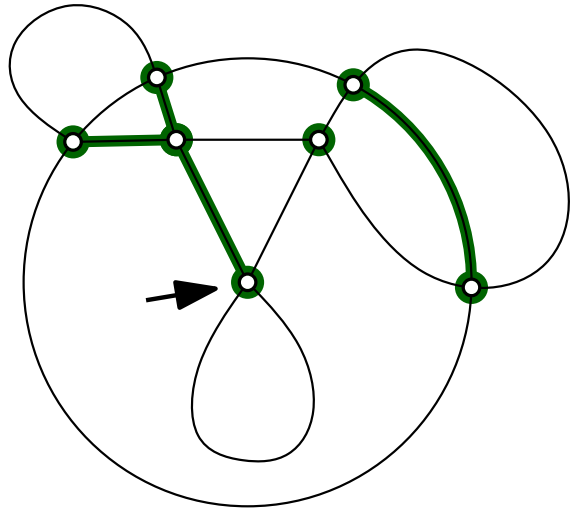
$$(n+k)\,[u^k z^{n+2}]F(u,z) \;=\; 2n\,[u^k z^{n+2}]B(u,z).$$

Lien entre F et B

Ensemble : $\mathfrak{F}$
Série génératrice : $F(u,z)$



Ensemble : $\mathfrak{B}$
Série génératrice : $B(u,z)$



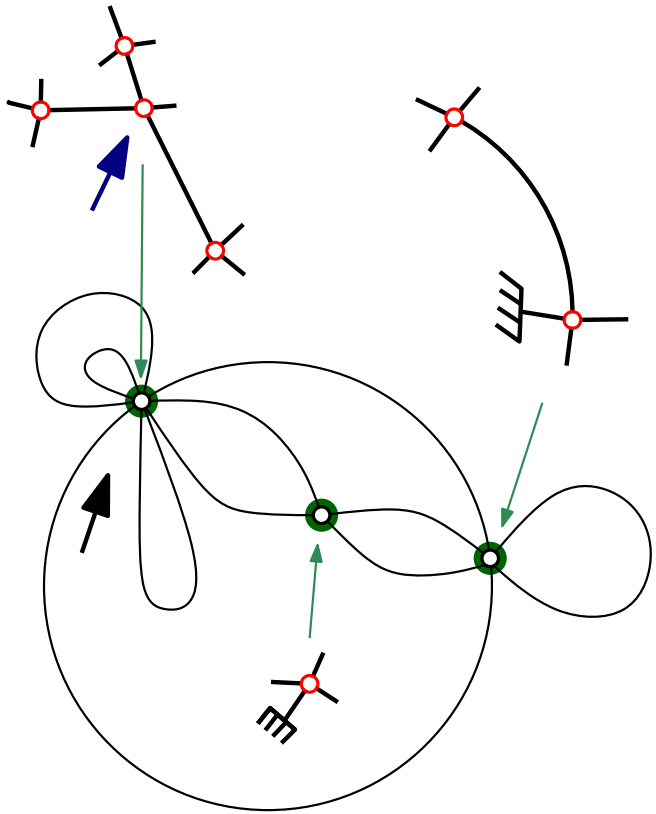
Par un argument de double-enracinement, on a :

$$(n+k)\,[u^k z^{n+2}]F(u,z) \;=\; 2n\,[u^k z^{n+2}]B(u,z).$$

Lien entre F et B

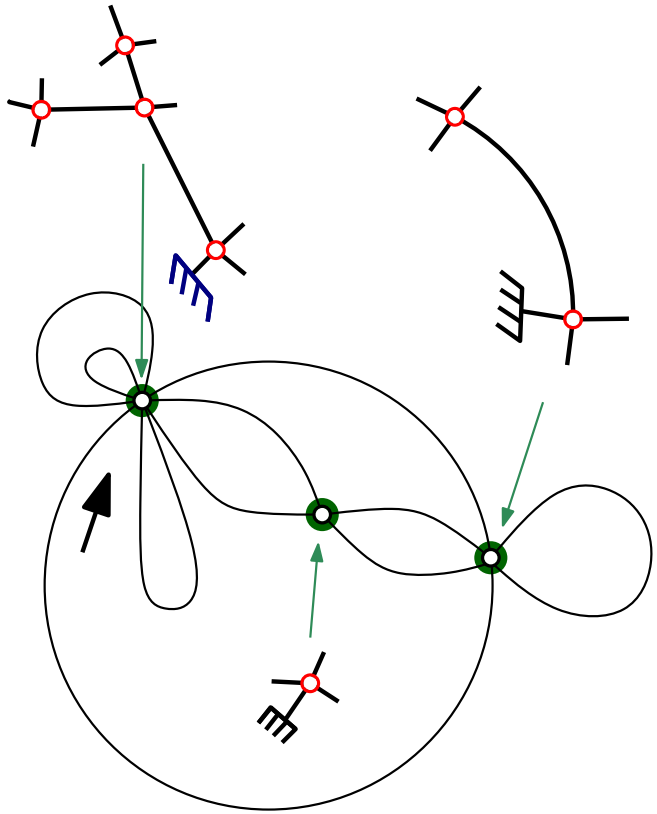
Ensemble : $\mathfrak{F}$

Série génératrice : $F(u,z)$



Ensemble : $\mathfrak{B}$

Série génératrice : $B(u,z)$

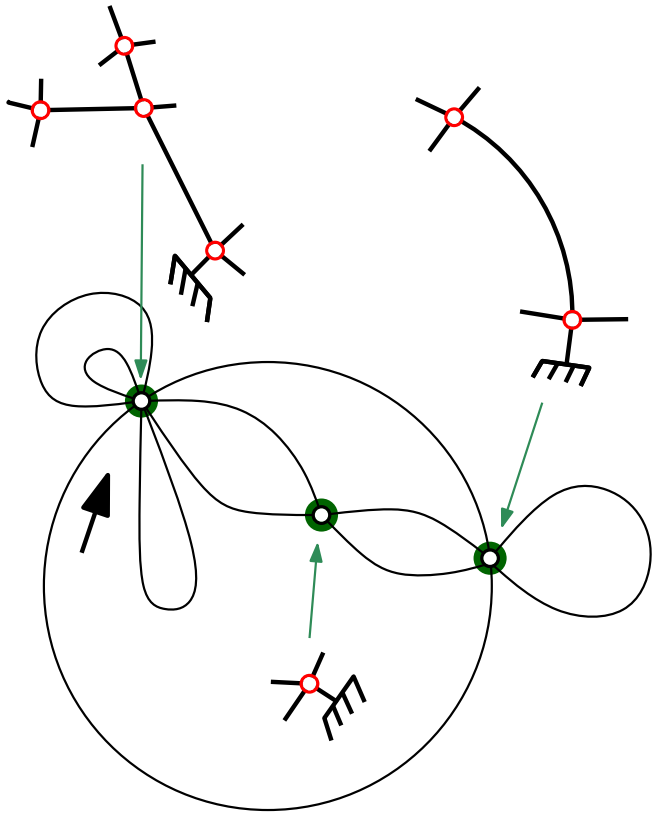


Par un argument de double-enracinement, on a :

$$(n+k)\,[u^k z^{n+2}]F(u,z) \;=\; 2n\,[u^k z^{n+2}]B(u,z).$$

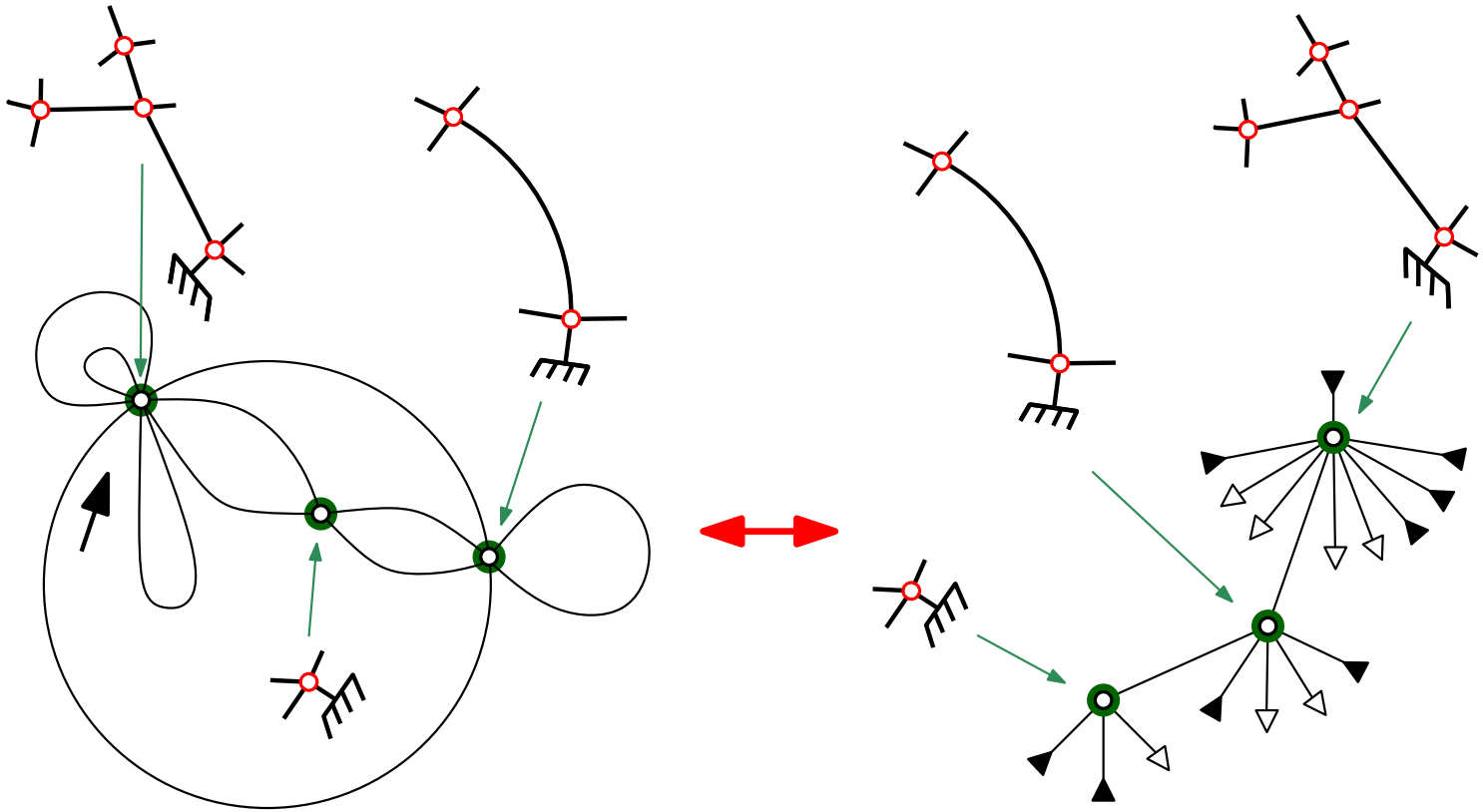
Des cartes enrichies aux arbres enrichis

On utilise alors la bijection de Gilles Schaeffer qui transforme une carte eulérienne en un arbre eulérien bourgeonnant :



Des cartes enrichies aux arbres enrichis

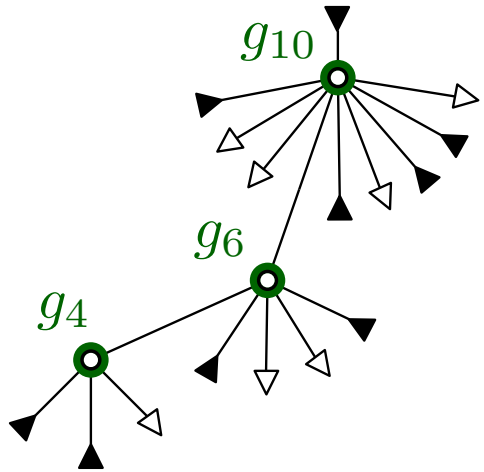
On utilise alors la bijection de Gilles Schaeffer qui transforme une carte eulérienne en un arbre eulérien bourgeonnant :



Description des arbres eulériens

On sait décrire la série $R^\circ(z; g_2, g_4, \dots)$ des arbres eulériens bourgeonnants avec un poids z pour chaque feuille ◀ non racine et un poids g_{2i} pour chaque sommet de degré $2i$:

$$R^\circ = z + \sum_{i \geq 1} g_{2i} \binom{2i-1}{i-1} (R^\circ)^i.$$



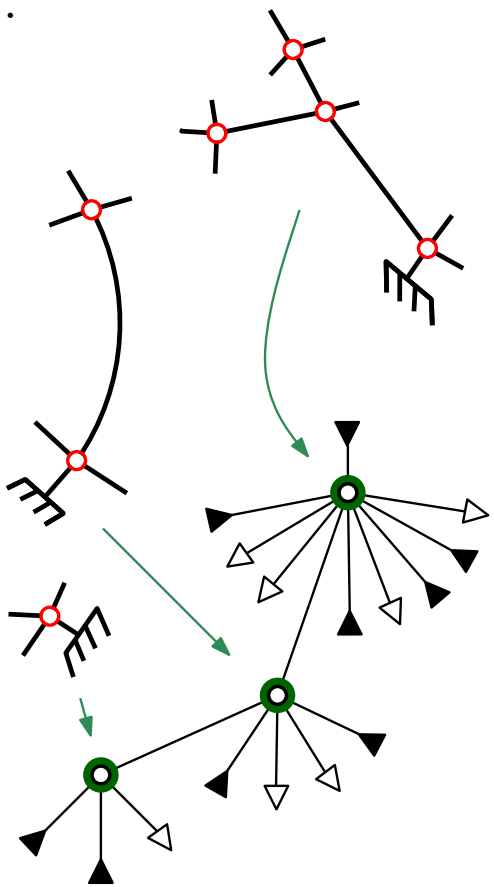
Description des arbres eulériens

On sait décrire la série $R^\circ(z; g_2, g_4, \dots)$ des arbres eulériens bourgeonnants avec un poids z pour chaque feuille ◀ non racine et un poids g_{2i} pour chaque sommet de degré $2i$:

$$R^\circ = z + \sum_{i \geq 1} g_{2i} \binom{2i-1}{i-1} (R^\circ)^i.$$

Ici il est naturel de faire la substitution :

$g_{2i} := u\#\text{arbres 4-valents à } 2i \text{ feuilles}$



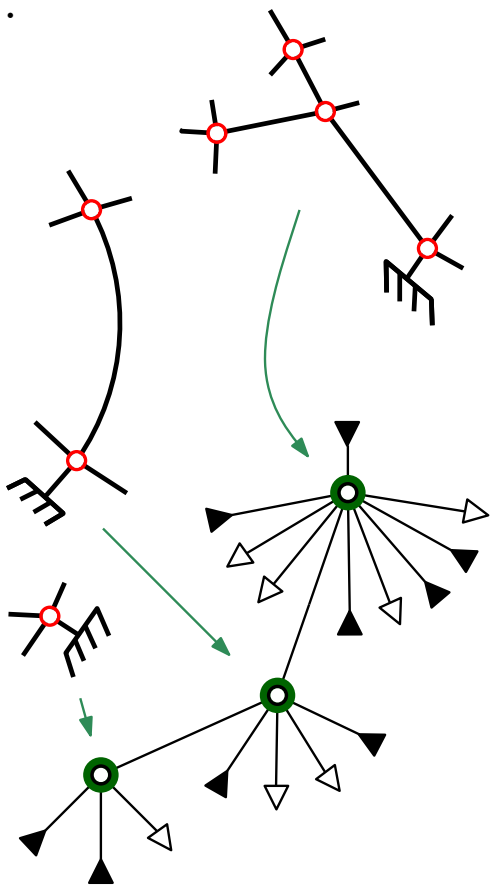
Description des arbres eulériens

On sait décrire la série $R^\circ(z; g_2, g_4, \dots)$ des arbres eulériens bourgeonnants avec un poids z pour chaque feuille ◀ non racine et un poids g_{2i} pour chaque sommet de degré $2i$:

$$R^\circ = z + \sum_{i \geq 1} g_{2i} \binom{2i-1}{i-1} (R^\circ)^i.$$

Ici il est naturel de faire la substitution :

$$g_{2i} := u \frac{1}{2i-1} \binom{3(i-1)}{i-1}$$



Description des arbres eulériens

On sait décrire la série $R^\circ(z; g_2, g_4, \dots)$ des arbres eulériens bourgeonnants avec un poids z pour chaque feuille ◀ non racine et un poids g_{2i} pour chaque sommet de degré $2i$:

$$R^\circ = z + \sum_{i \geq 1} g_{2i} \binom{2i-1}{i-1} (R^\circ)^i.$$

Ici il est naturel de faire la substitution :

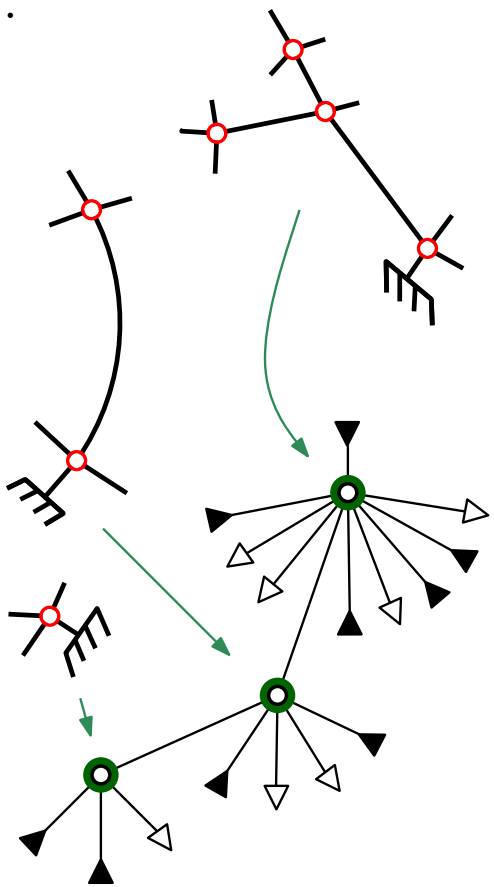
$$g_{2i} := u \frac{1}{2i-1} \binom{3(i-1)}{i-1}$$

La série R des arbres eulériens bourgeonnants enrichis (ensemble $\mathfrak{R}$) vérifie donc :

$$R = z + u\phi(R)$$

où

$$\phi(X) := \sum_{i \geq 2} \frac{1}{i} \binom{3(i-1)}{i-1, i-1, i-1} X^i.$$



Toujours d'après la théorie de Gilles Schaeffer, les éléments de $\mathfrak{B}$ peuvent se voir comme des arbres eulériens bourgeonnants particuliers :
Ils sont **équilibrés**.

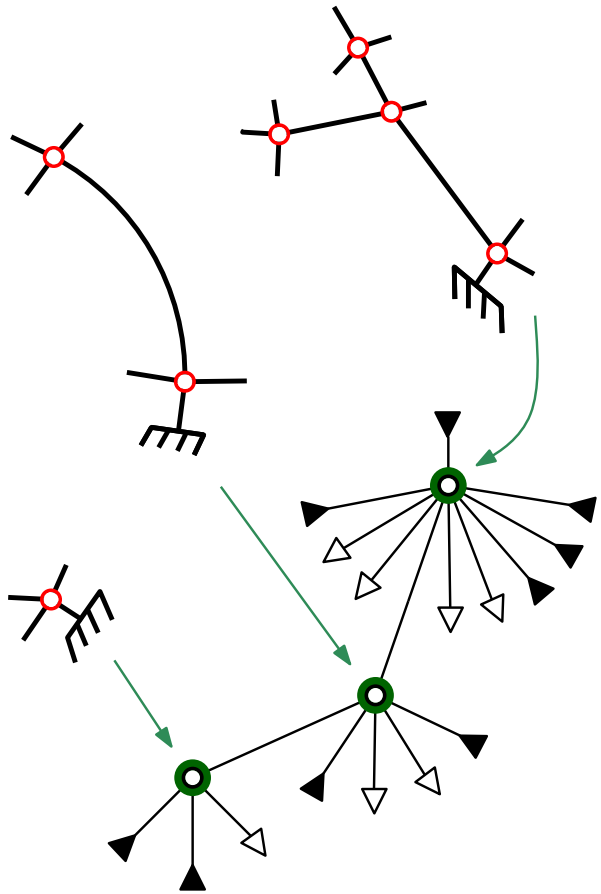
On a alors la relation dite de conjugaison suivante :

$$\boxed{(n+1)\,[u^k z^{n+1}]B = 2\,[u^k z^n]\mathcal{R},}$$

où

$$\mathcal{R}(u,z) := \frac{R(u,z)-z}{u}.$$

Remarque : Il y a correspondance entre les feuilles de l'arbre et les faces de la carte.



Approche naturelle

Pour résumer, on a une série "arborescente" $\mathcal{R} = \frac{R-z}{u}$ qui peut se décrire facilement grâce aux relations :

$$R = z + u\phi(R)$$

$$\phi(X) := \sum_{i \geq 2} \frac{1}{i} \binom{3(i-1)}{i-1, i-1, i-1} X^i$$

Cette série $\mathcal{R}(u, z)$ est liée à $F(u, z)$ de la manière suivante :

$$(n+1)\,[u^k z^{n+1}]B = 2\,[u^k z^n]\mathcal{R}$$

$$(n+k)[u^k z^{n+2}]F = 2n[u^k z^{n+2}]B$$

Approche naturelle

Pour résumer, on a une série "arborescente" $\mathcal{R} = \frac{R-z}{u}$ qui peut se décrire facilement grâce aux relations :

$$R = z + u\phi(R)$$

$$\phi(X) := \sum_{i \geq 2} \frac{1}{i} \binom{3(i-1)}{i-1, i-1, i-1} X^i$$

Cette série $\mathcal{R}(u, z)$ est liée à $F(u, z)$ de la manière suivante :

$$(n+1)\,[u^k z^{n+1}]B = 2\,[u^k z^n]\mathcal{R} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial B}{\partial z} = 2\mathcal{R}$$

$$(n+k)[u^k z^{n+2}]F = 2n[u^k z^{n+2}]B \quad \leftrightarrow \quad u\frac{\partial\left(\frac{F}{z^2}\right)}{\partial u} + z\frac{\partial\left(\frac{F}{z^2}\right)}{\partial z} = 2z\frac{\partial\left(\frac{B}{z^2}\right)}{\partial z}$$

Approche naturelle mais insuffisante

Pour résumer, on a une série "arborescente" $\mathcal{R} = \frac{R-z}{u}$ qui peut se décrire facilement grâce aux relations :

$$R = z + u\phi(R)$$

$$\phi(X) := \sum_{i \geq 2} \frac{1}{i} \binom{3(i-1)}{i-1, i-1, i-1} X^i$$

Cette série $\mathcal{R}(u, z)$ est liée à $F(u, z)$ de la manière suivante :

$$(n+1)\,[u^k z^{n+1}]B = 2\,[u^k z^n]\mathcal{R} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial B}{\partial z} = 2\mathcal{R}$$

$$(n+k)[u^k z^{n+2}]F = 2n[u^k z^{n+2}]B \quad \leftrightarrow \quad u\frac{\partial\left(\frac{F}{z^2}\right)}{\partial u} + z\frac{\partial\left(\frac{F}{z^2}\right)}{\partial z} = 2z\frac{\partial\left(\frac{B}{z^2}\right)}{\partial z}$$

La dérivée par rapport à u n'est pas la bienvenue.

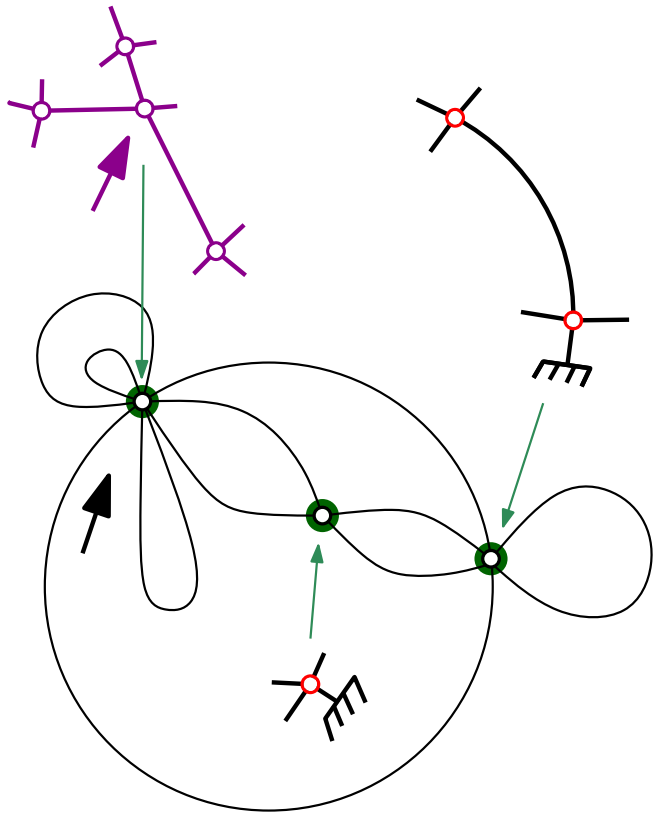
Une variante

Principe : Différencier l'arbre racine (qui est enraciné dans un coin) des autres arbres (qui sont enracinés sur une feuille). Pour cela, il nous faut une description des cartes eulériennes selon le degré du sommet racine.

arbre racine
enraciné dans un coin

Rappel : $\mathfrak{F} \leftrightarrow$

Les autres arbres
sont enracinés
sur une feuille.



Une variante

Principe : Différencier l'arbre racine (qui est enraciné dans un coin) des autres arbres (qui sont enracinés sur une feuille). Pour cela, il nous faut une description des cartes eulériennes selon le degré du sommet racine.

Planar maps and continued fractions, de Bouttier et Guitter (2011)

$$\{\text{Éléments de } \mathfrak{F} \text{ avec face pointée et sommet racine de degré } 2k\}$$
$$\updownarrow$$
$$\{\text{Arbres enracinés sur un coin à } 2k \text{ feuilles}\} \times \{\text{Chemins bilatères à } 2k \text{ pas }\} \times \mathfrak{R}^k$$

On trouve en sommant sur k :

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \theta(R),$$
$$\text{où} \quad \theta : X \mapsto \sum_{k=2}^{\infty} 4 \frac{(3(k-1))!\, X^k}{(k!)^2\,(k-2)!}.$$

On rappelle :

$$R = z + u\phi(R)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \theta(R)$$

On rappelle :

$$R = z + u\phi(R)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \theta(R)$$

Corollaire 1

Comme ϕ est holonome, R est différentiellement algébrique.

Corollaire 2

Comme θ est holonome, F est différentiellement algébrique.

On rappelle :

$$R = z + u\phi(R)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \theta(R)$$

Corollaire 1

Comme ϕ est holonome, R est différentiellement algébrique.

Corollaire 2

Comme θ est holonome, F est différentiellement algébrique.

Comment calculer de manière explicite les équations différentielles ?
Peut-on obtenir l'asymptotique ?

Considérons ici l'ensemble $\mathfrak{C}$ des cartes $2p$-**valentes**, avec $p \geq 2$.
(Tous les sommets ont pour degré $2p$.)
On obtient de manière similaire :

$$\boxed{\begin{aligned} R &= z + u\phi(R) \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \theta(R) \end{aligned}}$$

où

$$\phi(X) := \sum_{\ell \geq 1} \frac{1}{(p-1)\ell + 1} \binom{(2p-1)\ell}{\ell, (p-1)\ell, (p-1)\ell} X^{(p-1)\ell+1},$$

$$\theta(X) := \sum_{m \geq 1} 2p \frac{[(2p-1)m]!}{((p-1)m+1)!^2 (m-1)!} X^{(p-1)m+1}.$$

Nouvelle difficulté :

Considérons ici l'ensemble $\mathfrak{C}$ des cartes $2p$-**valentes**, avec $p \geq 2$.
(Tous les sommets ont pour degré $2p$.)
On obtient de manière similaire :

$$\boxed{\begin{aligned} R &= z + u\phi(R) \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \theta(R) \end{aligned}}$$

où

$$\phi(X) := \sum_{\ell \geq 1} \frac{1}{(p-1)\ell + 1} \binom{(2p-1)\ell}{\ell, (p-1)\ell, (p-1)\ell} X^{(p-1)\ell+1},$$

$$\theta(X) := \sum_{m \geq 1} 2p \frac{[(2p-1)m]!}{((p-1)m+1)!^2 (m-1)!} X^{(p-1)m+1}.$$

Nouvelle difficulté : Les fonctions sont périodiques.

Le cas cubique

Considérons ici l'ensemble $\mathfrak{C}$ des cartes **cubiques**. (Tous les sommets ont pour degré 3.)

On obtient :

$$\boxed{\begin{cases} R = z + u\phi_1(R,S) \\ S = u\phi_2(R,S) \end{cases} \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = \theta(R,S)}$$

où

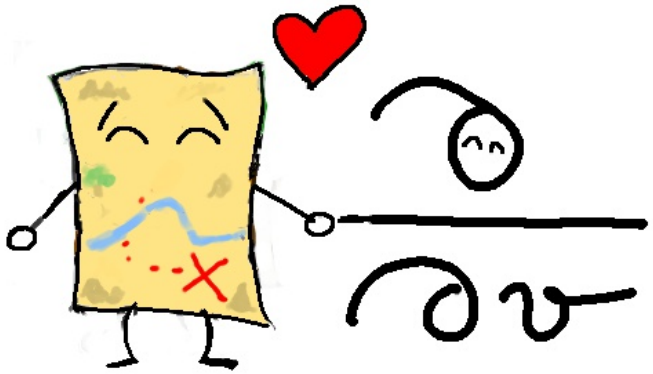
$$\phi_1(X,Y) := \sum_{\ell \geq 2} \sum_{k \geq 0, k+2\ell \geq 3} \frac{1}{2k+4\ell-3} \binom{2k+4\ell-3}{\ell-1, \ell, k, k+2\ell-2} X^\ell Y^k,$$

$$\phi_2(X,Y) := \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k \geq 0, k+2\ell \geq 2} \frac{1}{2k+4\ell-1} \binom{2k+4\ell-1}{\ell, \ell, k, k+2\ell-1} X^\ell Y^k,$$

$$\theta(X,Y) := \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k \geq 0, k+2\ell \geq 3} 3 \frac{(2k+4\ell-4)!}{k!(\ell!)^2(k+2\ell-3)!} X^\ell Y^k.$$

Nouvelle difficulté : On se retrouve avec **deux** séries arborescentes.

Équations différentielles



Équation différentielle pour R

$\mathfrak{C}$ désigne de nouveau les cartes tétravalentes.

Rappel :

$$\boxed{R = z + u\phi(R)}$$

Première étape : Trouver une équation différentielle portant sur ϕ.

$$6\phi(X) + X(27\,X - 1)\phi''(X) + 6 = 0$$

Seconde étape : En substituant $X \leftarrow R$, déduire l'équation différentielle pour R

$$(1 - 27R)\,R\,R'' + 6R'^3(z - (1 + u)R) = 0.$$

L'ordre de cette équation différentielle est de 2, et son degré est de 4.

Une relation fonctionnelle entre F et R

On rappelle que

$$R = z + u\phi(R),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \theta(R),$$

$$\text{où} \quad \phi(X) := \sum_{i \geq 2} \frac{1}{i} \binom{3(i-1)}{i-1, i-1, i-1} X^i$$

$$\text{et} \quad \theta : X \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} 4 \, \frac{(3\,m)!\, X^{m+1}}{(m+1)!^2 \; (m-1)!}$$

Une relation fonctionnelle entre F et R

On rappelle que

$$R = z + u\phi(R),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \theta(R),$$

$$\text{où} \quad \phi(X) := \sum_{i \geq 2} \frac{1}{i} \binom{3(i-1)}{i-1, i-1, i-1} X^i$$

$$\text{et} \quad \theta : X \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} 4 \, \frac{(3\,m)!\, X^{m+1}}{(m+1)!^2 \; (m-1)!}$$

Idée : Exploiter les liens entre ϕ et θ.

$$3\theta(X) = -42\phi(X) + (54X - 2)\phi'(X) + 12X.$$

Une relation fonctionnelle entre F et R

On rappelle que

$$R = z + u\phi(R),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \theta(R),$$

$$\text{où} \quad \phi(X) := \sum_{i \geq 2} \frac{1}{i} \binom{3(i-1)}{i-1, i-1, i-1} X^i$$

$$\text{et} \quad \theta : X \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} 4 \, \frac{(3\,m)!\, X^{m+1}}{(m+1)!^2 \; (m-1)!}$$

Idée : Exploiter les liens entre ϕ et θ.

$$3\theta(X) = -42\phi(X) + (54X - 2)\phi'(X) + 12X.$$

En substituant $X \leftarrow R$ on obtient alors :

$$\boxed{\left(3u\,F' - 12(1+u)\,R - 42\,z + 2\right) R' = 2 - 54\,R}$$

Une équation différentielle pour F

Bricoler l'équation différentielle de R

$$(1-27R)\,R\,R'' + 6R'^3(z-(1+u)R) = 0.$$

et la relation fonctionnelle

$$\big(3u\,F' - 12(1+u)\,R - 42\,z + 2\big)\,R' = 2 - 54\,R$$

afin d'éliminer les occurrences de R.

Outil : Résultants.

Une équation différentielle pour F

Bricoler l'équation différentielle de R

$$(1-27R)\,R\,R'' + 6R'^3(z-(1+u)R) = 0.$$

et la relation fonctionnelle

$$\left(3u\,F' - 12(1+u)\,R - 42\,z + 2\right)R' = 2 - 54\,R$$

afin d'éliminer les occurrences de R.

Outil : Résultants.

Cela permet de trouver explicitement une (relativement grosse) équation différentielle sur F' d'ordre 2 et de degré 7.

Une équation différentielle pour F

Voici explicitement l'équation différentielle trouvée pour F :

$$384\,z^3u(-4\,u+27\,uF'-378\,z+14)F'''^2+4\,z(4+F''\,u)[9\,u^4F''^2F'^2-288\,zu^3F''^2F'+12\,u^3F''^2F'-192\,zu^2F''^2+2268\,u^2F''^2z^2+4\,u^2F''^2+72\,u^3F'^2F''-384\,zu^2F''+96\,u^2F'\,F''-360\,zu^2F'\,F''+32\,F''\,u-624\,F''\,uz-6480\,uz^2F''+144\,u^2F'^2+192\,uF'-2016\,zuF'-768\,zu+10368\,z^2-2112\,z+64]F'''+u^4(-30\,z+2+3\,uF')(-54\,z+2+3\,uF')F''^5+16\,u^3(-24\,zu+12\,uF'+9\,u^2F'^2-162\,zuF'+648\,z^2-132\,z+4)F''^4+96\,u^2(54\,z^2-48\,zu+12\,uF'-110\,z+4+9\,u^2F'^2-93\,zuF')F''^3+256\,u(-78\,zu-162\,z^2+12\,uF'-102\,z-36\,zuF'+9\,u^2F'^2+4)F''^2+256\,(54\,zuF'+9\,u^2F'^2+12\,uF'+4-108\,z-144\,zu)F''-24576\,z+36864\,zF'=0$$

Résumé de la démarche

Relations induites par la combinatoire :

$$R = z + u\phi(R)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \theta(R)$$

Pour obtenir une équation différentielle algébrique pour F :

1. Trouver une équation différentielle pour ϕ ; en déduire une équation différentielle pour R.
2. Trouver un lien entre ϕ, θ et leurs dérivées, afin d'obtenir une relation fonctionnelle entre F et R.
3. Éliminer toute occurrence de R en combinant les relations trouvées précédemment.

Résumé de la démarche

Relations induites par la combinatoire :

$$R = z + u\phi(R)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \theta(R)$$

Pour obtenir une équation différentielle algébrique pour F :

1. Trouver une équation différentielle pour ϕ ; en déduire une équation différentielle pour R.
2. Trouver un lien entre ϕ, θ et leurs dérivées, afin d'obtenir une relation fonctionnelle entre F et R.
3. Éliminer toute occurrence de R en combinant les relations trouvées précédemment.

Cette démarche peut être appliquée à d'autres classes de cartes.

Cartes quasi-cubiques

Ici $\mathfrak{C}$ désigne la classe des cartes **quasi-cubiques**. (Tous les sommets ont pour degré 3, sauf le sommet racine qui est de degré 1.)

On trouve une relation simple entre F et les séries arborescentes R et S :

$$10\frac{u}{1+u}F(z) = 2R(z)(1+u)S(z) - R(z) + 6zS(z) + z$$

et une équation différentielle pour F d'ordre 2 et de degré 5 :

$$\begin{aligned}[48u^4zF'^4 - 8u^3(10uF - uz + 8z)F'^3 + 12u^2(2z - uz + 10uF)F'^2 - (6(-z+10F))u^2F' + 400u^2(1+u)F^2 \\ -10u(8zu^2 + 40uz + 32z - 1)F - uz + 4z^2u^3 + 36u^2z^2 + 96z^2u - z + 64z^2]F'' - 192zu^2(1+u)F'^3 \\ +16u(1+u)(-uz + 10Fu + 14z)F'^2 + 4(1+u)(-zu^2 + 10Fu^2 - 50Fu + uz - 16z)F' - (20(1+u))(u-3)F \\ +2z + 2zu^2 + 4uz = 0\end{aligned}$$

qui s'avère être essentiellement la même équation différentielle trouvée par Olivier Bernardi et Mireille Bousquet-Mélou.

Cartes quasi-cubiques

Ici $\mathfrak{C}$ désigne la classe des cartes **quasi-cubiques**. (Tous les sommets ont pour degré 3, sauf le sommet racine qui est de degré 1.)

On trouve une relation simple entre F et les séries arborescentes R et S :

$$10\frac{u}{1+u}F(z) = 2R(z)(1+u)S(z) - R(z) + 6zS(z) + z$$

(Y a-t-il une interprétation combinatoire ?)

et une équation différentielle pour F d'ordre 2 et de degré 5 :

$$\begin{aligned}[48u^4zF'^4 - 8u^3(10uF - uz + 8z)F'^3 + 12u^2(2z - uz + 10uF)F'^2 - (6(-z+10F))u^2F' + 400u^2(1+u)F^2 \\ -10u(8zu^2 + 40uz + 32z - 1)F - uz + 4z^2u^3 + 36u^2z^2 + 96z^2u - z + 64z^2]F'' - 192zu^2(1+u)F'^3 \\ +16u(1+u)(-uz + 10Fu + 14z)F'^2 + 4(1+u)(-zu^2 + 10Fu^2 - 50Fu + uz - 16z)F' - (20(1+u))(u-3)F \\ +2z + 2zu^2 + 4uz = 0\end{aligned}$$

qui s'avère être essentiellement la même équation différentielle trouvée par Olivier Bernardi et Mireille Bousquet-Mélou.

Cartes cubiques

Ici $\mathfrak{C}$ désigne la classe des cartes **cubiques**.

On trouve une relation simple entre F et les séries arborescentes R et S :

$$uF' + (2+2u)R(z) + (1+u)S(z)^2 = S(z) + 2z$$

(Y a-t-il une interprétation combinatoire ?)

et une énorme équation différentielle pour F' d'ordre 2 et de degré 15 (plus de 5000 termes !).

Quelques remarques

Les équations différentielles sont énormes.

Quelques remarques

Les équations différentielles sont énormes.

- Pour le cas $2p$-valent avec $p \geq 2$, les équations différentielles sont théoriquement calculables (elles sont d'ordre $2p$), mais non calculables en pratique.

Quelques remarques

Les équations différentielles sont énormes.

- Pour le cas $2p$-valent avec $p \geq 2$, les équations différentielles sont théoriquement calculables (elles sont d'ordre $2p$), mais non calculables en pratique.
- On a toutefois retrouvé l'équation différentielle pour les cartes quasi-cubiques.

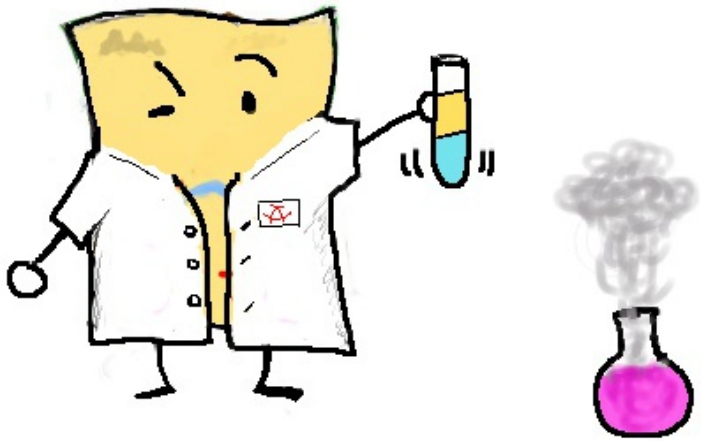
Quelques remarques

Les équations différentielles sont énormes.

- Pour le cas $2p$-valent avec $p \geq 2$, les équations différentielles sont théoriquement calculables (elles sont d'ordre $2p$), mais non calculables en pratique.
- On a toutefois retrouvé l'équation différentielle pour les cartes quasi-cubiques.

Les équations différentielles portent sur $\frac{\partial F}{\partial z}$ plutôt que sur F.

Comportement asymptotique et transition de phase



Rayon de convergence

Dans cette partie $\mathfrak{C}$ désigne les cartes tétravalentes.

On fixe $u \in [-1, +\infty[$.
On cherche à connaître l'asymptotique de $r_n(u)$ et $f_n(u)$ où

$$R(u,z) = \sum_{n\geq 0} r_n(u) z^n \quad \text{et} \quad F(u,z) = \sum_{n\geq 0} f_n(u) z^n$$

Rayon de convergence

Dans cette partie $\mathfrak{C}$ désigne les cartes tétravalentes.

On fixe $u \in [-1, +\infty[$.
On cherche à connaître l'asymptotique de $r_n(u)$ et $f_n(u)$ où

$$R(u,z) = \sum_{n\geq 0} r_n(u) z^n \quad \text{et} \quad F(u,z) = \sum_{n\geq 0} f_n(u) z^n$$

On peut montrer que $R(u,z)$ et $F(u,z)$ ont même rayon de convergence en tant que variable de z.
Notons-le ρ_u.

Rayon de convergence

Dans cette partie $\mathfrak{C}$ désigne les cartes tétravalentes.

On fixe $u \in [-1, +\infty[$.
On cherche à connaître l'asymptotique de $r_n(u)$ et $f_n(u)$ où

$$R(u,z) = \sum_{n\geq 0} r_n(u) z^n \quad \text{et} \quad F(u,z) = \sum_{n\geq 0} f_n(u) z^n$$

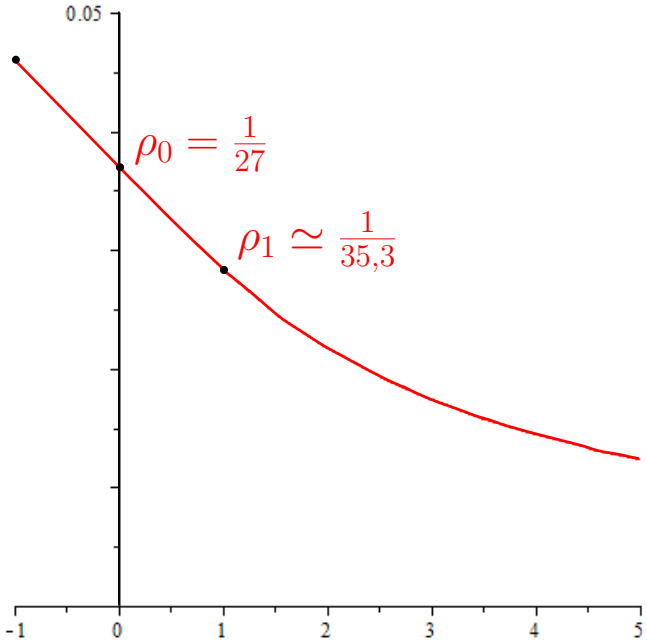
On peut montrer que $R(u,z)$ et $F(u,z)$ ont même rayon de convergence en tant que variable de z.
Notons-le ρ_u.

Remarque :

$$\lim_n |r_n(u)|^{\frac{1}{n}} = \lim_n |f_n(u)|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho_u}$$

Calcul du rayon de convergence

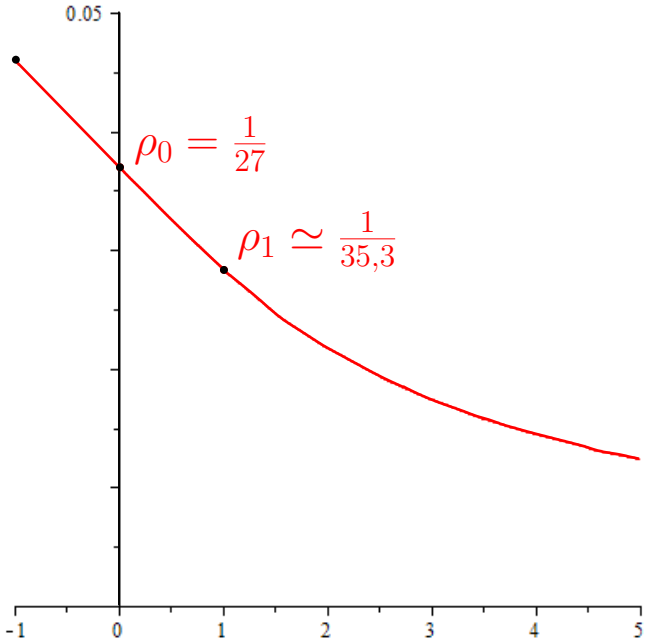
Traçons ρ_u en fonction de u :



Calcul du rayon de convergence

Traçons ρ_u en fonction de u :

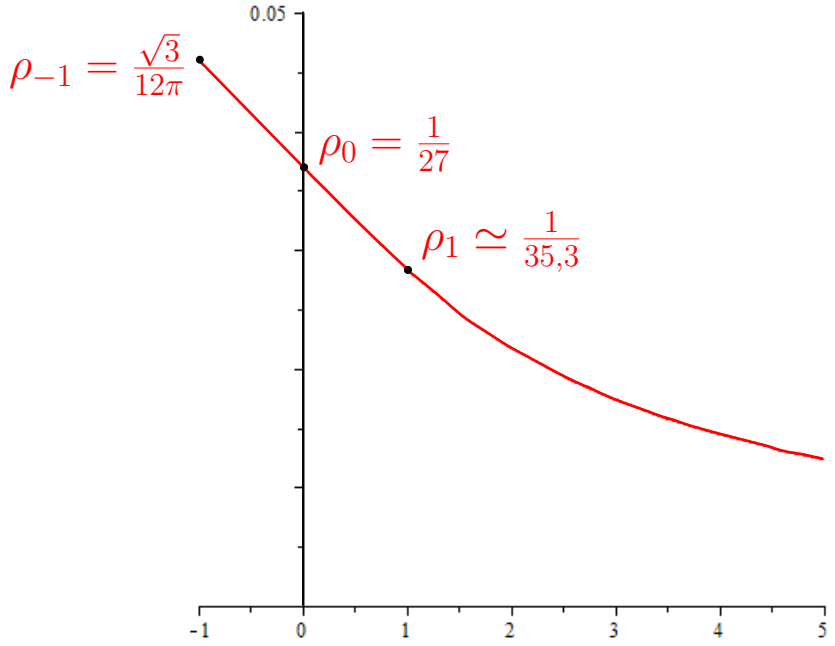
Pour $-1 \leq u \leq 0$,
ρ_u est affine !



Calcul du rayon de convergence

Traçons ρ_u en fonction de u :

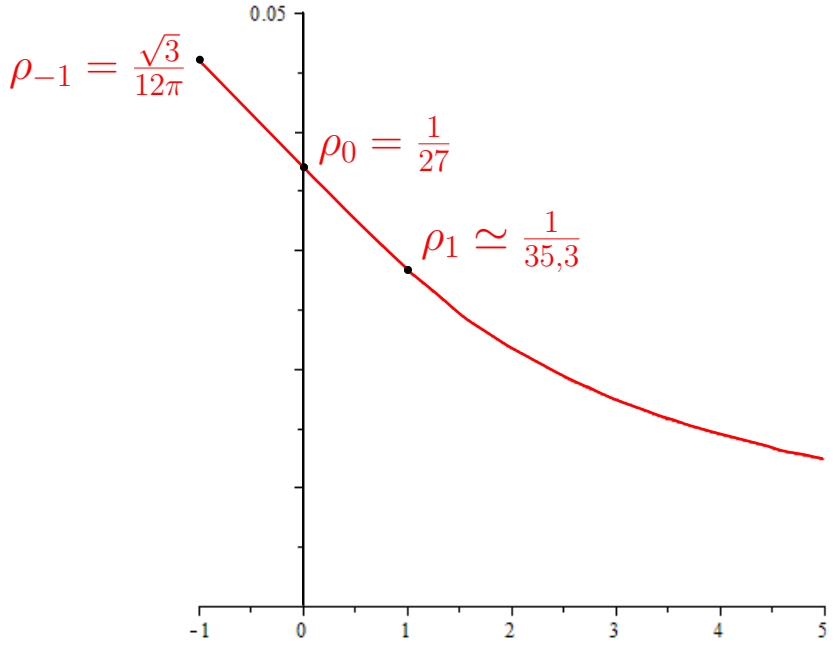
Pour $-1 \leq u \leq 0$,
ρ_u est affine !
$$\rho_u = \frac{1}{27} - u\left(\frac{\sqrt{3}}{12\pi} - \frac{1}{27}\right)$$



Calcul du rayon de convergence

Traçons ρ_u en fonction de u :

Pour $-1 \leq u \leq 0$,
ρ_u est affine !
$$\rho_u = \frac{1}{27} - u\left(\frac{\sqrt{3}}{12\pi} - \frac{1}{27}\right)$$



Corollaire

ρ_{-1} est transcendant : F n'est donc pas holonome.

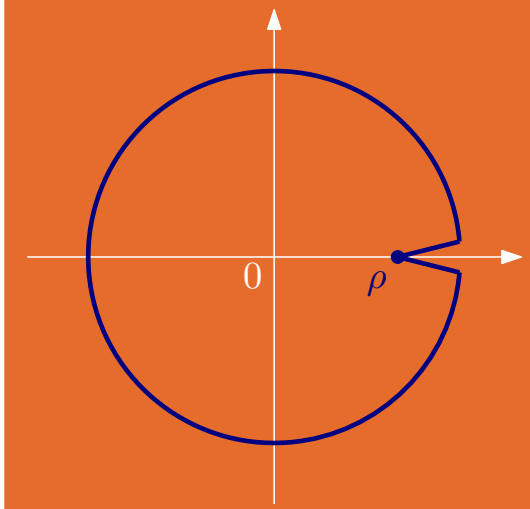
Théorème de transfert

Pour une analyse asymptotique plus fine : **Le théorème de transfert de Flajolet-Sedgewick.**

Théorème de transfert

Pour une analyse asymptotique plus fine : **Le théorème de transfert de Flajolet-Sedgewick.**

Théorème de transfert



Soient $\rho > 0$ et une fonction $f(z)$ analytique sur un domaine "de la forme d'un camembert" (voir ci-contre). Si $f(z)$ admet un équivalent lorsque $z \to \rho$ du type

$$f(z) \sim C\left(1-\frac{z}{\rho}\right)^{-\alpha}\left(\ln\left(\frac{1}{1-\frac{z}{\rho}}\right)\right)^{\beta},$$

alors on peut déterminer l'équivalent asymptotique de $[z^n]f(z)$ selon α et β.

Exemple : Si, lorsque $z \to \rho$, $f(z) \sim \left(1-\frac{z}{\rho}\right)^{-\alpha}\left(\ln\left(\frac{1}{1-\frac{z}{\rho}}\right)\right)^{\beta}$, avec $\alpha \notin -\mathbb{N}$ et $\beta \notin \mathbb{N}$, alors $[z^n]f(z) \sim \rho^{-n}\frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(\ln(n))^{\beta}$.

Comportement asymptotique

Concluons par des équivalents de $r_n(u)$ et $f_n(u)$:

	$-1 \leq u < 0$	$u = 0$	$u > 0$
$r_n(u)$	$\sim C_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^2 \ln(n)^2}$	$\sim C_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^2}$	$\sim C_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^{\frac{3}{2}}}$
$f_n(u)$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^3 \ln(n)^2}$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^3}$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^{\frac{5}{2}}}$

Du logarithme apparaît au dénominateur !

Comportement asymptotique

Concluons par des équivalents de $r_n(u)$ et $f_n(u)$:

	$-1 \leq u < 0$	$u = 0$	$u > 0$
$r_n(u)$	$\sim C_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^2 \ln(n)^2}$	$\sim C_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^2}$	$\sim C_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^{\frac{3}{2}}}$
$f_n(u)$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^3 \ln(n)^2}$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^3}$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^{\frac{5}{2}}}$

Du logarithme apparaît au dénominateur !

Corollaire

Pour $-1 \leq u < 0$ fixé, $F(u, z)$ n'est pas holonome en z.

L'avenir

Que reste-t-il à faire ?

- Finir d'étudier le comportement asymptotique pour le cas cubique.
- Généraliser ce qui précède à des classes de cartes aux degrés non bornés.
- Implémenter un algorithme de génération aléatoire.
- Considérer d'autres spécialisations du polynôme de Tutte.

L'avenir

Que reste-t-il à faire ?

- Finir d'étudier le comportement asymptotique pour le cas cubique.
- Généraliser ce qui précède à des classes de cartes aux degrés non bornés.
- Implémenter un algorithme de génération aléatoire.
- Considérer d'autres spécialisations du polynôme de Tutte.

L'avenir

Que reste-t-il à faire ?

- Finir d'étudier le comportement asymptotique pour le cas cubique.
- Généraliser ce qui précède à des classes de cartes aux degrés non bornés.
- Implémenter un algorithme de génération aléatoire.
- Considérer d'autres spécialisations du polynôme de Tutte.

L'avenir

Que reste-t-il à faire ?

- Finir d'étudier le comportement asymptotique pour le cas cubique.
- Généraliser ce qui précède à des classes de cartes aux degrés non bornés.
- Implémenter un algorithme de génération aléatoire.
- Considérer d'autres spécialisations du polynôme de Tutte.

Fin