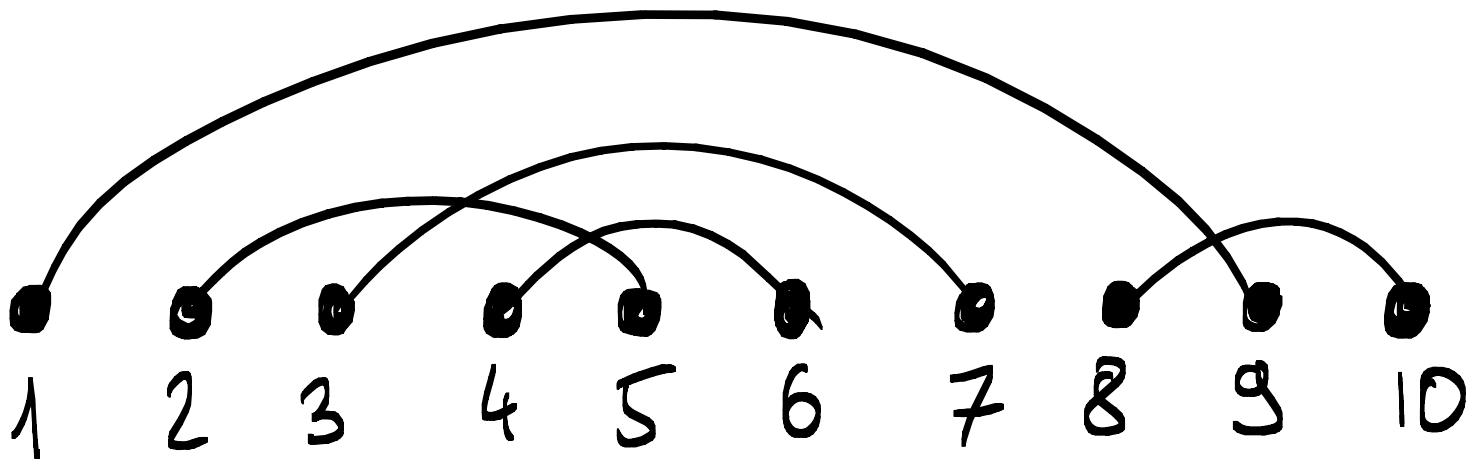

CORDES TERMINALES DANS LES DIAGRAMMES CONNEXES DE CORDES.

Julien COURTIEL (PIMS, UBC, Vancouver)
Karen YEATS (SFU, Vancouver)
(Travail en cours)

Séminaire Combinatoire Énumérative et Analytique, LIAFA

DÉFINITION

Diagramme de n cordes:
appariement de $\{1, 2, \dots, 2n\}$

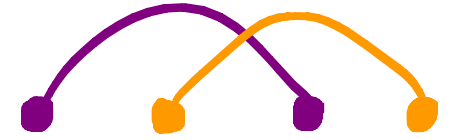


CONNEXITÉ & CORDES TERMINALES

graphe (orienté) d'intersection :

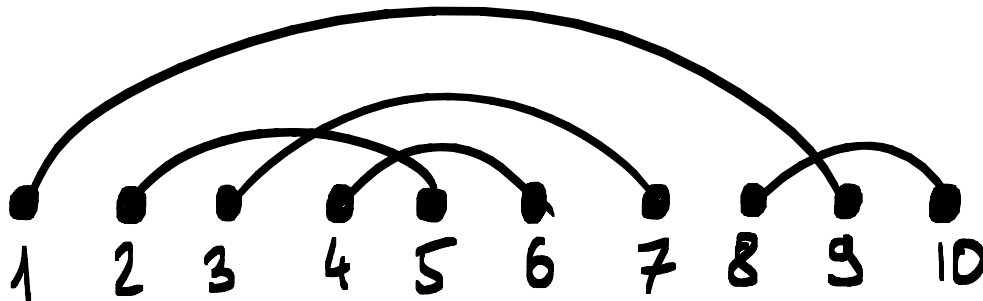


si



Ex:

diagramme



graphe d'intersection

{1,9}



{8,10}

{2,5}



{3,7}



{4,6}

CONNEXITÉ & CORDES TERMINALES



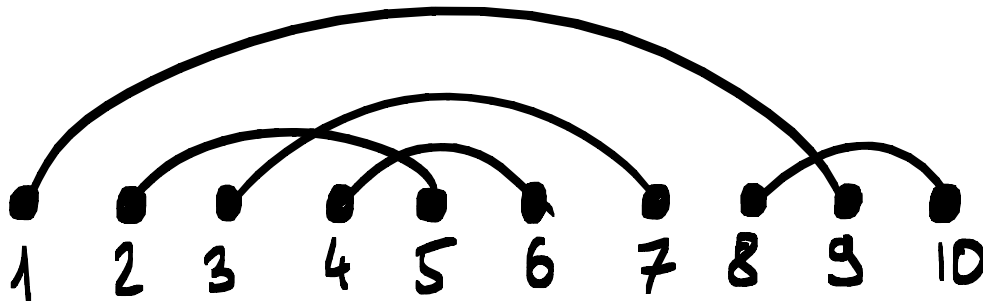
graphe (orienté) d'intersection :  si 

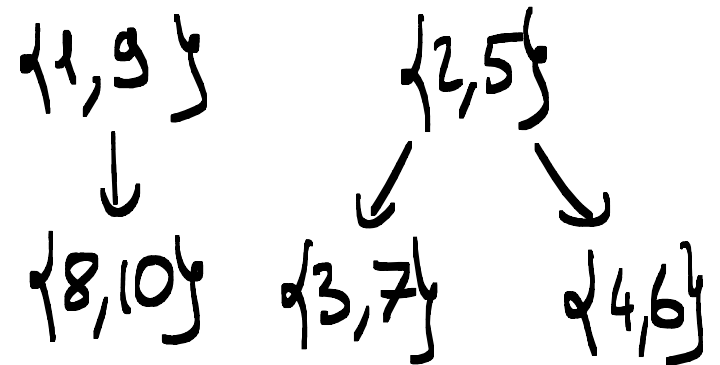
diagramme connexe de cordes = diagramme avec un graphe d'intersection connexe

Ex:

diagramme



graphe d'intersection



CONNEXITÉ & CORDES TERMINALES



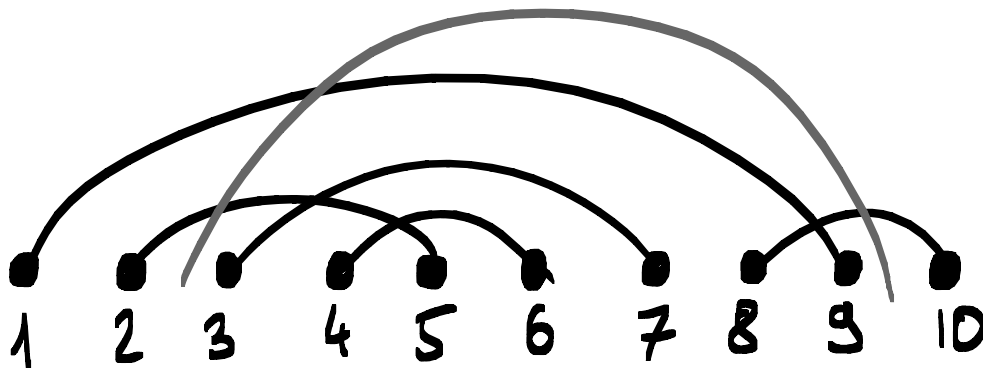
graphe (orienté) d'intersection :  si 

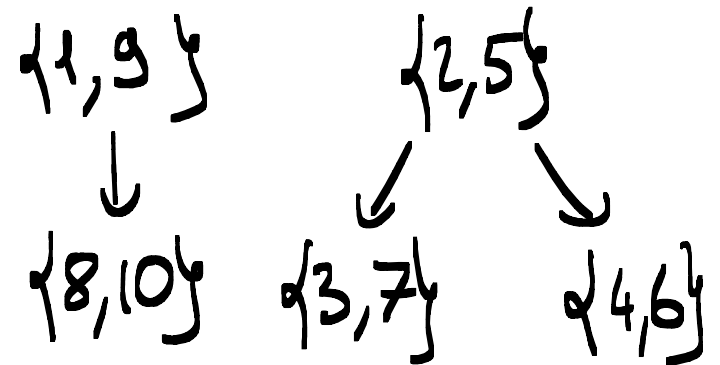
diagramme connexe de cordes = diagramme avec un graphe d'intersection connexe

Ex:

diagramme



graphe d'intersection



CONNEXITÉ & CORDES TERMINALES

graphe (orienté) d'intersection :



si

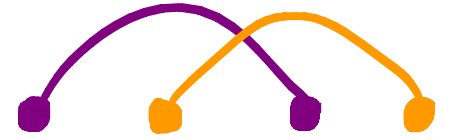
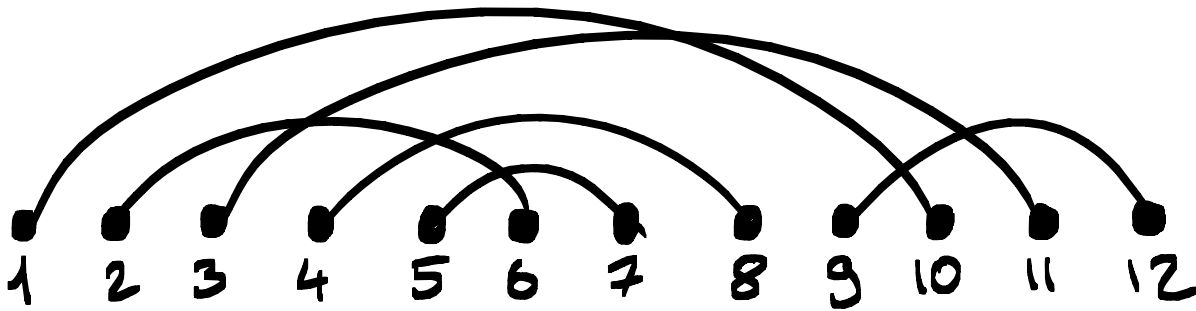


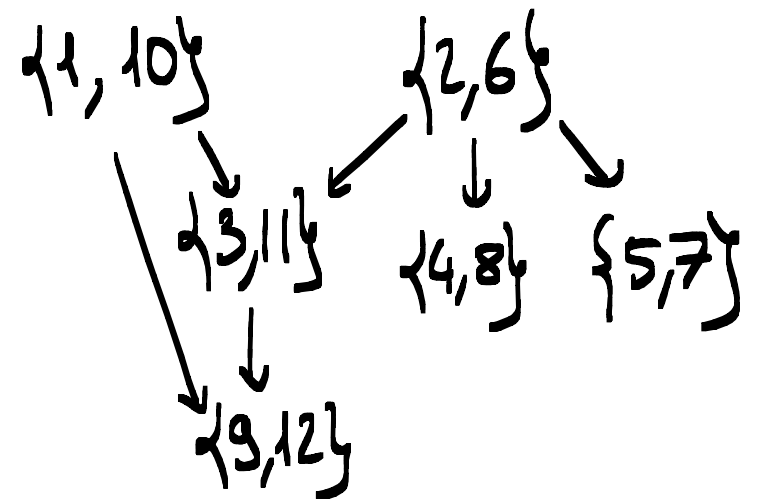
diagramme connexe de cordes = diagramme avec un graphe d'intersection connexe

Ex:

diagramme



graphe d'intersection



CONNEXITÉ & CORDES TERMINALES


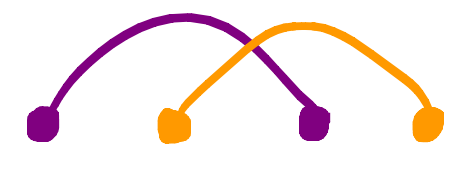
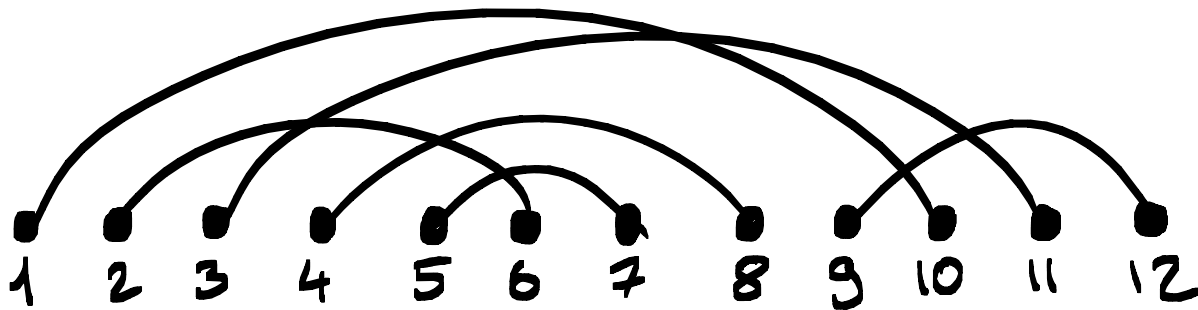
graphe (orienté) d'intersection :  si 

diagramme connexe de cordes = diagramme avec un graphe d'intersection connexe

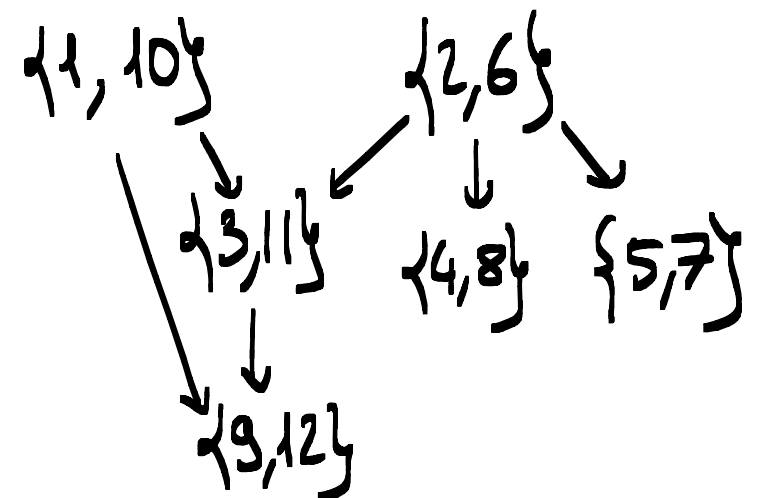
corde terminale = le sommet correspondant n'a pas d'arête sortante.

Ex:

diagramme



graphe d'intersection



CONNEXITÉ & CORDES TERMINALES



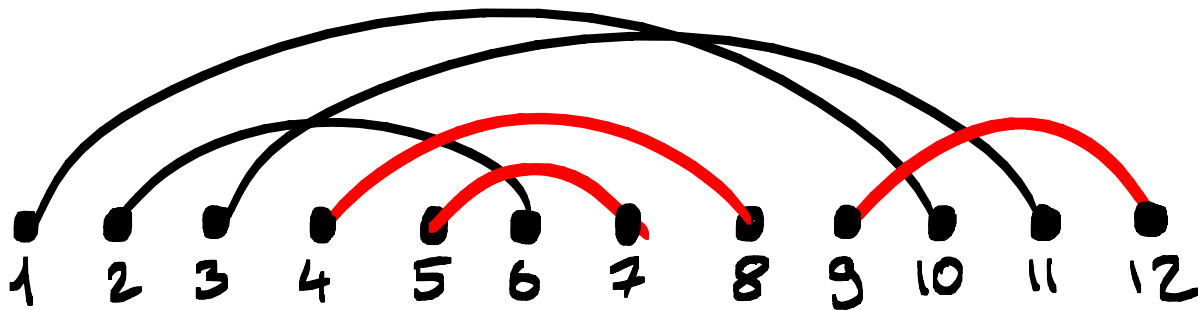
graphe (orienté) d'intersection :  si 

diagramme connexe de cordes = diagramme avec un graphe d'intersection connexe

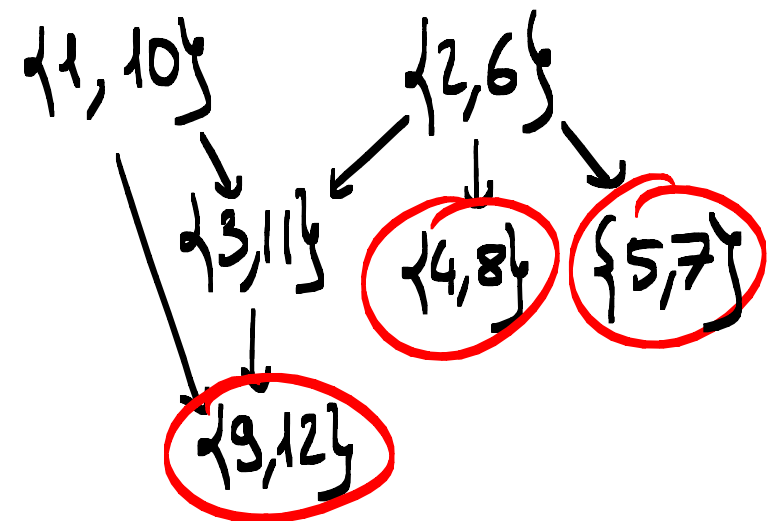
corde terminale = le sommet correspondant n'a pas d'arête sortante.

Ex:

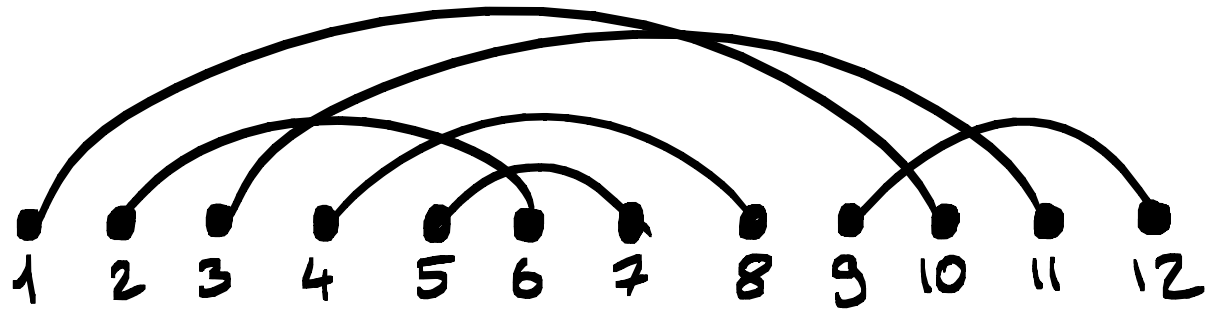
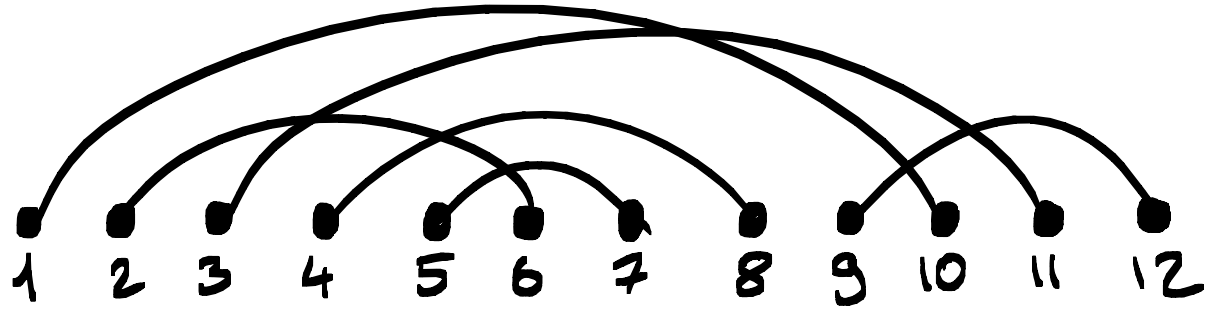
diagramme



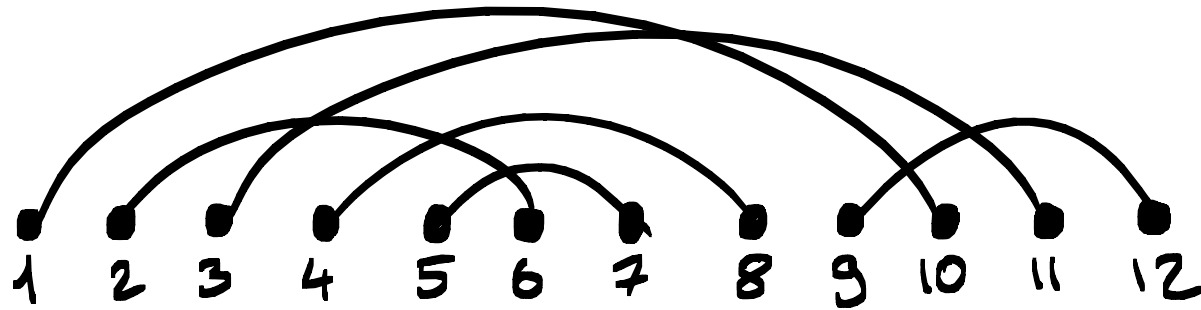
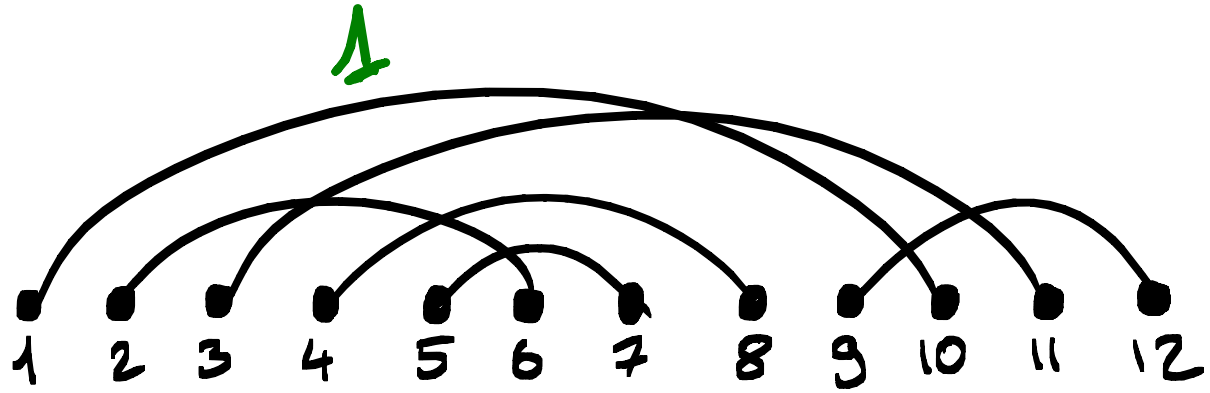
graphe d'intersection



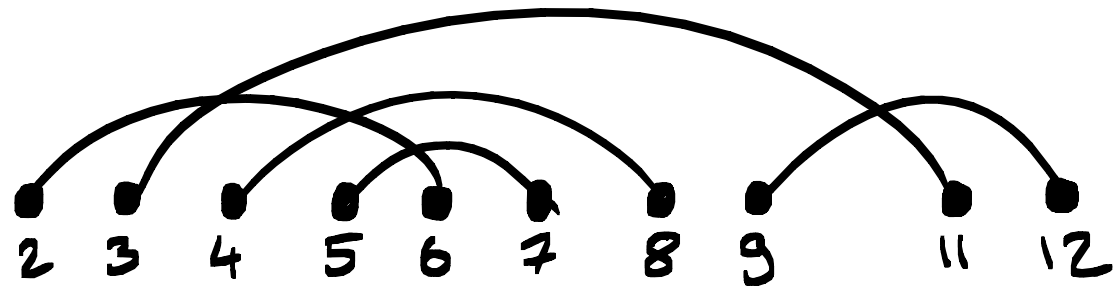
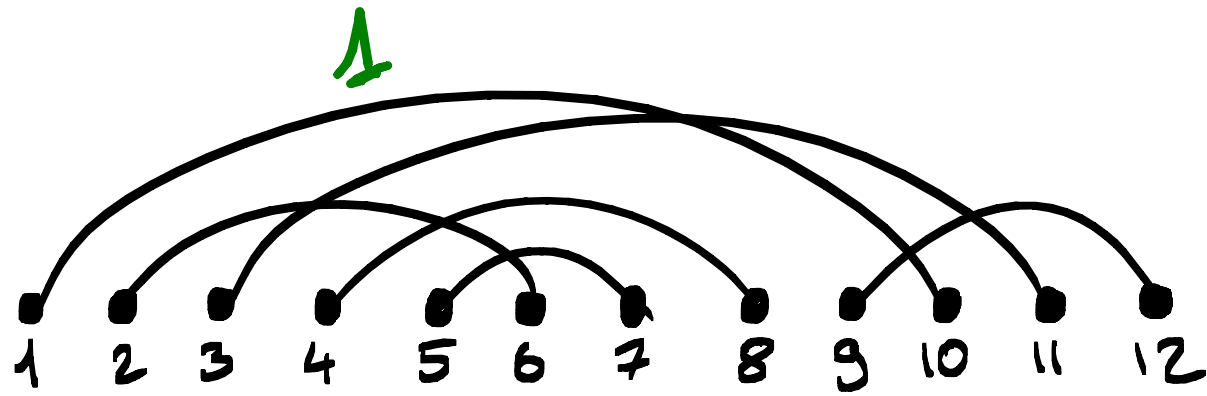
ORDRE D'INTERSECTION



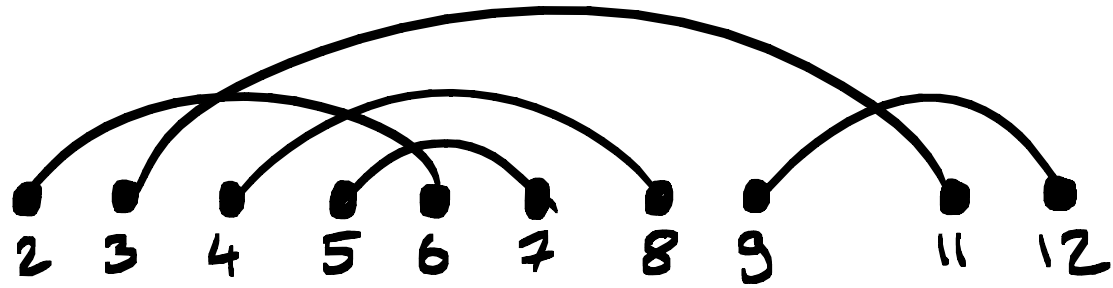
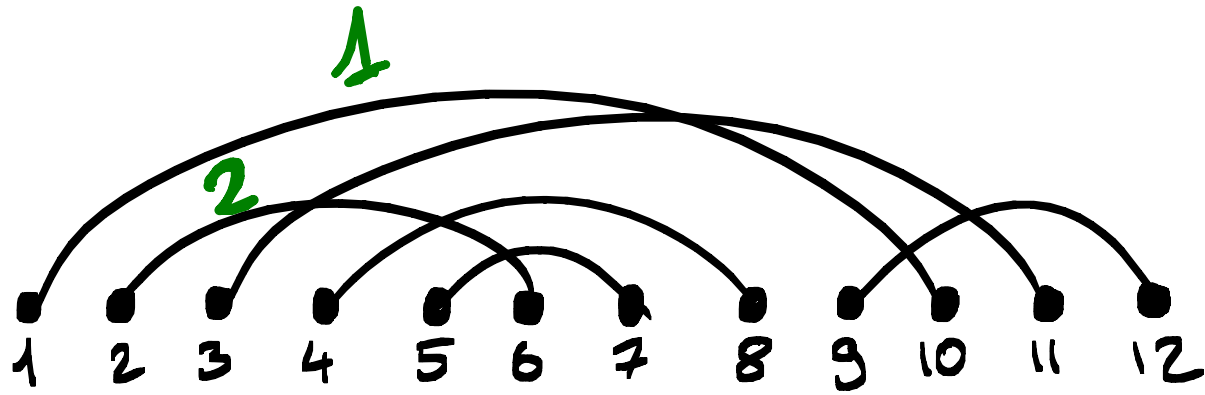
ORDRE D'INTERSECTION



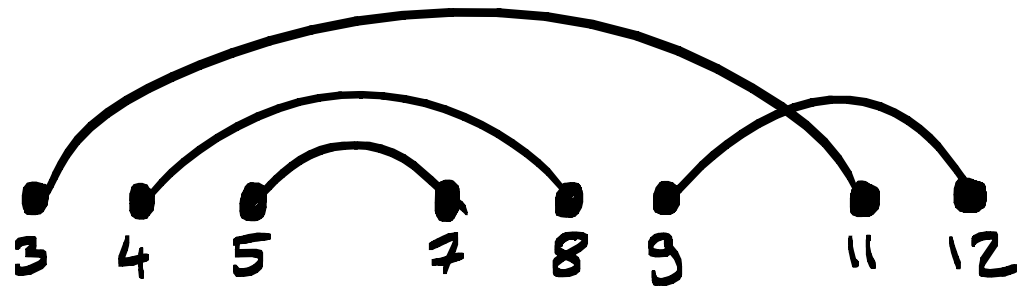
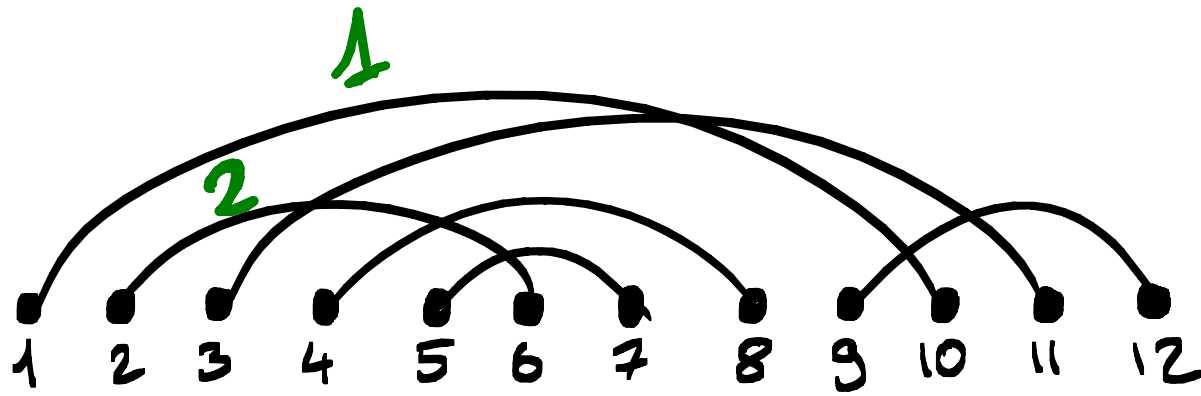
ORDRE D'INTERSECTION



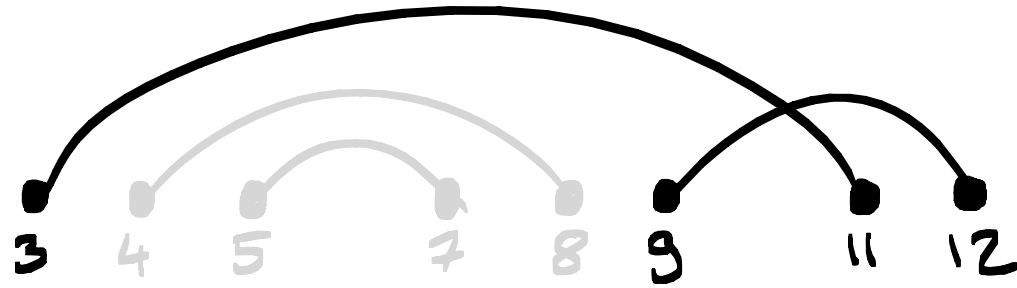
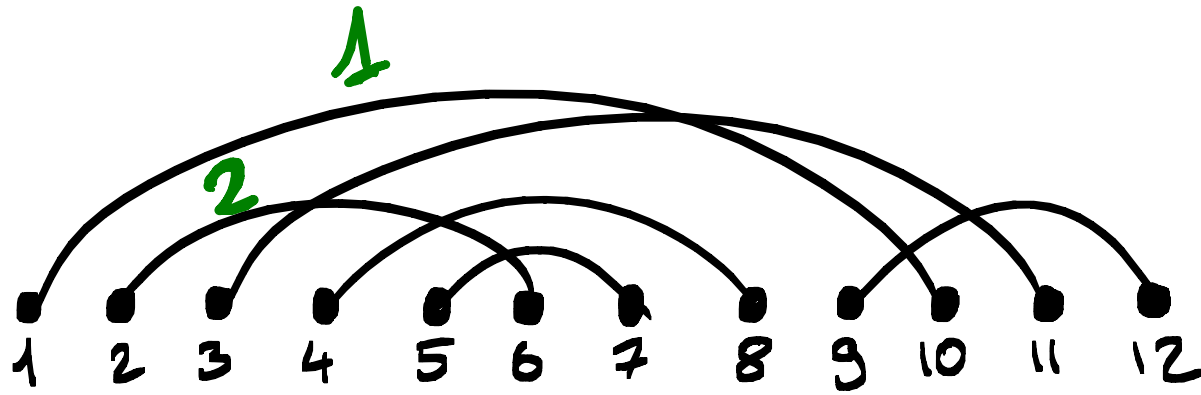
ORDRE D'INTERSECTION



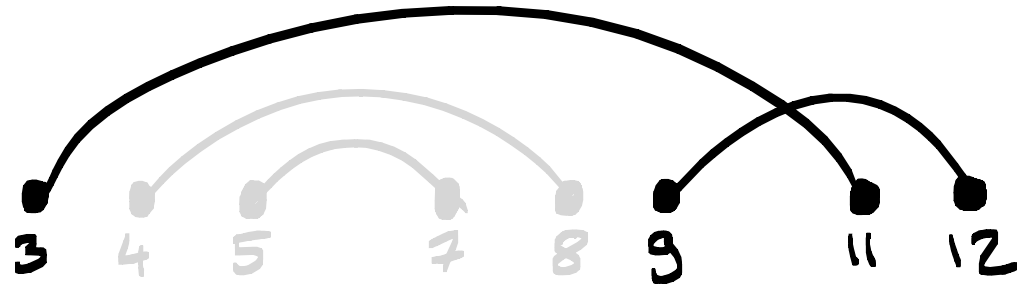
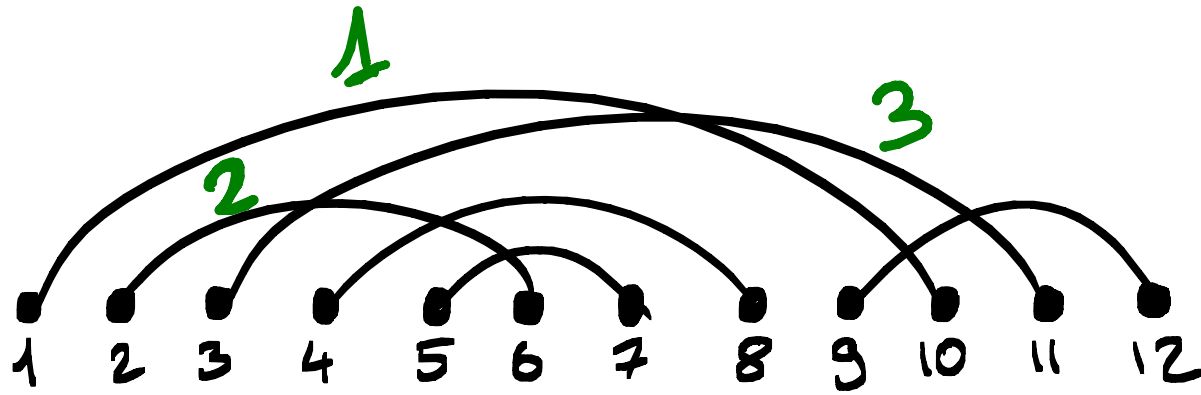
ORDRE D'INTERSECTION



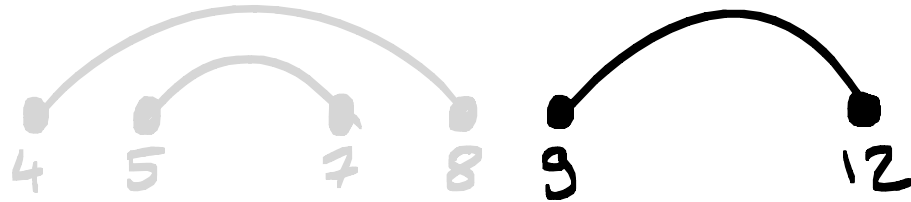
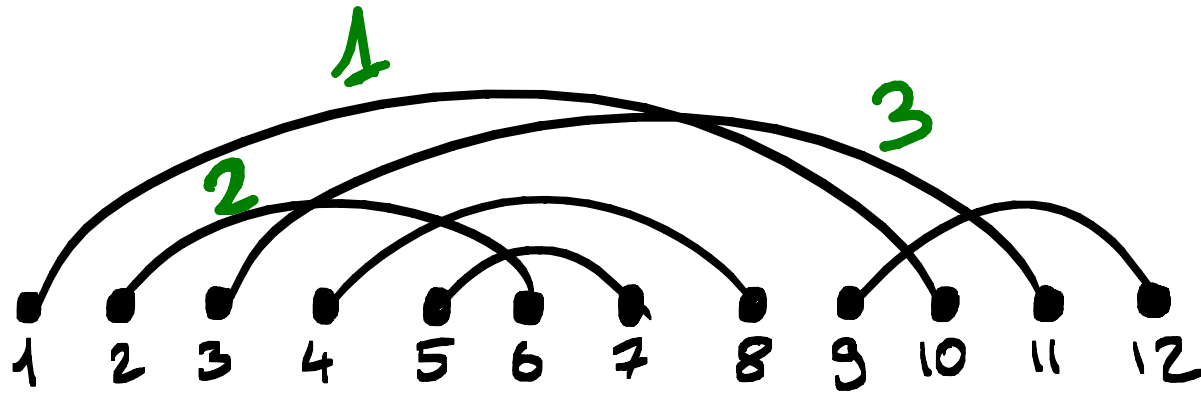
ORDRE D'INTERSECTION



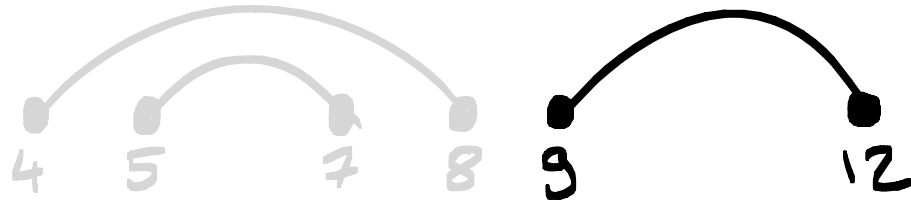
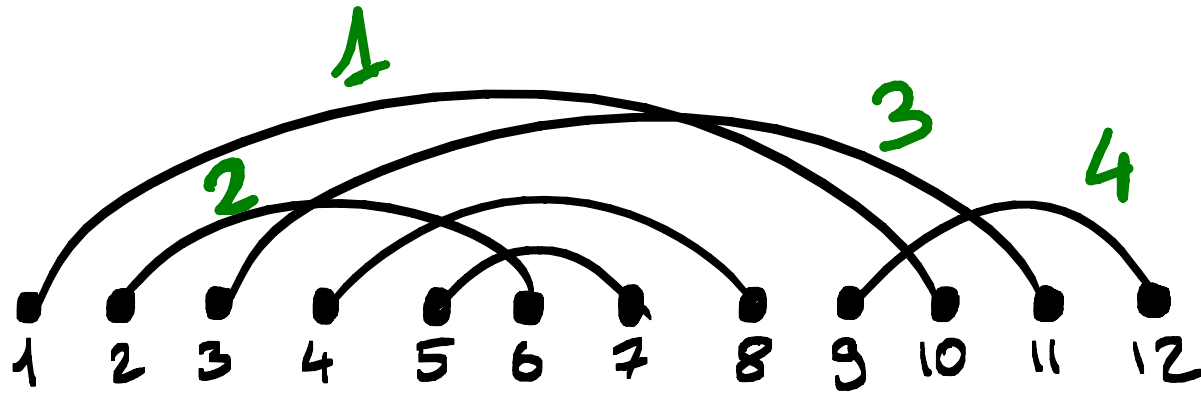
ORDRE D'INTERSECTION



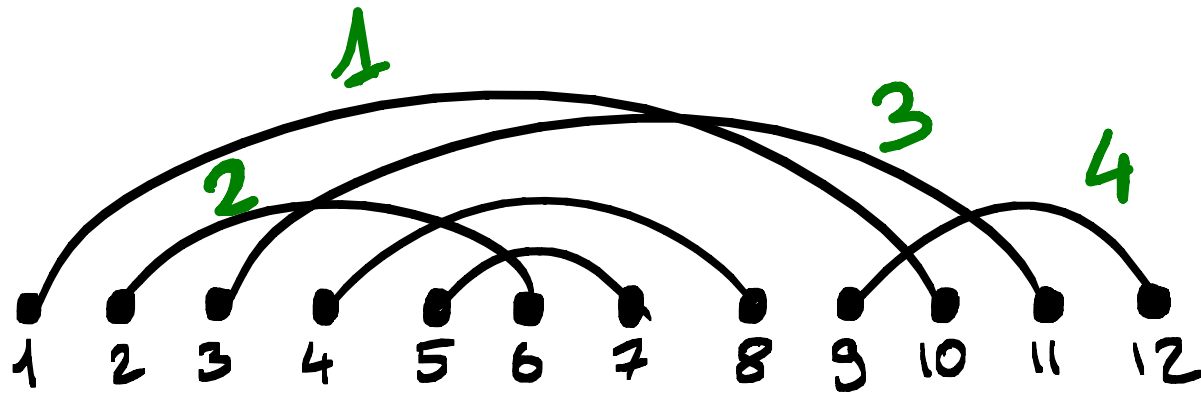
ORDRE D'INTERSECTION



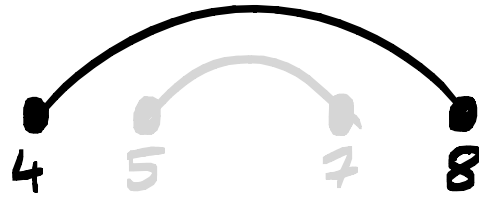
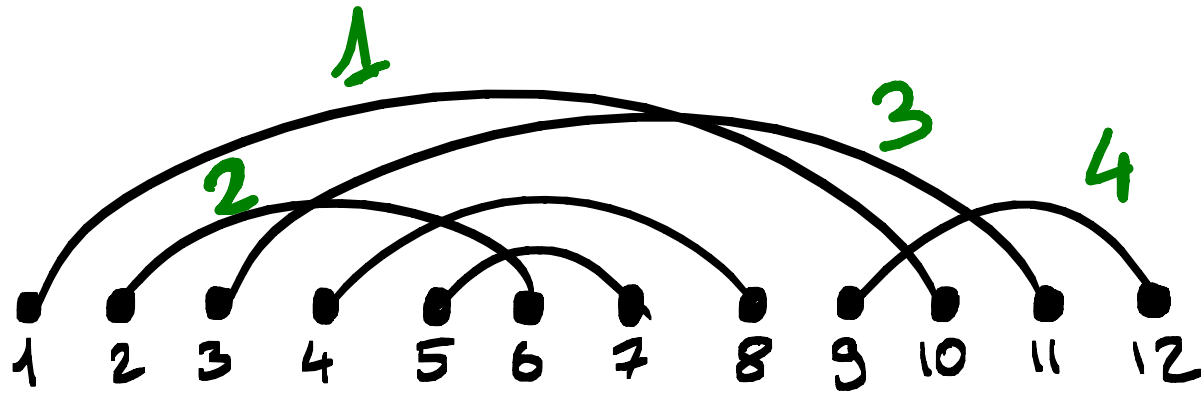
ORDRE D'INTERSECTION



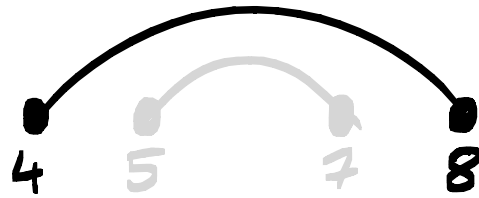
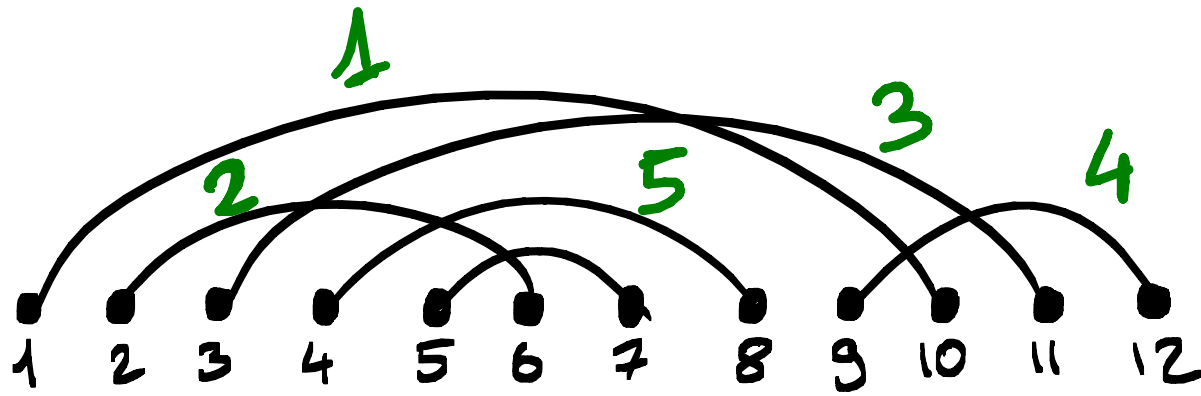
ORDRE D'INTERSECTION



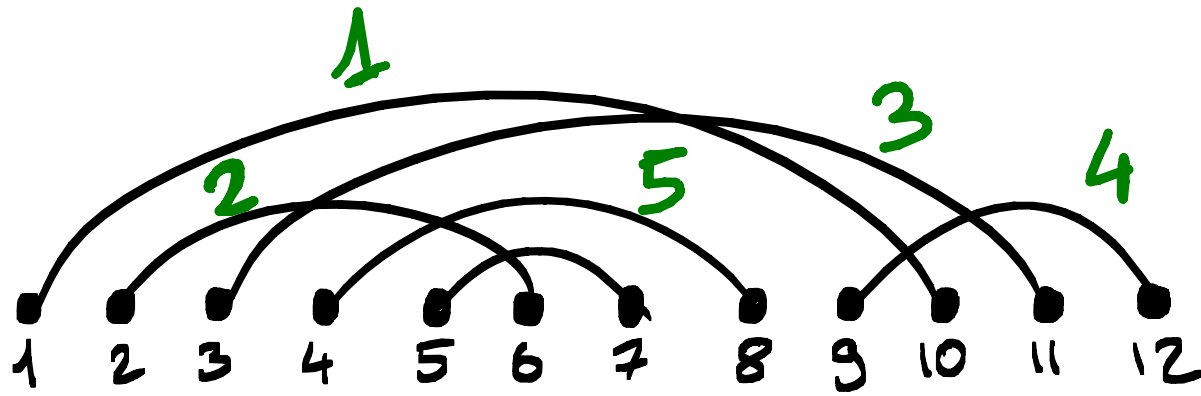
ORDRE D'INTERSECTION



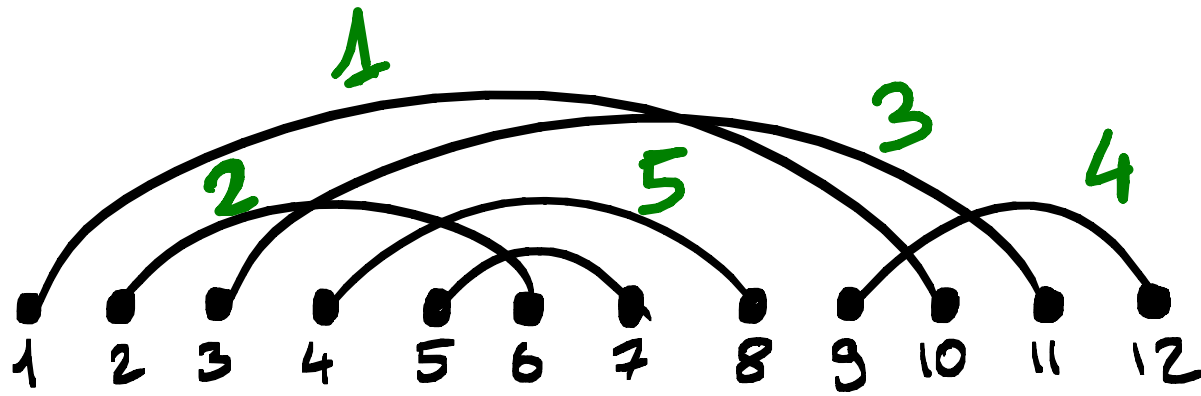
ORDRE D'INTERSECTION



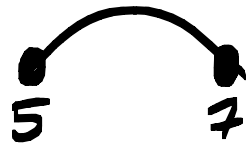
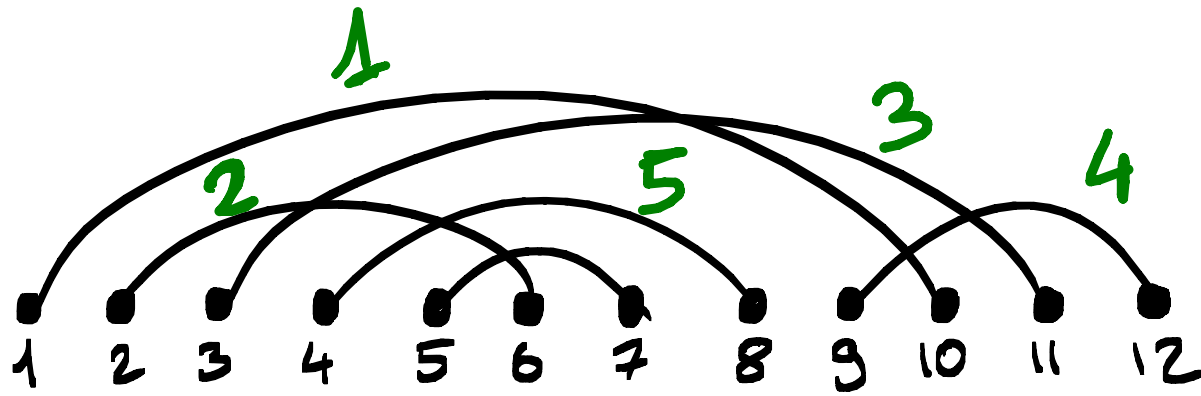
ORDRE D'INTERSECTION



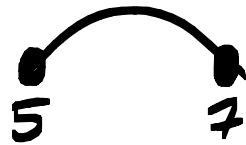
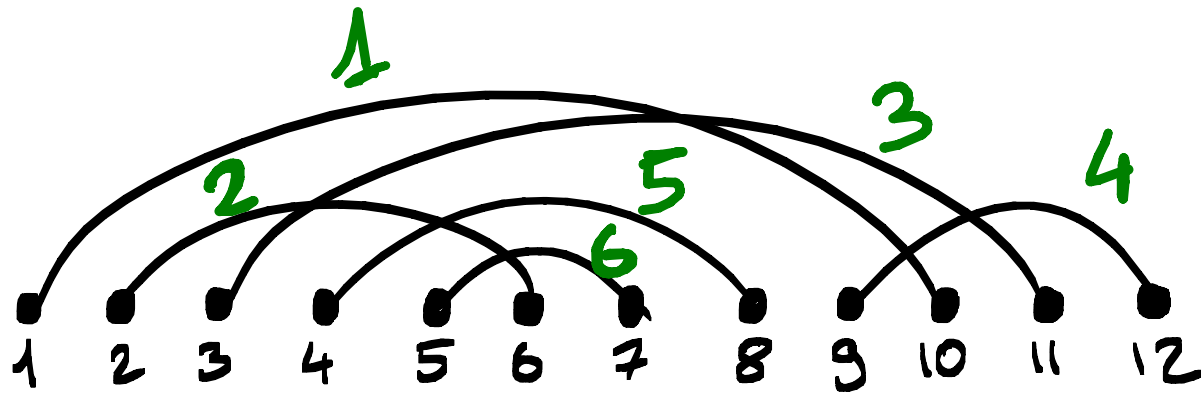
ORDRE D'INTERSECTION



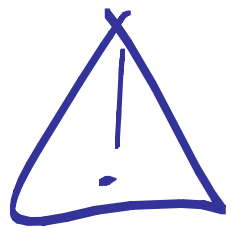
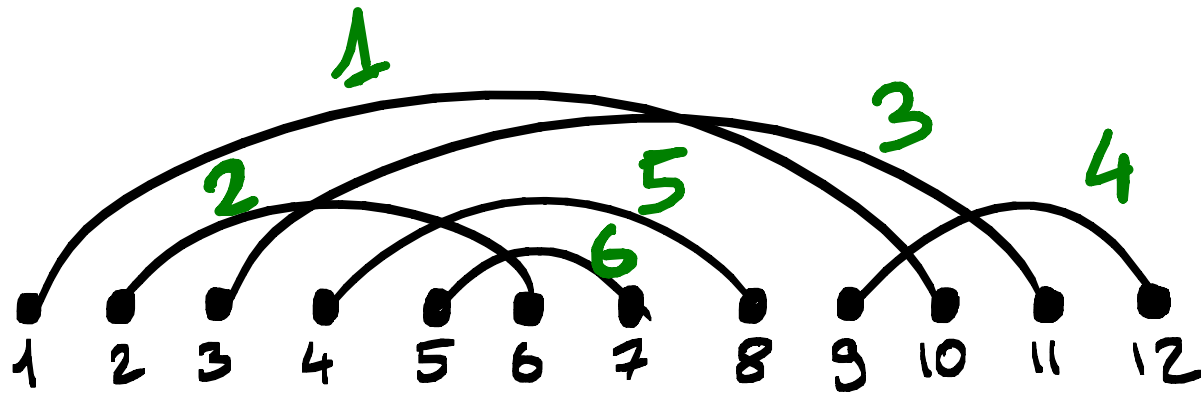
ORDRE D'INTERSECTION



ORDRE D'INTERSECTION



ORDRE D'INTERSECTION



ordre \neq ordre selon la
d'intersection plus petite extrémité

QUESTIONS QU'ON VA SE POSER

→ nombre moyen de cordes terminales?

→ position de la première corde terminale?

→ nombre de cordes adjacentes?

QUESTIONS QU'ON VA SE POSER

→ nombre moyen de cordes terminales?

→ position de la première corde terminale?

→ nombre de cordes adjacentes?

... mais pourquoi on se demande ça?

EQUATIONS DE DYSON-SCHWINGER

→ relations entre fonctions de Green en théorie des champs quantiques.

EQUATIONS DE DYSON-SCHWINGER

→ relations entre fonctions de Green en théorie des champs quantiques.

Théorème [Marie, Yeats] Les solutions à "certaines" équations de Dyson-Schwinger s'écrivent

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \frac{L^i}{i!} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{connexe de cordes}}} \alpha^{|C|} \beta_0^{|C|-k} \beta_{t_1-i} \beta_{t_2-t_1} \beta_{t_3-t_2} \dots \beta_{t_k-t_{k-1}}$$

où les cordes terminales ont pour positions $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ avec $t_1 \geq i$

où $\frac{\beta_0}{\rho} + \beta_1 + \beta_2 \rho + \beta_3 \rho^2 + \dots =$ série de Laurent d'une intégrale de Feynman régularisée

PARTIE ①
DE L'ÉNUMÉRATION
DES
DIAGRAMMES CONNEXES
DE CORDES

HISTORIQUE...

Sur l'énumération des diagrammes de cordes :

→ théorie des noeuds (invariants de Vassiliev)

→ modèle de graphes aléatoires

→ bio-informatique (structures secondaires d'ARN)

→ ...

HISTORIQUE...

Sur l'énumération des diagrammes de cordes :

→ théorie des noeuds (invariants de Vassiliev)

→ modèle de graphes aléatoires

→ bio-informatique (structures secondaires d'ARN)

→ ...

Sur l'énumération de diagrammes connexes de cordes :

3 papiers :

HISTORIQUE...

Sur l'énumération des diagrammes de cordes :

→ théorie des nœuds (invariants de Vassiliev)

→ modèle de graphes aléatoires

→ bio-informatique (structures secondaires d'ARN)

→ ...

Sur l'énumération de diagrammes connexes de cordes :

3 papiers :

1. [Touchard, 1952] = la préhistoire

HISTORIQUE...

Sur l'énumération des diagrammes de cordes :

→ théorie des noeuds (invariants de Vassiliev)

→ modèle de graphes aléatoires

→ bio-informatique (structures secondaires d'ARN)

→ ...

Sur l'énumération de diagrammes connexes de cordes :

3 papiers :

1 - [Touchard, 1952] = la préhistoire

2 - [Stein-Everett, 1978] = des formules!

HISTORIQUE...

Sur l'énumération des diagrammes de cordes :

→ théorie des nœuds (invariants de Vassiliev)

→ modèle de graphes aléatoires

→ bio-informatique (structures secondaires d'ARN)

→ ...

Sur l'énumération de diagrammes connexes de cordes :

3 papiers :

1 - [Touchard, 1952] = la préhistoire

2 - [Stein-Everett, 1978] = des formules!

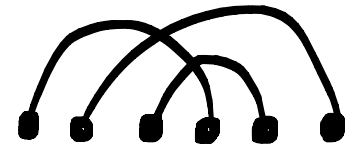
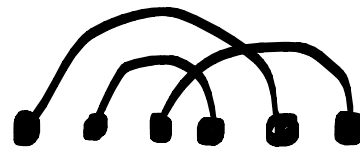
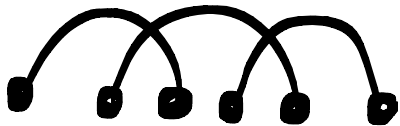
3 - [Flajolet-Noy, 2000] = de la combi analytique!!

FORMULE DE STEIN

C_n = nombre de diagrammes connexes à n cordes

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 1 \quad C_3 = 4 \quad C_4 = 27$$

Pour $n=3$,

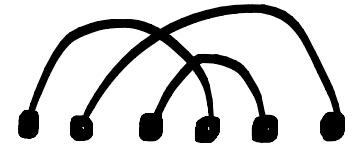
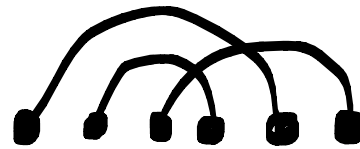
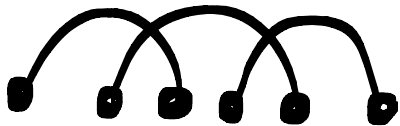


FORMULE DE STEIN

C_n = nombre de diagrammes connexes à n cordes

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 1 \quad C_3 = 4 \quad C_4 = 27 \quad C_5 = 248$$

Pour $n=3$,



FORMULE DE STEIN

C_n = nombre de diagrammes connexes à n cordes

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 1 \quad C_3 = 4 \quad C_4 = 27 \quad C_5 = 248$$

Pour $n=3$,



Théorème [Stein]

$$C_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} C_k \times C_{n-k}$$

FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$$

FORMULE DE STEIN

Théorème $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$

Corollaire: $c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

(chang. de var. $k \leftarrow n-k$)

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2k-1) c_{n-k} c_k$$

Corollaire: $c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

(chang. de var. $k \leftarrow n-k$)

⊕

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2k-1) c_{n-k} c_k$$

$$2c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2) c_k c_{n-k}$$

Corollaire: $c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$

FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

⊕

(chang. de var. $k \leftarrow n-k$)

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2k-1) c_{n-k} c_k$$

$$2c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2) c_k c_{n-k}$$

%2 (

Corollaire: $c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$

FORMULE DE STEIN

Théorème

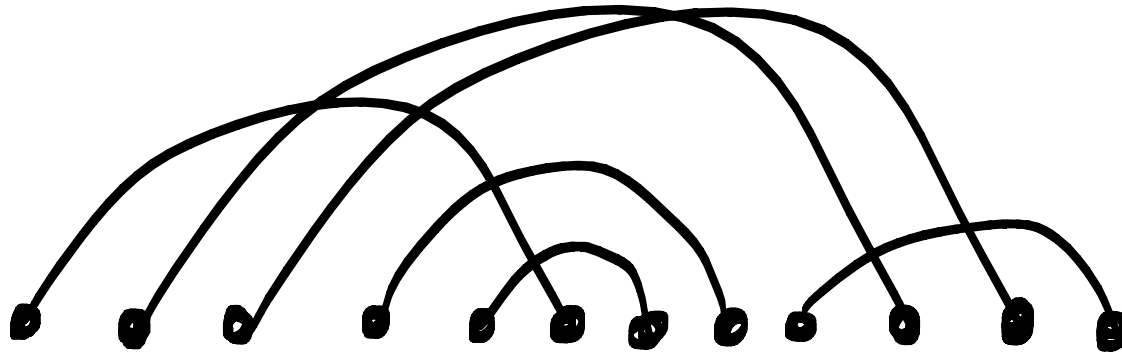
$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

Preuve:

FORMULE DE STEIN

Théorème $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$

Preuve:

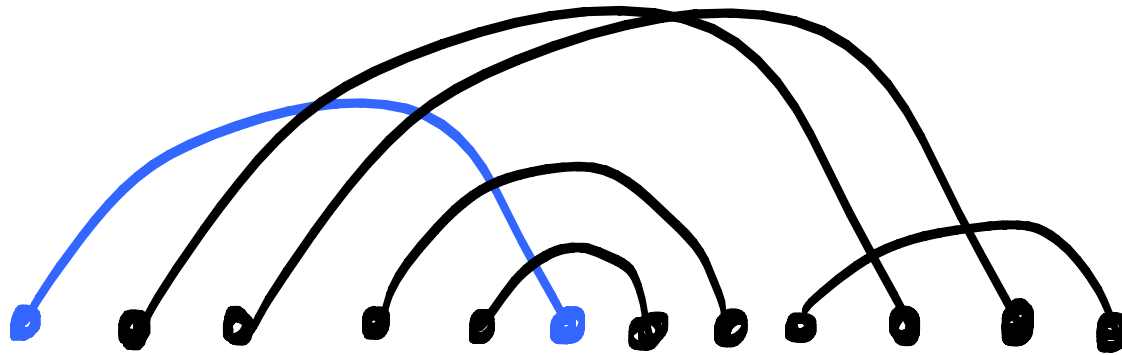


FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

Preuve:

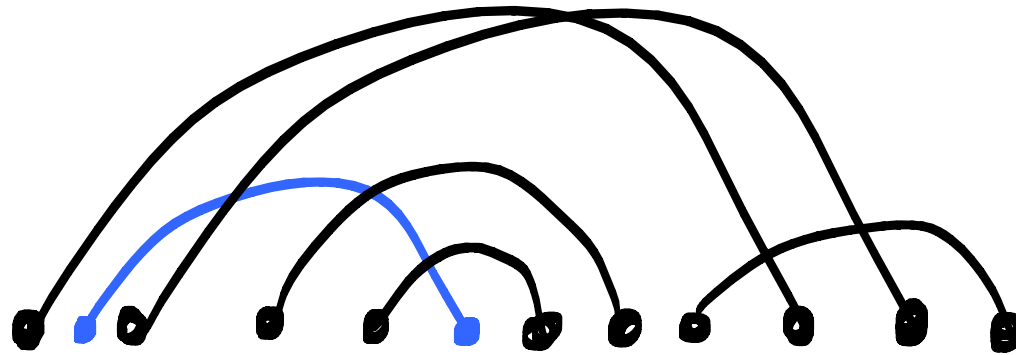


FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

Preuve:

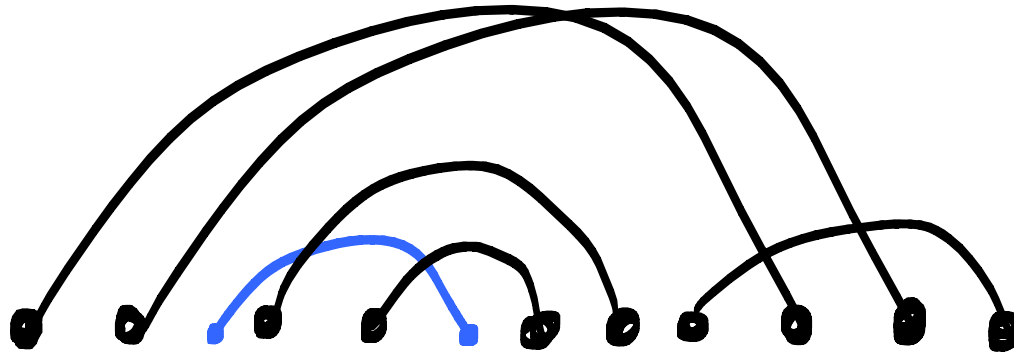


FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

Preuve:

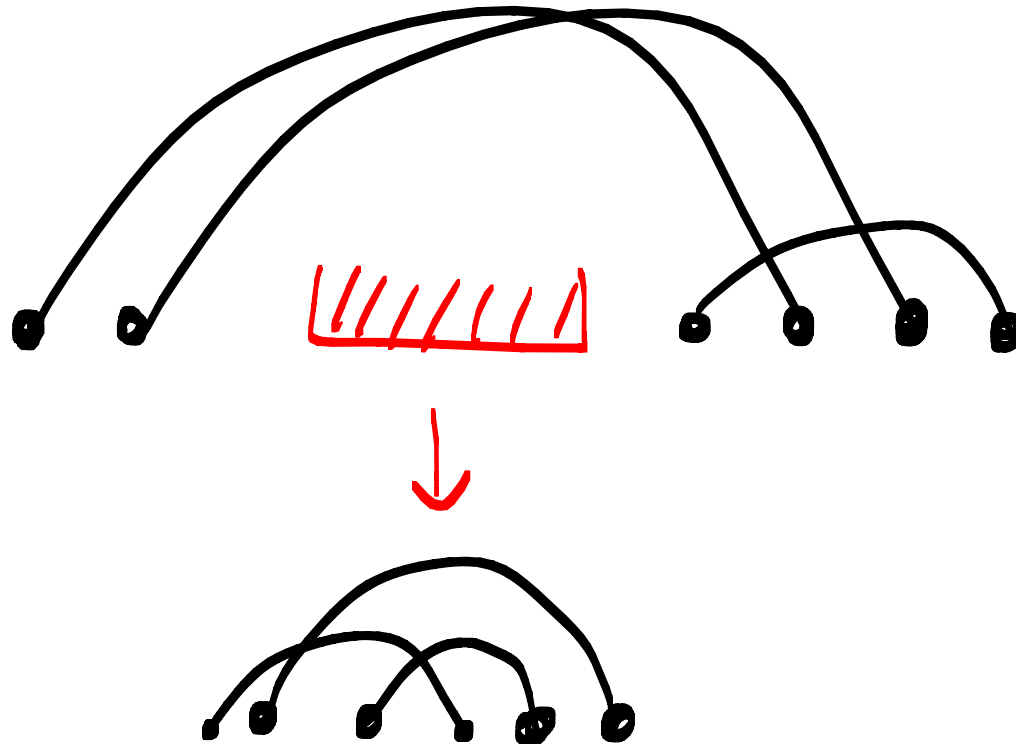


FORMULE DE STEIN

Théorème

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

Preuve:



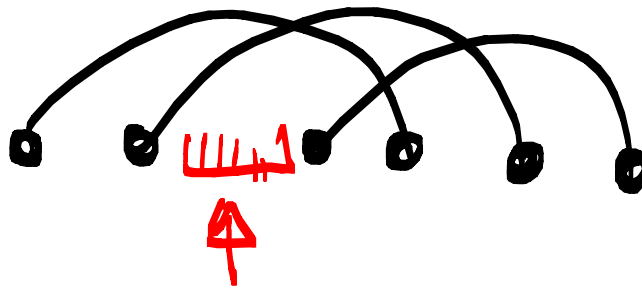
FORMULE DE STEIN

Théorème

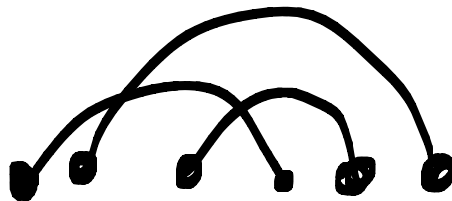
$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) c_k c_{n-k}$$

Preuve:

si k cordes



$2k-1$ emplacements possibles



c_n VS CATALAN

DIAGRAMMES
CONNEXES

$$c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

CATALAN

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

c_n VS CATALAN

DIAGRAMMES
CONNEXES

$$c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

$$c_n \geq (n-1) \times c_1 \times c_{n-1}$$

CATALAN

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

c_n VS CATALAN

DIAGRAMMES
CONNEXES

$$c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

$$c_n \geq (n-1) \times c_1 \times c_{n-1}$$

$$c_n \geq (n-1)!$$

CATALAN

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

c_n VS CATALAN

DIAGRAMMES
CONNEXES

$$c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

$$c_n \geq (n-1) \times c_1 \times c_{n-1}$$

$$c_n \geq (n-1)!$$

→ pas analytique

CATALAN

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

→ analytique

c_n VS CATALAN

DIAGRAMMES
CONNEXES

$$c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

$$c_n \geq (n-1) \times c_1 \times c_{n-1}$$
$$c_n \geq (n-1)!$$

→ pas analytique

Conséquence: - Les séries génératrices ordinaires
ne sont pas adaptées.

CATALAN

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

→ analytique

c_n VS CATALAN

DIAGRAMMES
CONNEXES

$$c_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

$$c_n \geq (n-1) \times c_1 \times c_{n-1}$$
$$c_n \geq (n-1)!$$

→ pas analytique

↑
Conséquence: - Les séries génératrices ordinaires
ne sont pas adaptées.

- Mais il n'existe pas de relations simples liant
les séries génératrices exponentielles...

CATALAN

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$$

→ analytique

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

[Stein-Everett]

$$c_n \sim \frac{1}{e} \times (2n-1)!!$$

Conséquence : $\mathbb{P}(\text{diagramme soit connexe}) \rightarrow \frac{1}{e}$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

[Stein-Everett]

$$c_n \sim \frac{1}{e} \times (2n-1)!!$$

Conséquence : $\mathbb{P}(\text{diagramme soit connexe}) \rightarrow \frac{1}{e}$

[Flajolet-Noy]

- Nbe de composantes connexes - 1 \sim Poisson(1)
- n - taille de la \oplus large composante \sim Poisson(1)

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

[Stein-Everett]

$$c_n \sim \frac{1}{e} \times (2n-1)!!$$

Conséquence : $\mathbb{P}(\text{diagramme soit connexe}) \rightarrow \frac{1}{e}$

[Flajolet-Noy]

- Nbe de composantes connexes - 1 \sim Poisson(1)
 - n - taille de la \oplus large composante \sim Poisson(1)
-

Notre modeste contribution : $\frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

PARTIE ②

ENUMERATION
DES CORDES
TERMINALES

TERMES LOG-DOMINANTS.

Retour sur les solutions des éq. de D-S :

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \frac{L^i}{i!} \sum_{\substack{\text{C diagramme} \\ \text{connexe de cordes} \\ \text{où les cordes terminées} \\ \text{ont pour positions } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{avec } t_1 \geq i}} x^{|\mathcal{C}|} b_0^{|\mathcal{C}|-k} b_{t_1-i} b_{t_2-t_1} b_{t_3-t_2} \dots b_{t_k-t_{k-1}}$$

$\underline{Q}^0 : [x^m] G(x, L) = \text{polynôme en } L \text{ de degré } m$

Coefficients dominants? (=termes log-dominants)

TERMES LOG-DOMINANTS.

Retour sur les solutions des éq. de D-S :

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \frac{L^i}{i!} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{connexe de cordes} \\ \text{où les cordes terminées} \\ \text{ont pour positions } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{avec } t_1 \geq i}} x^{|C|} b_0^{|C|-k} b_{t_1-i} b_{t_2-t_1} b_{t_3-t_2} \dots b_{t_k-t_{k-1}}$$

Q^o : $[x^m] G(x, L)$ = polynôme en L de degré m

Coefficients dominants? (=termes log-dominants)

La somme est indexée par les C tels que $t_1 \geq |C| - k$
pour k petit.

UNE SEULE CORDE TERMINALE

nombre de diagrammes C à n cordes avec $t_1 \geq n$?

UNE SEULE CORDE TERMINALE

nombre de diagrammes C à n cordes avec $t_1 \geq n$

= nombre de diagrammes à n cordes dont 1 seule terminale

= ?

UNE SEULE CORDE TERMINALE

nombre de diagrammes C à n cordes avec $t_1 \geq n$

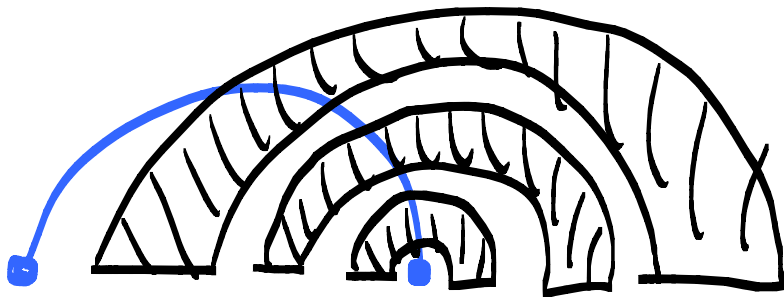
= nombre de diagrammes à n cordes dont 1 seule terminale

$$= (2n - 3)!!$$

UNE SEULE CORDE TERMINALE

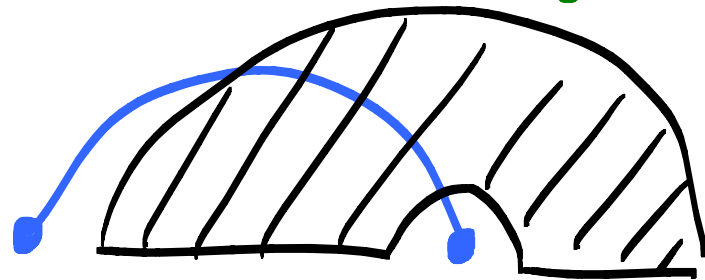
nombre de diagrammes C à n cordes avec $t_1 \geq n$
= nombre de diagrammes à n cordes dont 1 seule terminale
= $(2n - 3)!!$

Preuve:



↑
impossible

1 seul bloc de taille $n-1$



↑
 $2n-3$ emplacements possibles

FORME DES TERMES LOG-DOMINANTS

→ Il existe une relation de récurrence reliant les termes log-dominants

Théorème : Pour $k \geq 0$, le nombre de diagrammes C connexes à n cordes telle que la première corde terminale est à la position $n-k$ est équivalent à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{k+1} k!} \times \frac{\ln(n)^k}{n! n^{\frac{3}{2}}}$$

NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

$C(z, u) =$ série génératrice (ordinaire)
des diagrammes connexes
avec un poids z par corde
et un poids u par corde terminale

NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

$C(z, u) =$ série génératrice (ordinaire)
des diagrammes connexes
avec un poids z par corde
et un poids u par corde terminale

Spécification :



NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

$C(z, u) =$ série génératrice (ordinaire)
des diagrammes connexes
avec un poids z par corde
et un poids u par corde terminale

Spécification :

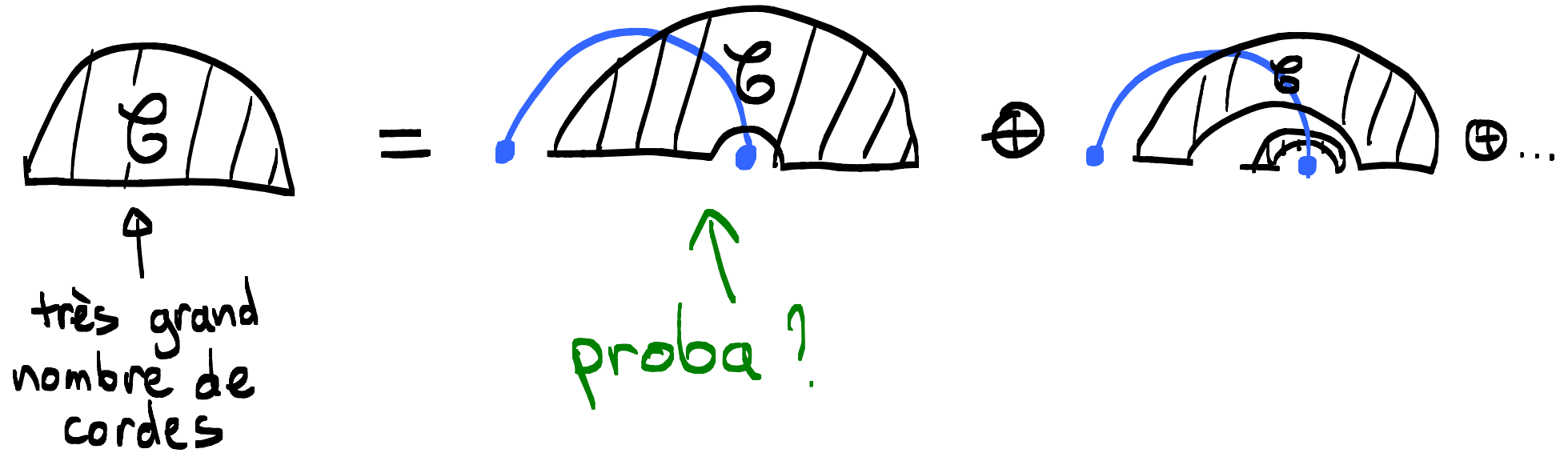


$$C(z, u) = zu + z \frac{2z \frac{\partial C}{\partial z}(z, u) - C(z)}{1 - 2z \frac{\partial C}{\partial z}(z, u) + C(z)}$$

impossible
à résoudre?

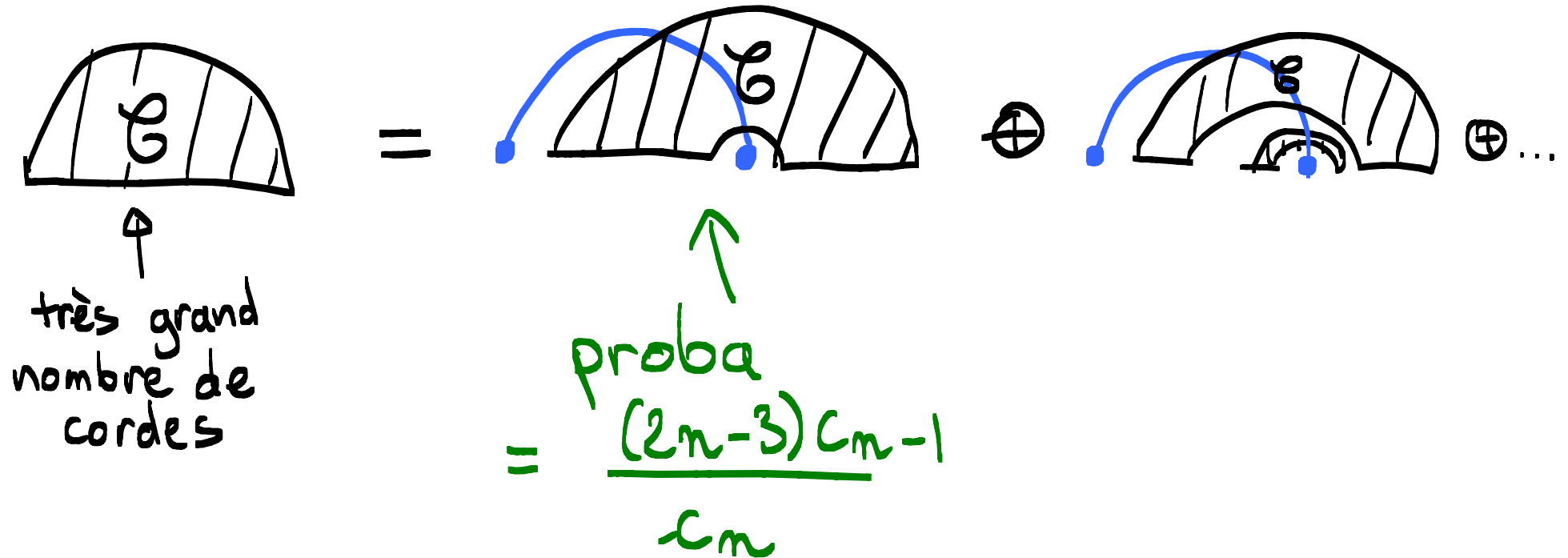
NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Idée:



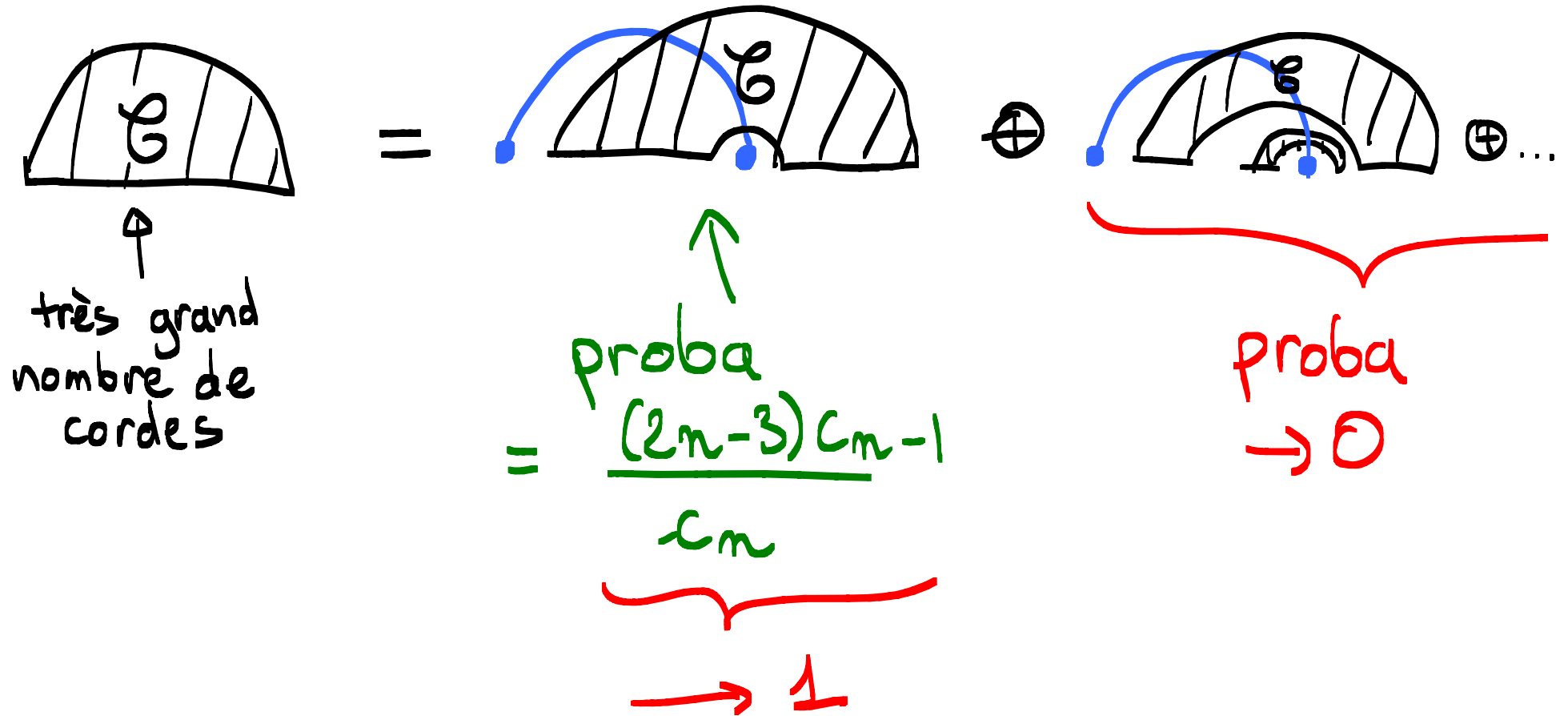
NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Idée:



NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

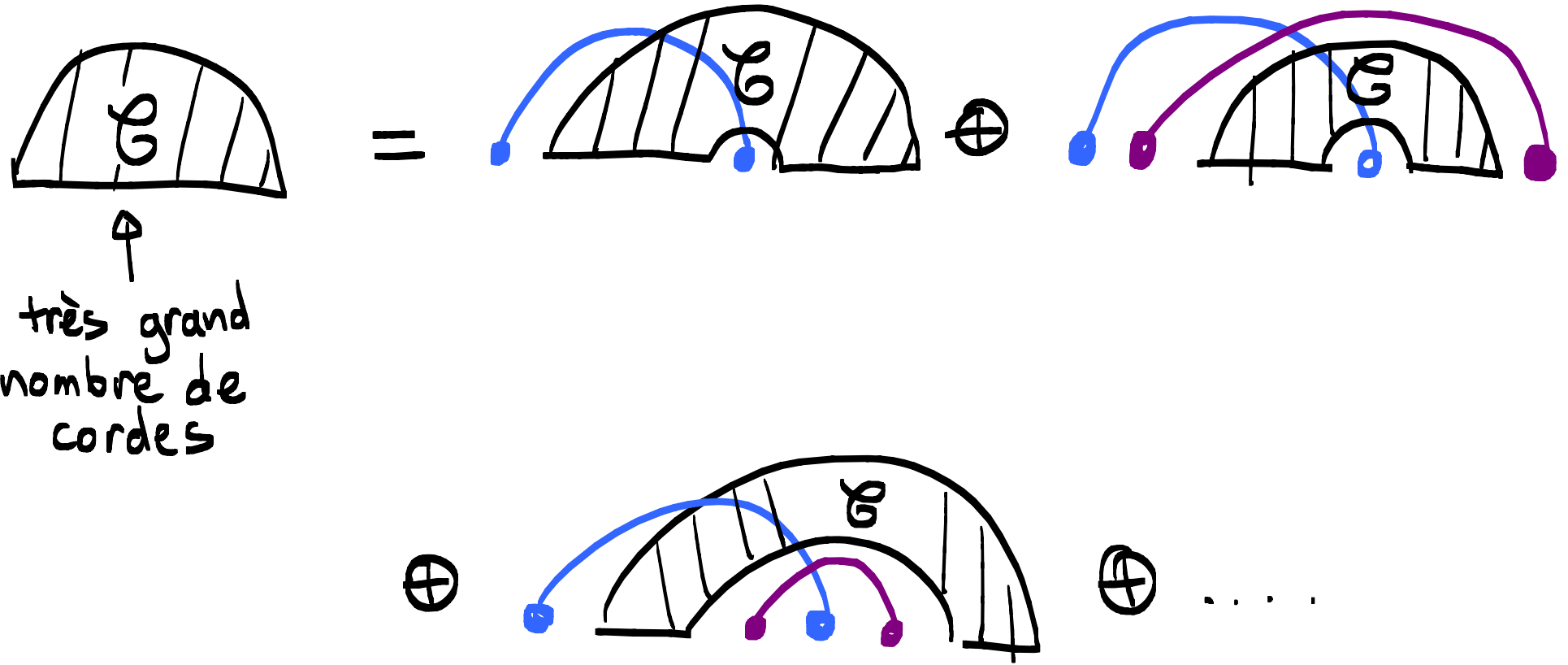
Idée:



Intéressant mais pas suffisant...

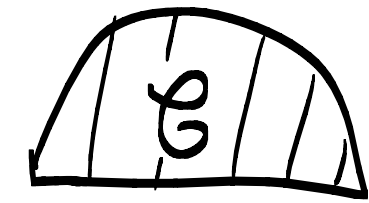
NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Idée:

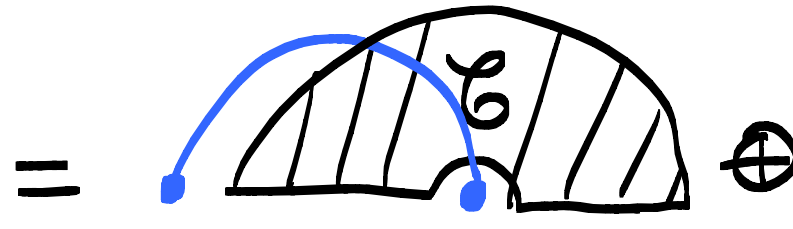


NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

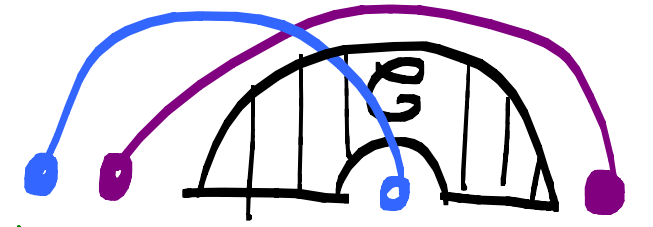
Idée:



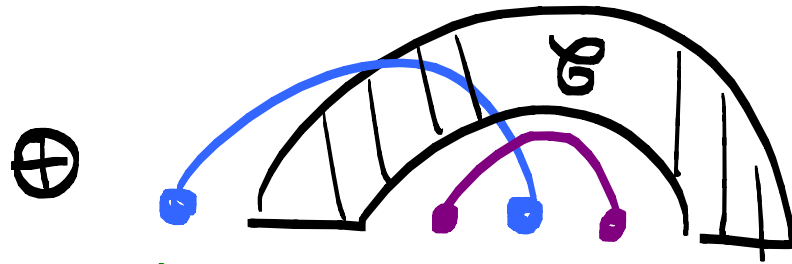
↑
très grand
nombre de
cordes



$$\text{proba} = \frac{(2n-3) C_{n-1}}{C_n} \\ = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$



$$\text{proba} = \frac{(2n-5) C_{n-2}}{C_n} \\ \sim \frac{1}{2n}$$



$$\text{proba} = \frac{(2n-5) C_{n-2}}{C_n} \sim \frac{1}{2n}$$

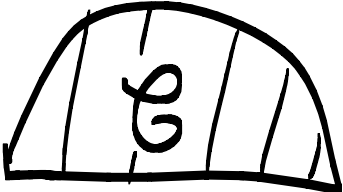


⋮

$$= o\left(\frac{1}{n}\right)$$

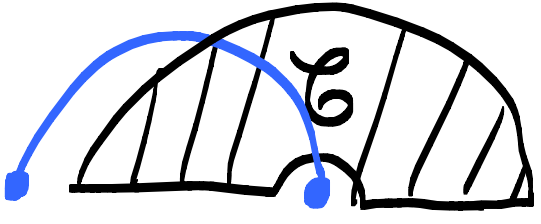
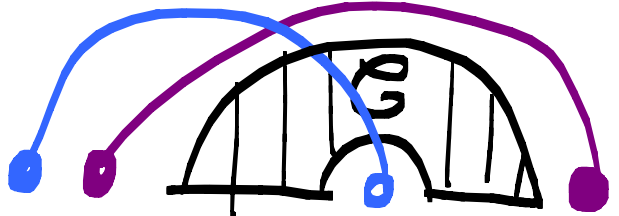
NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Idée:



 \uparrow

 très grand nombre de cordes

$=$

 \oplus


$\underbrace{\hspace{15em}}$

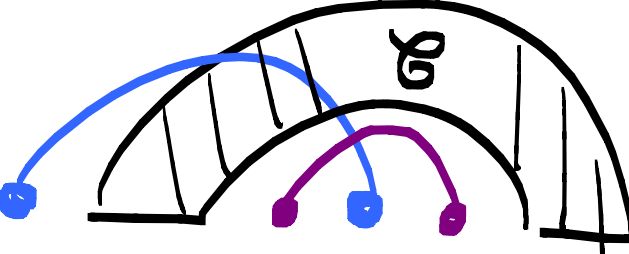
 proba = $\frac{(2n-3)C_{n-1}}{C_n}$

 $= 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\underbrace{\hspace{15em}}$

 proba = $\frac{(2n-5)C_{n-2}}{C_n}$

 $\sim \frac{1}{2n}$

\oplus

 \oplus

$\underbrace{\hspace{15em}}$

 proba = $\frac{(2n-5)C_{n-2}}{C_n} \sim \frac{1}{2n}$

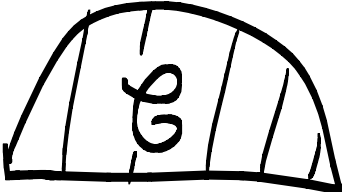
$\underbrace{\hspace{15em}}$

 ~~$= o\left(\frac{1}{n}\right)$~~

négligeons ça

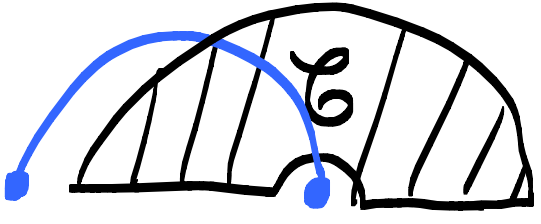
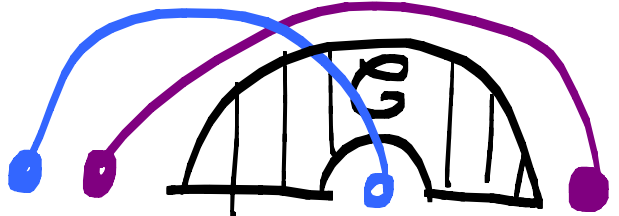
NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Idée:



 \uparrow

 très grand nombre de cordes

$=$

 \oplus


$\underbrace{\hspace{15em}}$

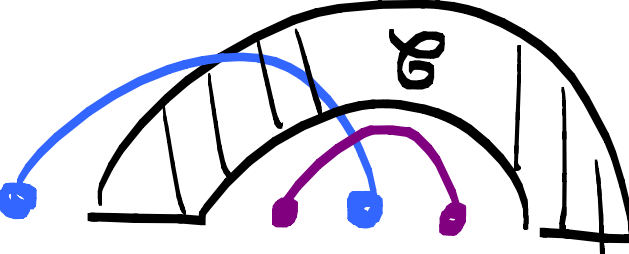
 proba = $\frac{(2n-3)C_{n-1}}{C_n}$

 $= 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\underbrace{\hspace{15em}}$

 proba = $\frac{(2n-5)C_{n-2}}{C_n}$

 $\sim \frac{1}{2n}$

\oplus

 \oplus

$\underbrace{\hspace{15em}}$

 proba = $\frac{(2n-5)C_{n-2}}{C_n} \sim \frac{1}{2n}$

$\underbrace{\hspace{15em}}$

 ~~$= o\left(\frac{1}{n}\right)$~~

négligeons ça

NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Idée: Posons

$$r_{m,k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) r_{m-1,k} + \frac{1}{n} r_{m-1,k-1}$$

NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Idée: Posons

$$r_{n,k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) r_{n-1,k} + \frac{1}{n} r_{n-2,k-1}$$

$$\rightarrow P(z, v) := \sum_{\substack{n \geq 0 \\ k \leq n}} r_{n,k} z^n v^k \quad \text{facile à calculer}$$

$$\rightarrow \underline{\text{Prop}} [z^n] \frac{\partial P}{\partial v} \Big|_{v=1} = \text{nbe moyen de cordes terminales} + o(\ln(n))$$

NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Théorème: Le nombre moyen de cordes terminales dans un diagramme connexe est asymptotiquement équivalent à $\ln(n)$.

NOMBRE DE CORDES TERMINALES.

Théorème: Le nombre moyen de cordes terminales dans un diagramme connexe est asymptotiquement équivalent à $\ln(n)$.

Conjectures: → La loi limite est gaussienne

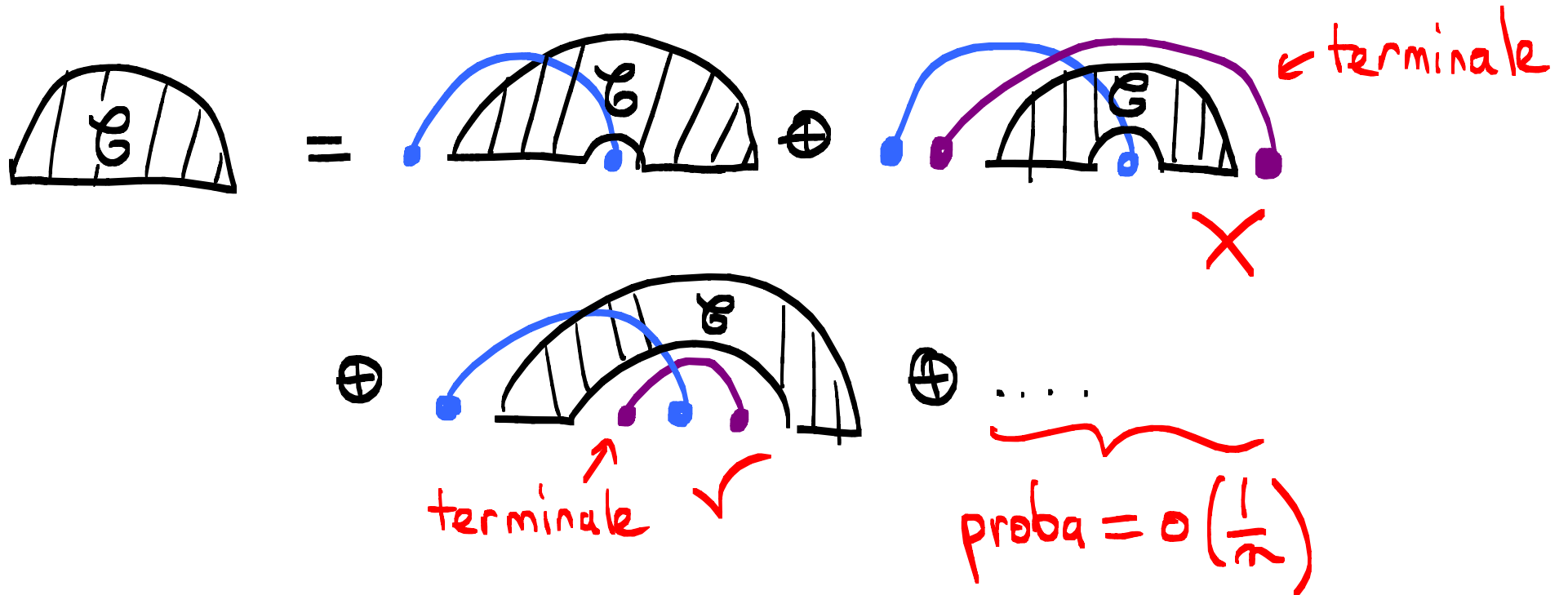
$$\rightarrow [z^n] C(z, u) \sim C \frac{2^n}{n!} n^{u-\frac{3}{2}}$$

NOMBRE DE CORDES TERMINALES ADJACENTES

nombre moyen de cordes terminales qui suivent directement une autre corde terminale?

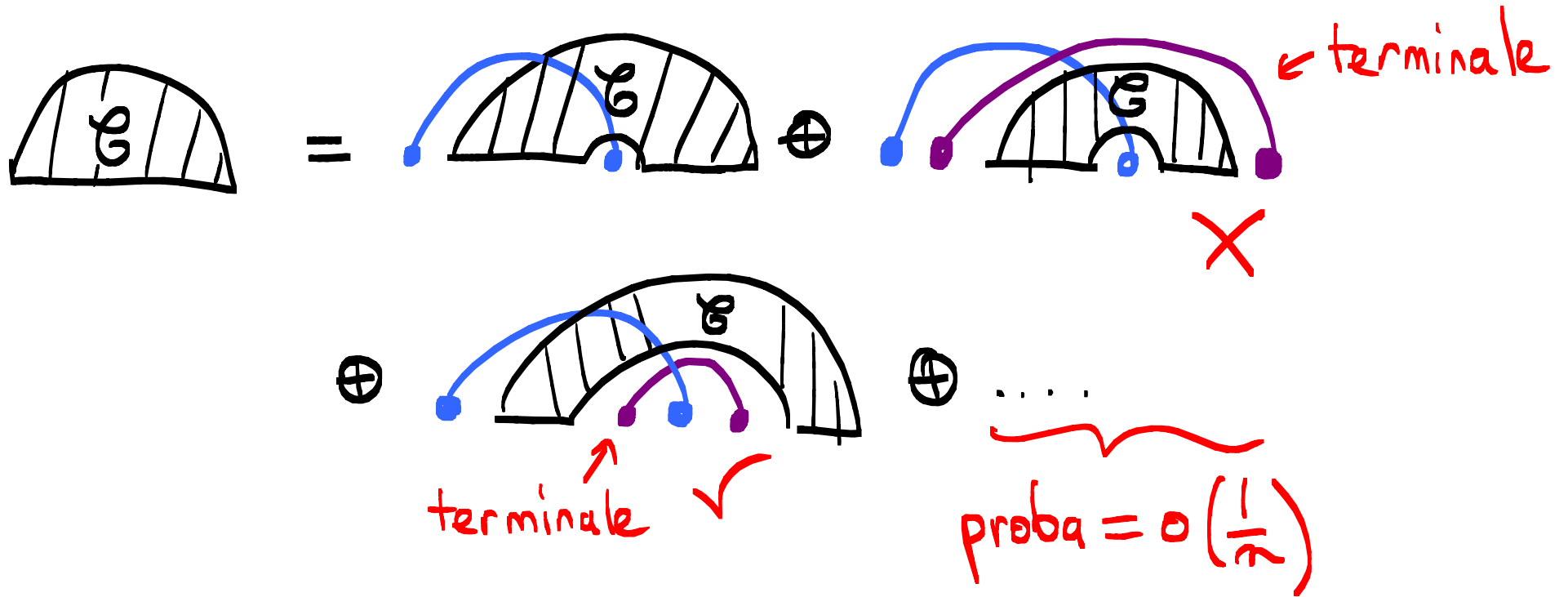
NOMBRE DE CORDES TERMINALES ADJACENTES

nombre moyen de cordes terminales qui suivent directement une autre corde terminale?



NOMBRE DE CORDES TERMINALES ADJACENTES

nombre moyen de cordes terminales qui suivent directement une autre corde terminale?



Théorème: nombre moyen de telles cordes
 $\sim \frac{\ln(n)}{2}$

POSITION DE LA PREMIÈRE CORDE TERMINALE

t_1 = v.a qui donne la position de la 1^{ère} corde terminale

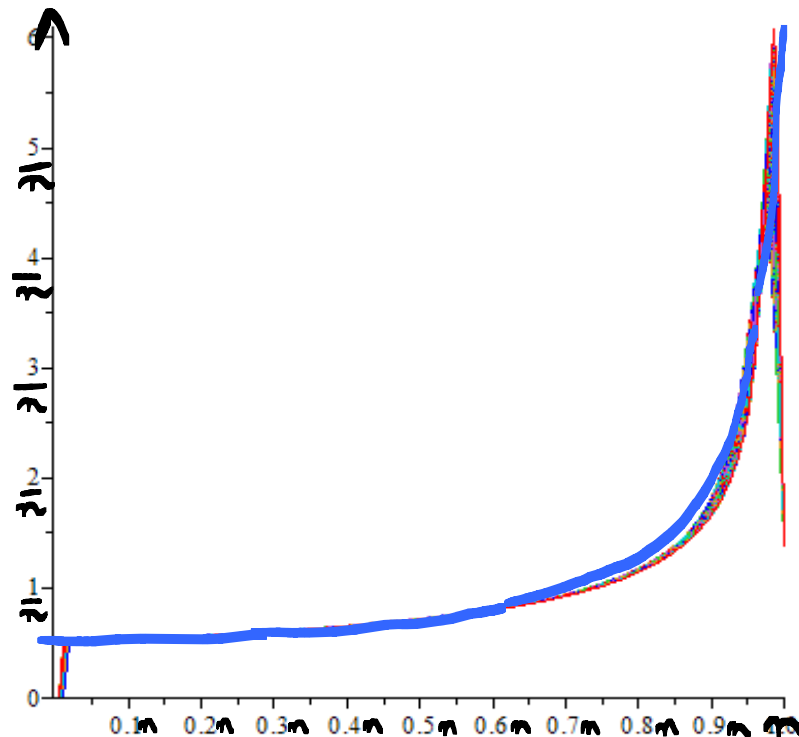
Théorème : $E(t_1) \sim \frac{2}{3} n$

POSITION DE LA PREMIÈRE CORDE TERMINALE

$t_1 = \text{v.a.}$ qui donne la position de
la 1^{ère} corde terminale

Théorème : $E(t_1) \sim \frac{2}{3} n$

Loi limite?



↑ écart
avec 0

CONCLUSION

→ méthodes pour obtenir les premiers moments mais quant aux lois??

→ d'autres objets sur lesquels ces méthodes s'appliquent?

Remarques/critiques bienvenues!

PUB



11-12 juillet 2016 - VANCOUVER