

Courtiel Julien (LIPN, Paris 13)

Yeats Karen (Univ of Waterloo)

Terminal Chords in Connected Chord Diagrams

Séminaire LIX
5 octobre 2016



Petit jeu
en attendant :
ceci parodie une
affiche de film.
Lequel?

Tom Hanks
Catherine Zeta-Jones

STEVEN SPIELBERG

The Terminal



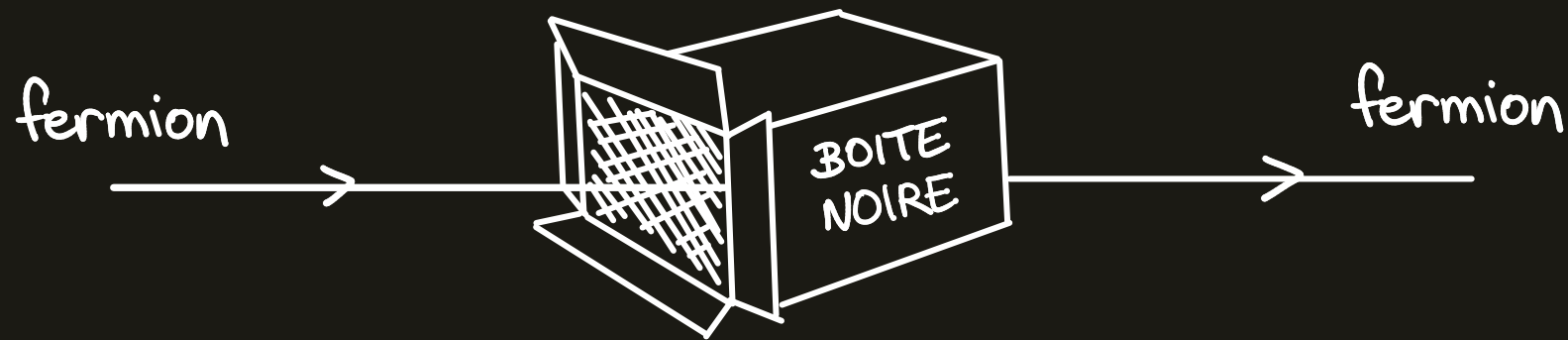
Life is waiting.

DEAN KAMEN PRODUCTIONS PRESENTS A PARES WOODWARD PRODUCTION A STEVEN SPIELBERG FILM
TOM HANKS CATHERINE ZETA-JONES "THE TERMINAL" SHERRY TOKES ON WARDROBE TIGER LINDA
"CELESTINE" ZOE LISTER-JONES "STITCH" MONICA KAZEM "JOHN WILLIAMS" BOB ZEPHRES "MICHAEL GIBSON" GUY
"MELBY" MCDONALD "JAMES" JAMES VANDERBILT "JAMES" FRANCIS HAYESER JASON HAYS ANDREW NICCOL
"WALTER PRINCE" JAMES MCDONALD STEVEN SPIELBERG "ANDREW NICCOL" "SIOBHAN DUFFY" "SIOBHAN DUFFY" "JEFF NEWMAN"
© 2004 MCA HOME ENTERTAINMENT INC. ALL RIGHTS RESERVED. MCA HOME ENTERTAINMENT INC. PRESENTS

THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES

vue par Karen Yeats

(théorie de Yukawa)



→ fermion (électron)

THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES

vue par Karen Yeats

(théorie de Yukawa)

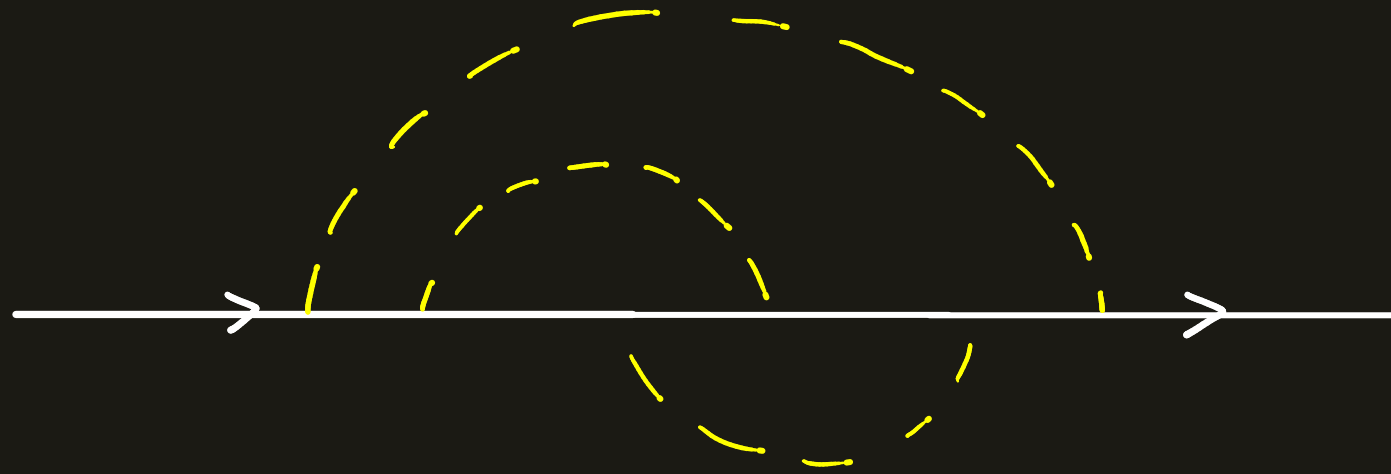


→ fermion (électron)

THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES

vue par Karen Yeats

(théorie de Yukawa)

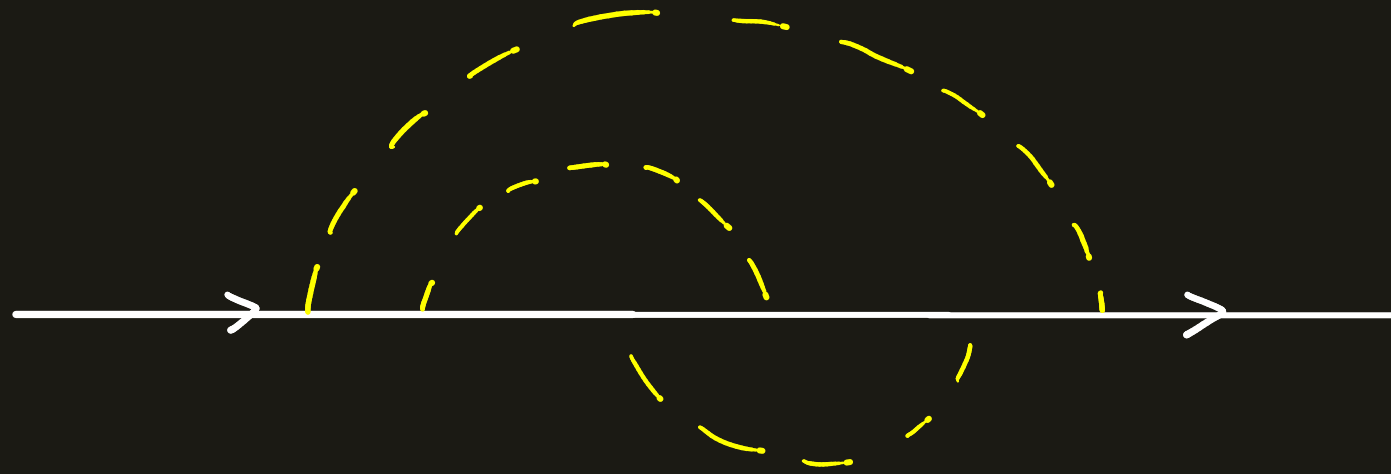


→ fermion (électron) - - - - - méson  (photon)

THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES

vue par Karen Yeats

(théorie de Yukawa)

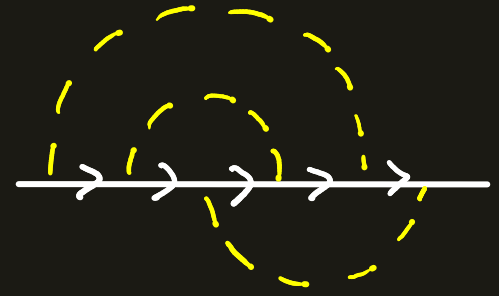
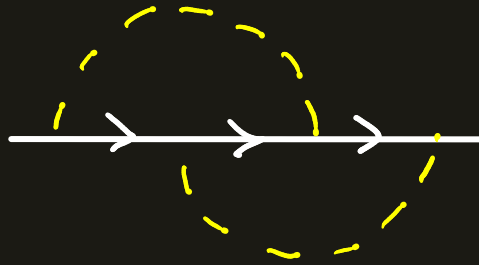


propagateur sous forme de diagramme de Feynman

→ fermion (électron) - - - - - méson  (photon)

THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES

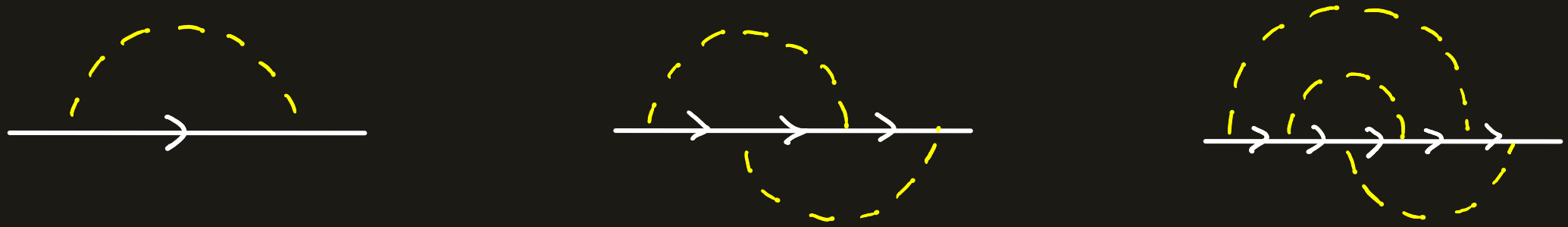
vue par Karen Yeats



→ fermion (électron) - - - - - méson  (photon)


THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES

vue par Karen Yeats



$$G(x, L) = \sum_{\mathcal{D} \text{ diagramme de Feynman}} \phi_{\mathcal{D}}(L) x^{\text{taille de } \mathcal{D}}$$

va être solution d'une équation de Dyson-Schwinger dite combinatoire.

fermion (électron) - - - - - méson  (photon)

THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES

vue par Karen Yeats



$$G(\alpha, L) = \sum_{\mathcal{D} \text{ diagramme de Feynman}} \underbrace{\phi_{\mathcal{D}}(L)}_{\text{règles de Feynman}} \propto \text{taille de } \mathcal{D}$$

va être solution d'une équation de Dyson-Schwinger dite combinatoire.

\longrightarrow fermion (électron)
 $---$ méson $\uparrow \downarrow$ (photon)

LE CADRE DE CET EXPOSÉ

Imbrications successives du propagateur à 1 boucle

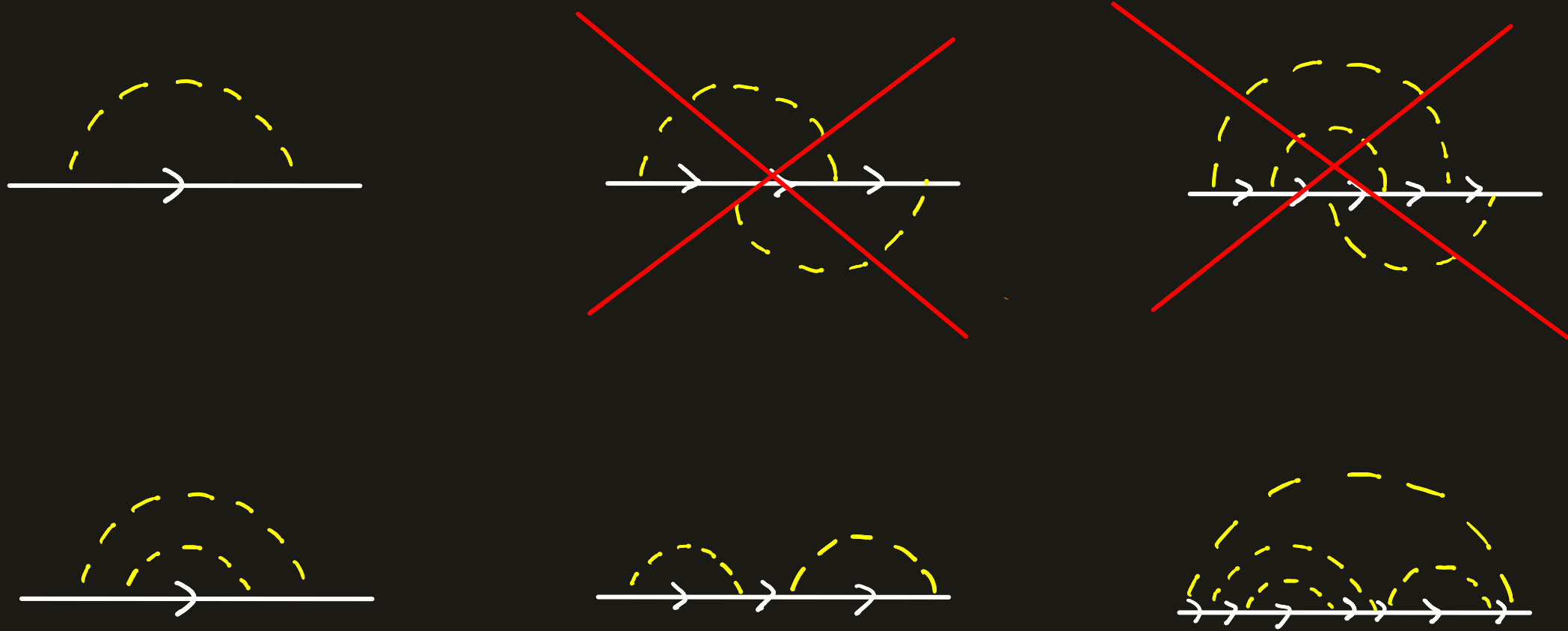


↑
propagateur
à une boucle

→ fermion (électron) - - - - - méson $\begin{matrix} \beta \\ \uparrow \\ \hline \uparrow \end{matrix}$ (photon)

LE CADRE DE CET EXPOSÉ

Imbrications successives du propagateur à 1 boucle



→ fermion (électron) - - - - - méson $\begin{matrix} \beta \\ \uparrow \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{matrix}$ (photon)

LE CADRE DE CET EXPOSÉ

Imbrications successives du propagateur à 1 boucle



LE CADRE DE CET EXPOSÉ

Imbrications successives du propagateur à 1 boucle



$$1 - G(x, L) = \sum_{\substack{\mathcal{D} \text{ itéré du} \\ \text{propagateur à} \\ \text{1 boucle}}} \phi_{\mathcal{D}}(L) x^{\text{taille de } \mathcal{D}}$$

va être solution de l'équation de Dyson-Schwinger:

$$G(x, L) = 1 - x G(x, \frac{\partial}{\partial(-p)})^{-1} (e^{-Lp} - 1) F(p)|_{p=0}$$

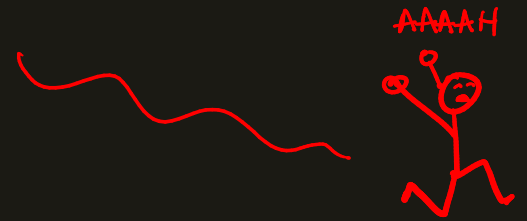
où $F(p) =$ intégrale de Feynman régul. du propagateur à 1 boucle $\approx \phi_{\rightarrow} (p)$

SOLUTION DE L'ÉQUATION DE DYSON-SCHWINGER

Théorème [Marie, Yeats]

! GROSSE FORMULE!

La précédente équation admet pour solution:



$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{C \text{ diagramme}} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

de cordes connexe
tel que $t_1 \geq i$
où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
désigne les positions
des cordes terminales de C

où $F(p) = \frac{f_0}{p} + f_1 + f_2 p + f_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

SOLUTION DE L'ÉQUATION DE DYSON-SCHWINGER

Théorème [Marie, Yeats]

! GROSSE FORMULE!

La précédente équation admet pour solution:

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{C \text{ diagramme}} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

de cordes connexe
tel que $t_1 \geq i$
où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
désigne les positions
des cordes terminales de C

où $F(p) = \frac{f_0}{p} + f_1 + f_2 p + f_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

DÉFINITIONS

diagramme de n cordes

= appariement de
l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$

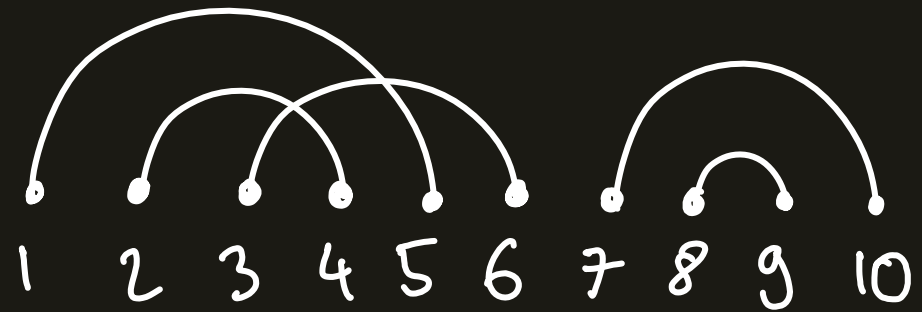
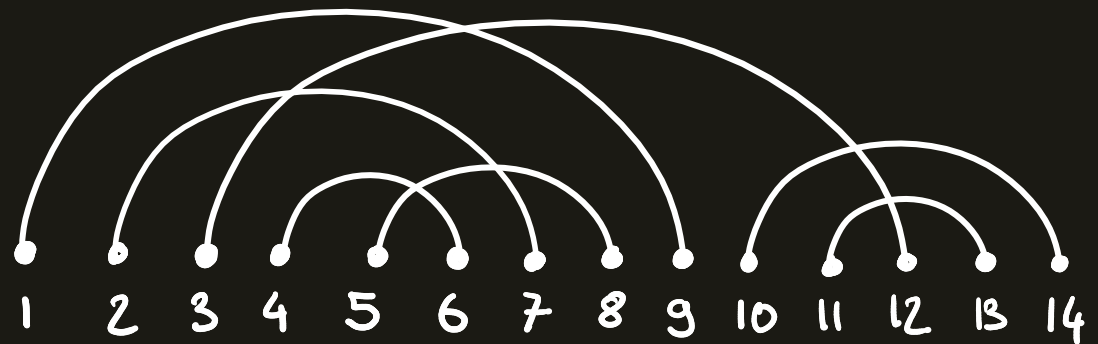


diagramme connexe =
"tout tient en un bloc."



DÉFINITIONS

diagramme de n cordes

= appariement de
l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$

3 composantes connexes:

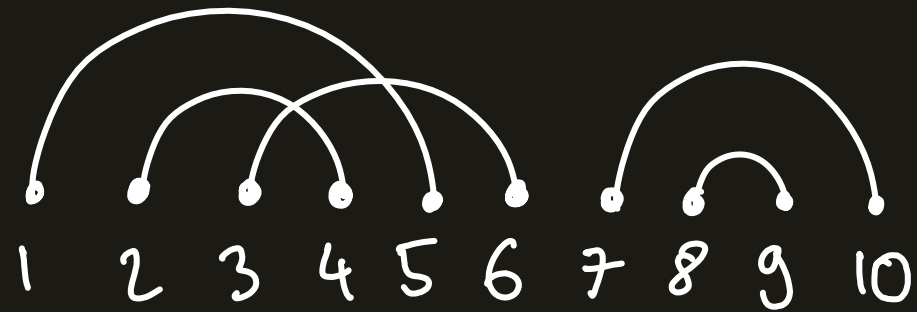
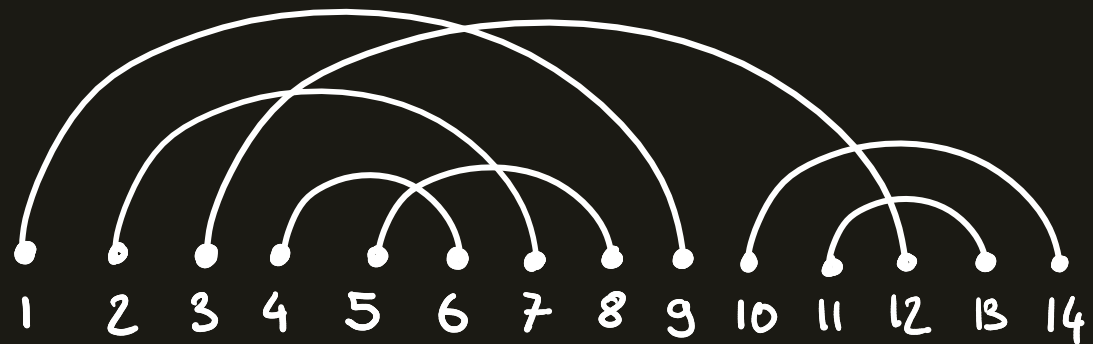


diagramme connexe =
"tout tient en un bloc."

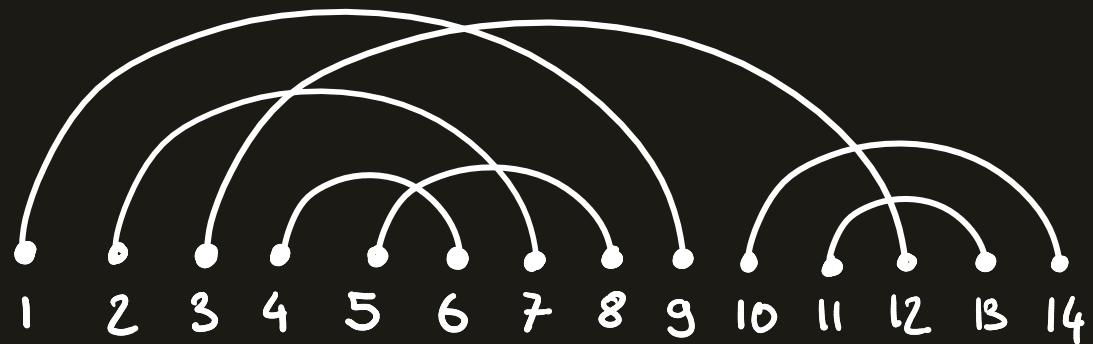
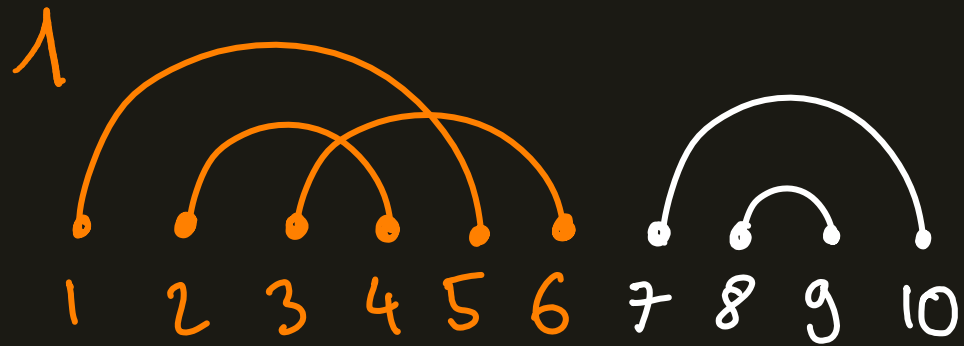


DÉFINITIONS

diagramme de n cordes
= appariement de
l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$

diagramme connexe =
"tout tient en un bloc."

3 composantes connexes:

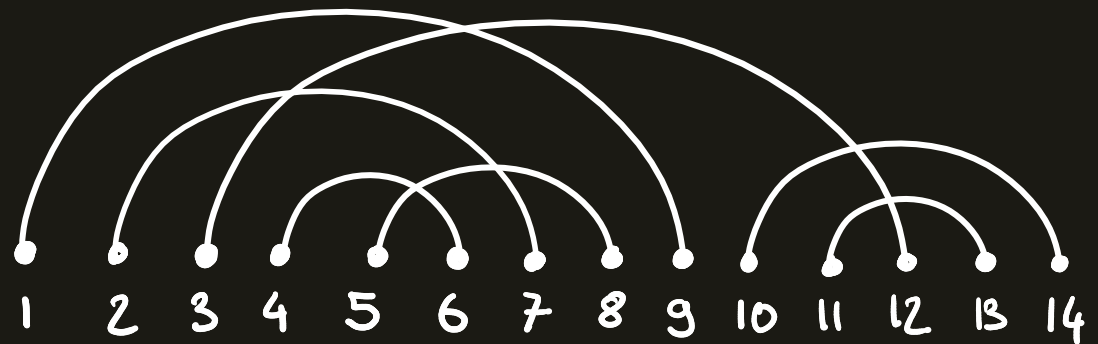
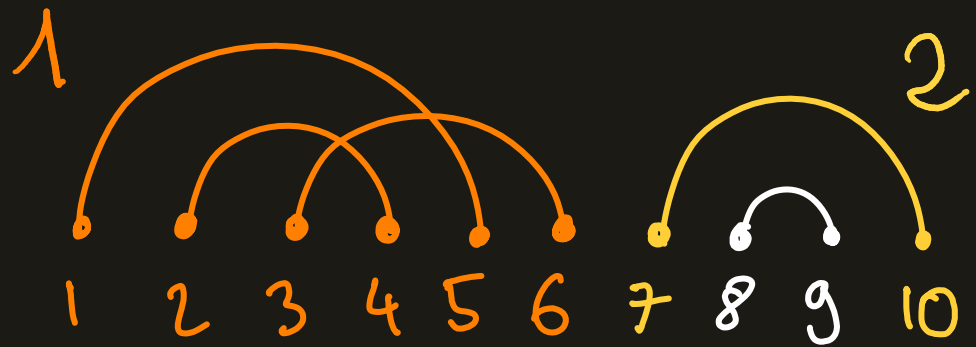


DÉFINITIONS

diagramme de n cordes
= appariement de
l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$

diagramme connexe =
"tout tient en un bloc."

3 composantes connexes:

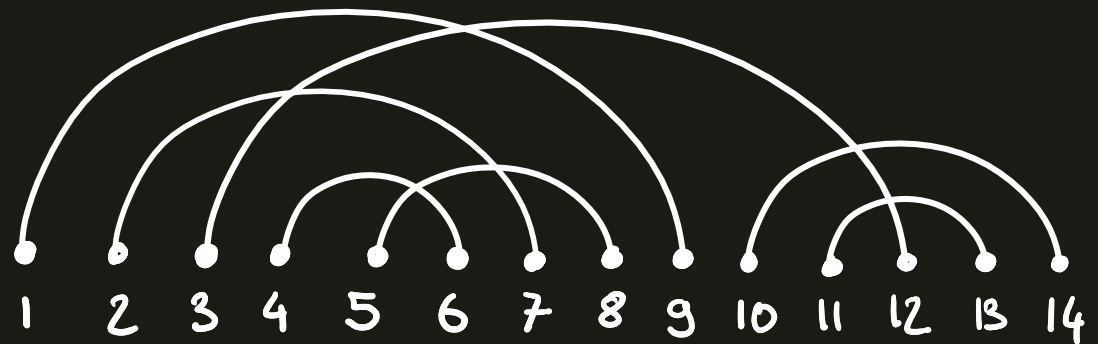


DÉFINITIONS

diagramme de n cordes
= appariement de
l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$

diagramme connexe =
"tout tient en un bloc."

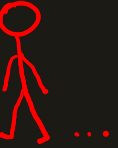
3 composantes connexes:



SOLUTION DE L'ÉQUATION DE DYSON-SCHWINGER

Théorème [Marie, Yeats]

La précédente équation admet pour solution:



$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{C \text{ diagramme de cordes connexe } \checkmark} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

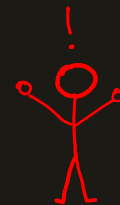
tel que $t_1 \geq i$
 où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
 désigne les positions
 des cordes terminales de C

où $F(p) = \frac{f_0}{p} + f_1 + f_2 p + f_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

SOLUTION DE L'ÉQUATION DE DYSON-SCHWINGER

Théorème [Marie, Yeats]

La précédente équation admet pour solution:



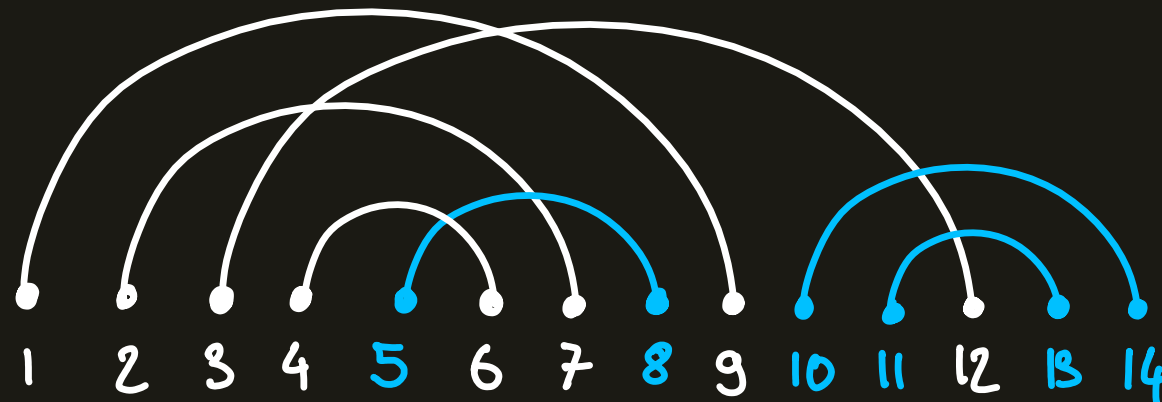
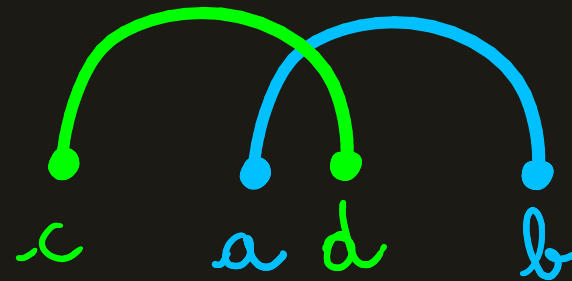
$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{C \text{ diagramme de cordes connexe } \checkmark} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

tel que $t_1 \geq i$
où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
désigne les positions
des cordes terminales de C

où $F(p) = \frac{f_0}{p} + f_1 + f_2 p + f_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

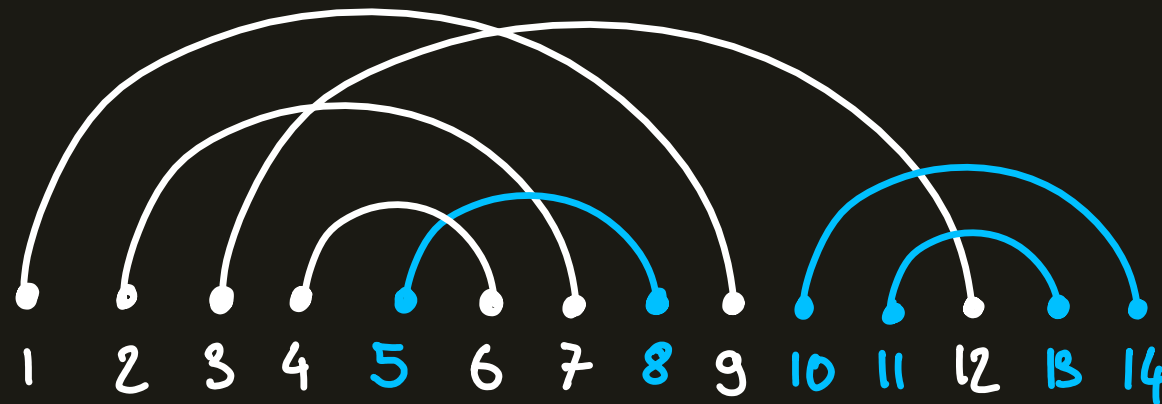
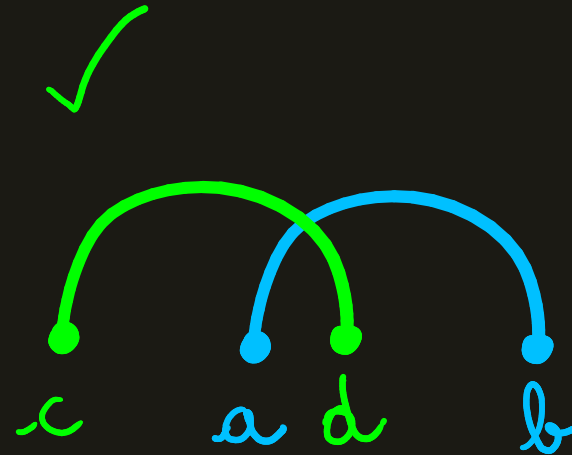
DÉFINITIONS

corde terminale =
corde (a, b) telle que
si (c, d) intersecte (a, b) ,
alors $c < a$.



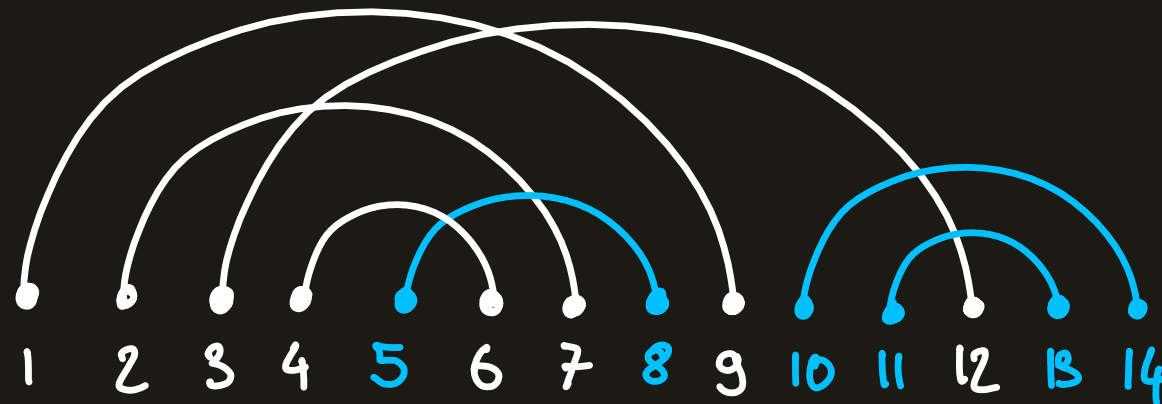
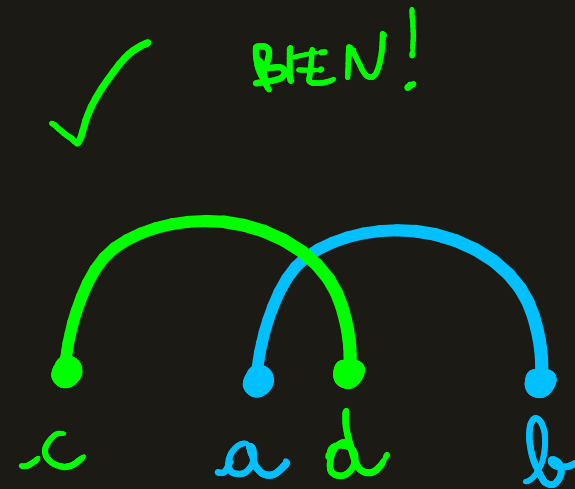
DÉFINITIONS

corde terminale =
corde (a, b) telle que
si (c, d) intersecte (a, b) ,
alors $c < a$.



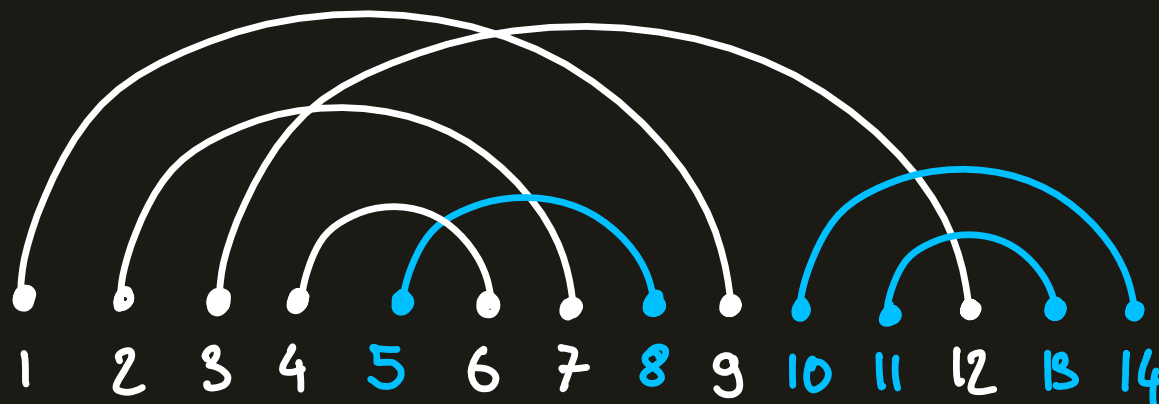
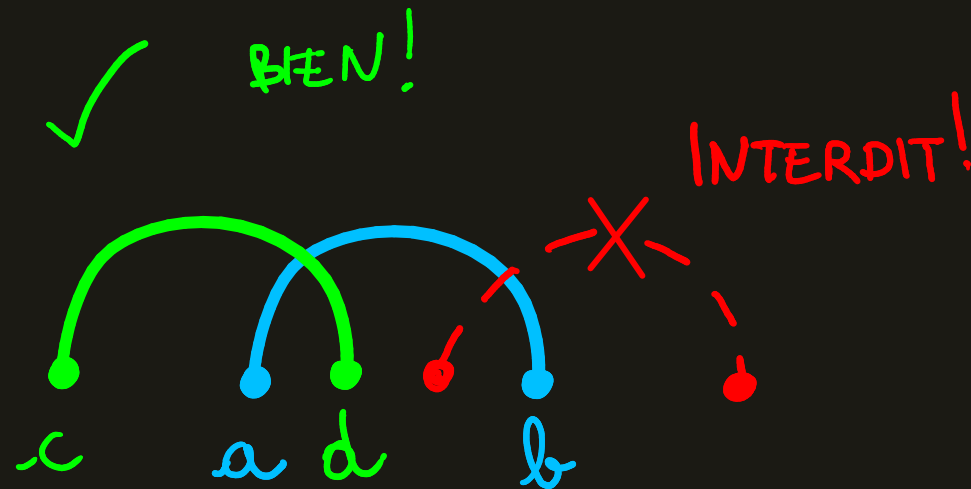
DÉFINITIONS

corde terminale =
corde (a, b) telle que
si (c, d) intersecte (a, b) ,
alors $c < a$.



DÉFINITIONS

corde terminale =
corde (a, b) telle que
si (c, d) intersecte (a, b) ,
alors $c < a$.



SOLUTION DE L'ÉQUATION DE DYSON-SCHWINGER

Théorème [Marie, Yeats]

La précédente équation admet pour solution :



$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{C \text{ diagramme de cordes connexe } \checkmark} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

tel que $t_1 \geq i$
 où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
 désigne les positions
 des cordes terminales de C ✓

où $F(p) = \frac{f_0}{p} + f_1 + f_2 p + f_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

SOLUTION DE L'ÉQUATION DE DYSON-SCHWINGER

Théorème [Marie, Yeats]

La précédente équation admet pour solution :



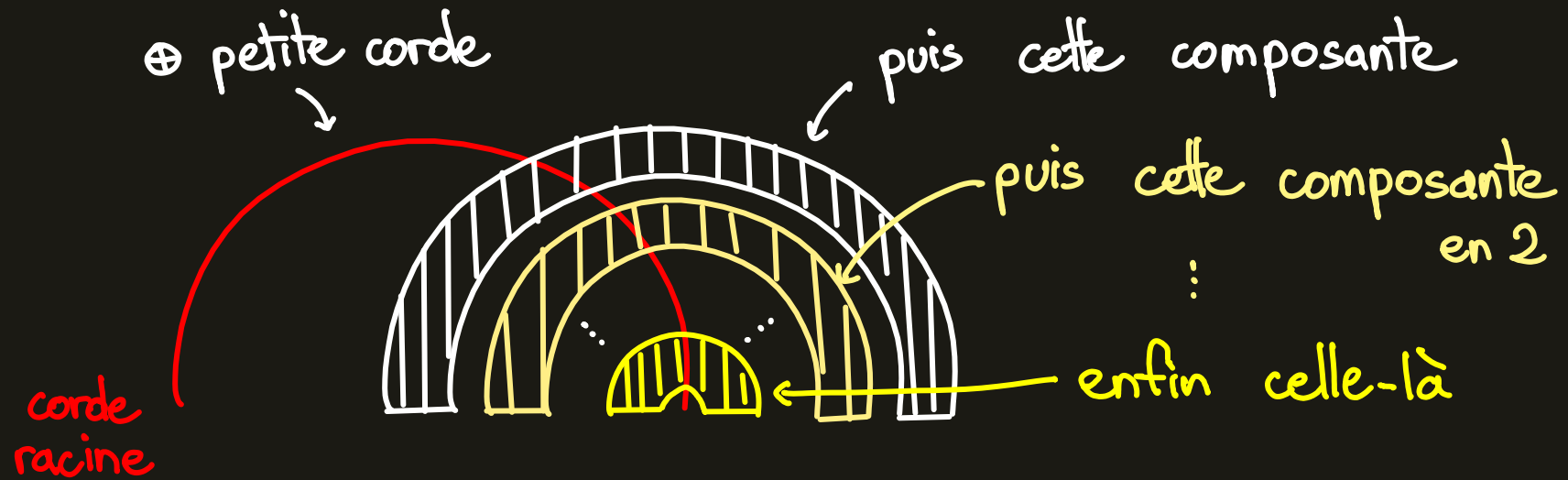
$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{C \text{ diagramme de cordes connexe } \checkmark} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

tel que $t_1 \geq i$
 où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
 désigne les positions
 des cordes terminales de C ✓

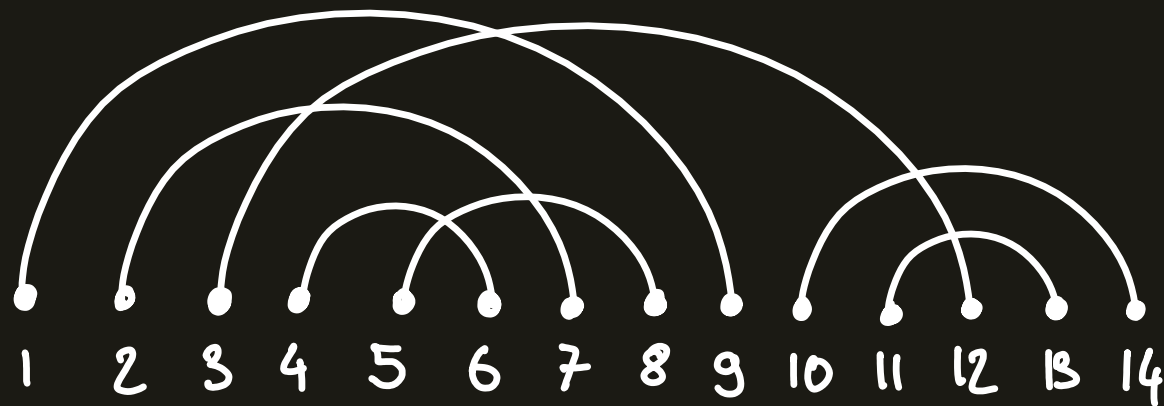
où $F(p) = \frac{f_0}{p} + f_1 + f_2 p + f_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

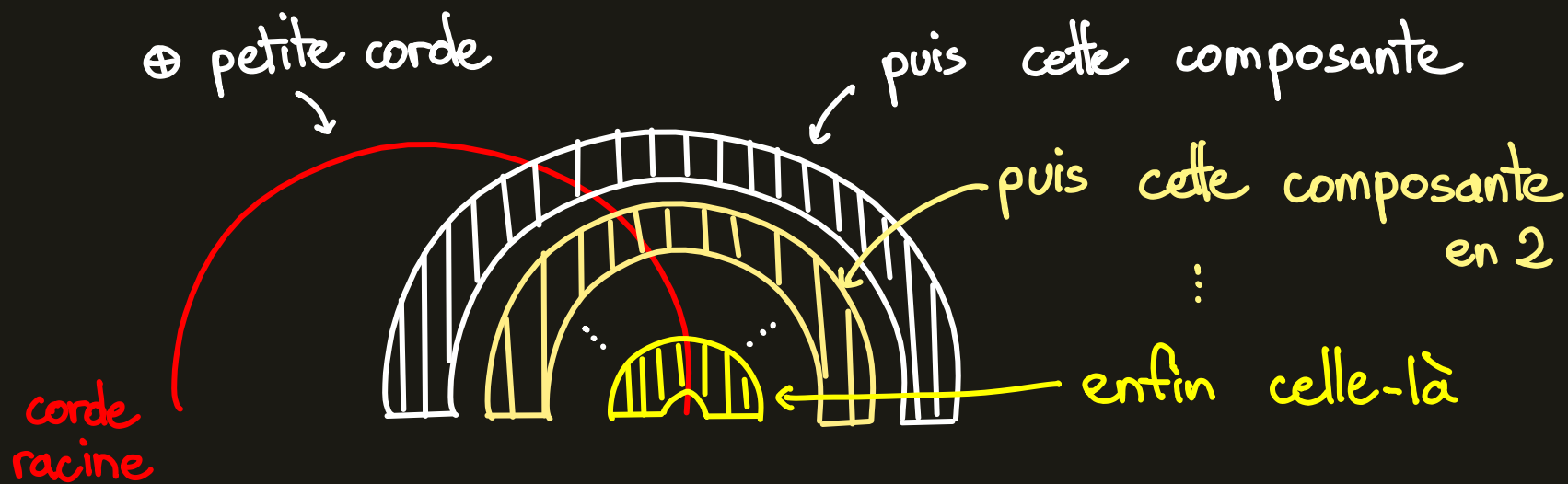


Exemple :

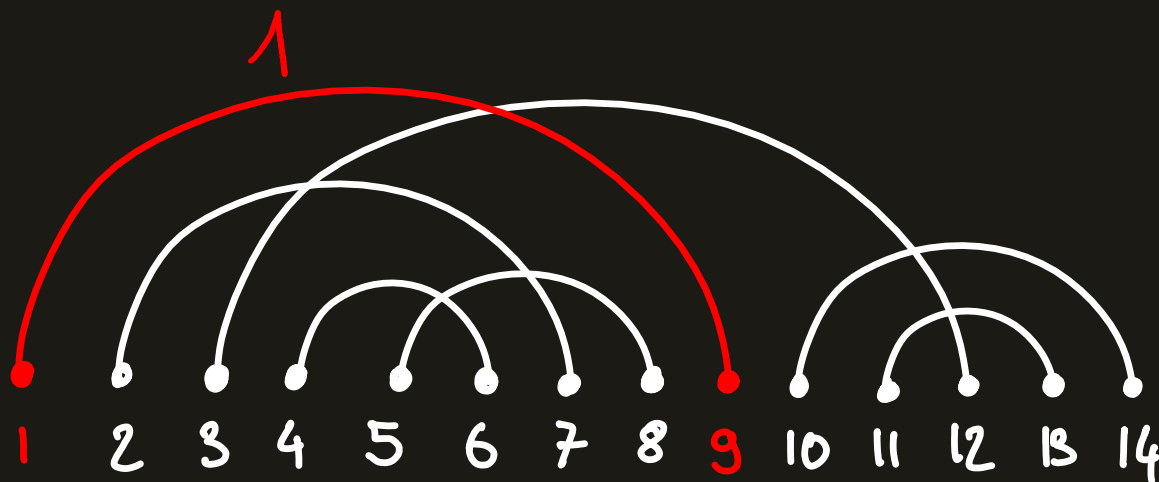


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

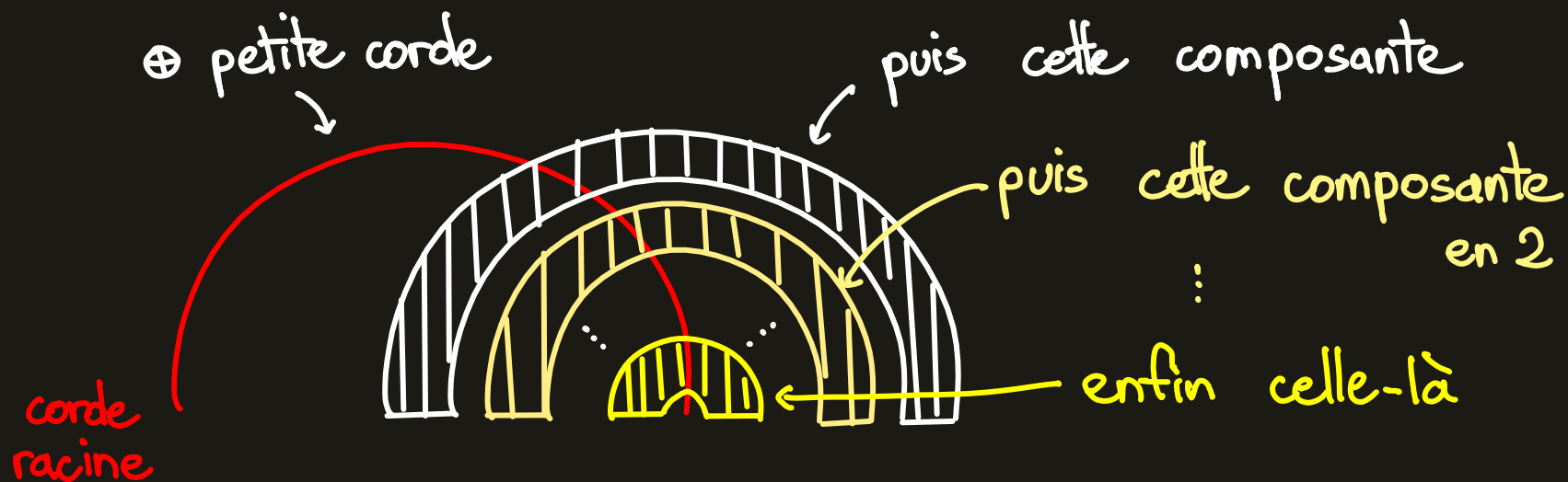


Exemple :

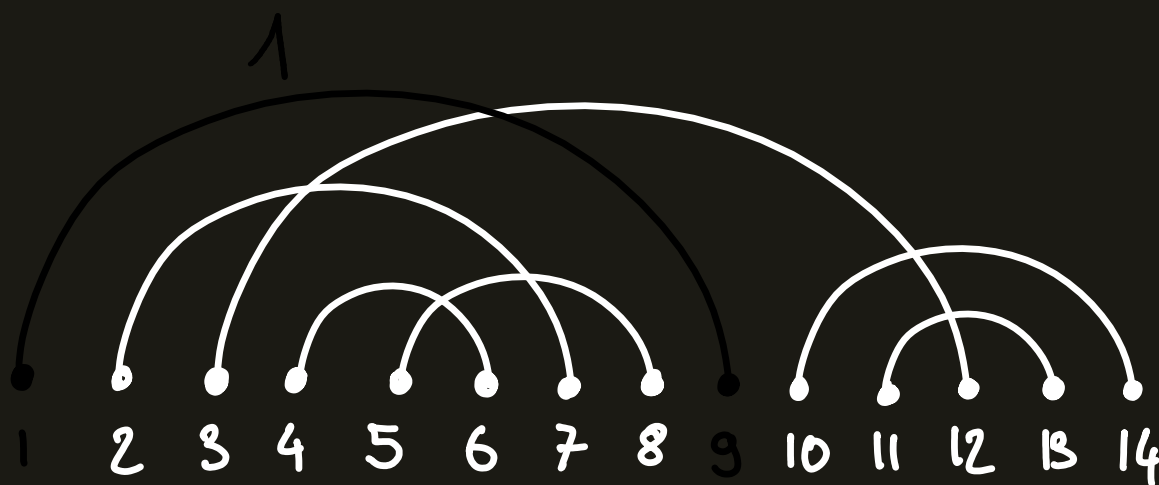


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

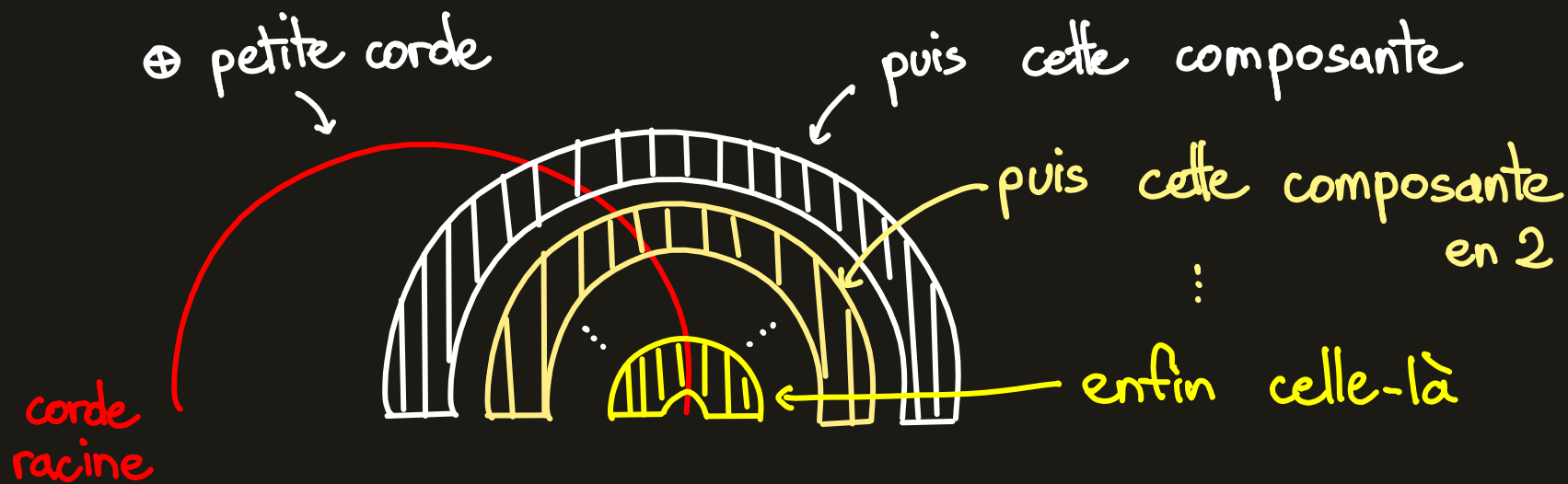


Exemple :

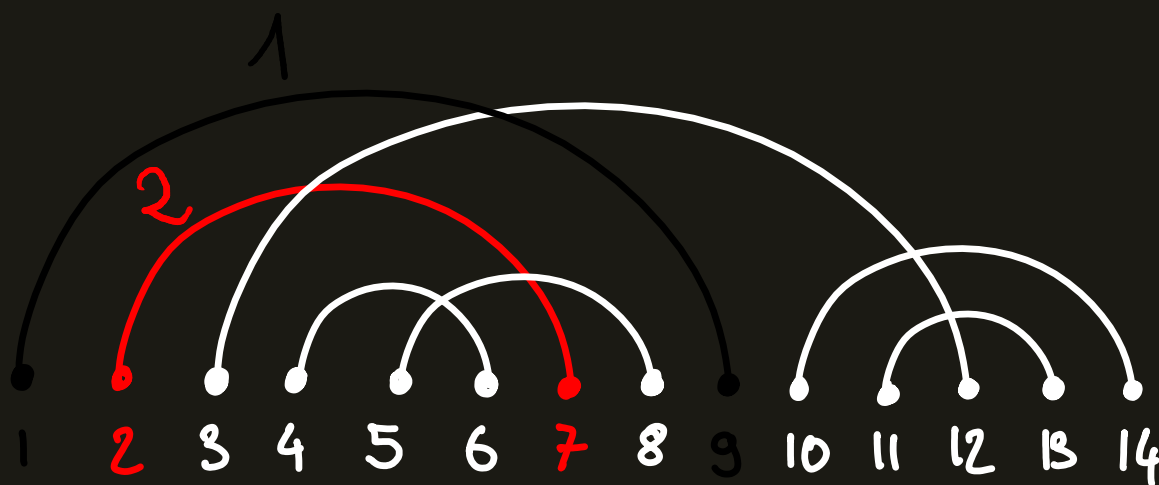


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

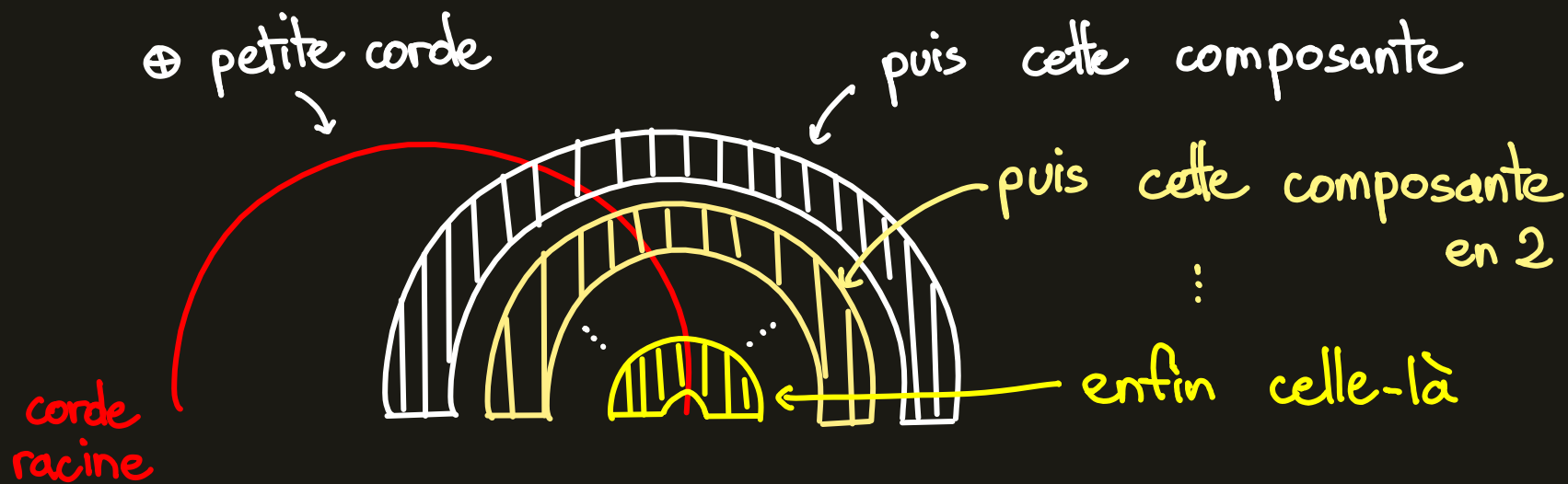


Exemple :

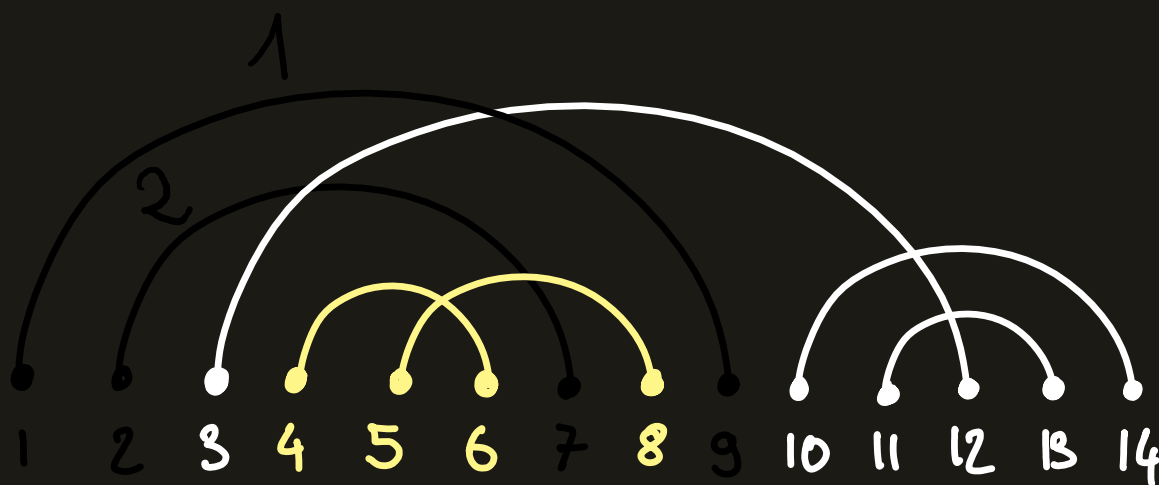


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

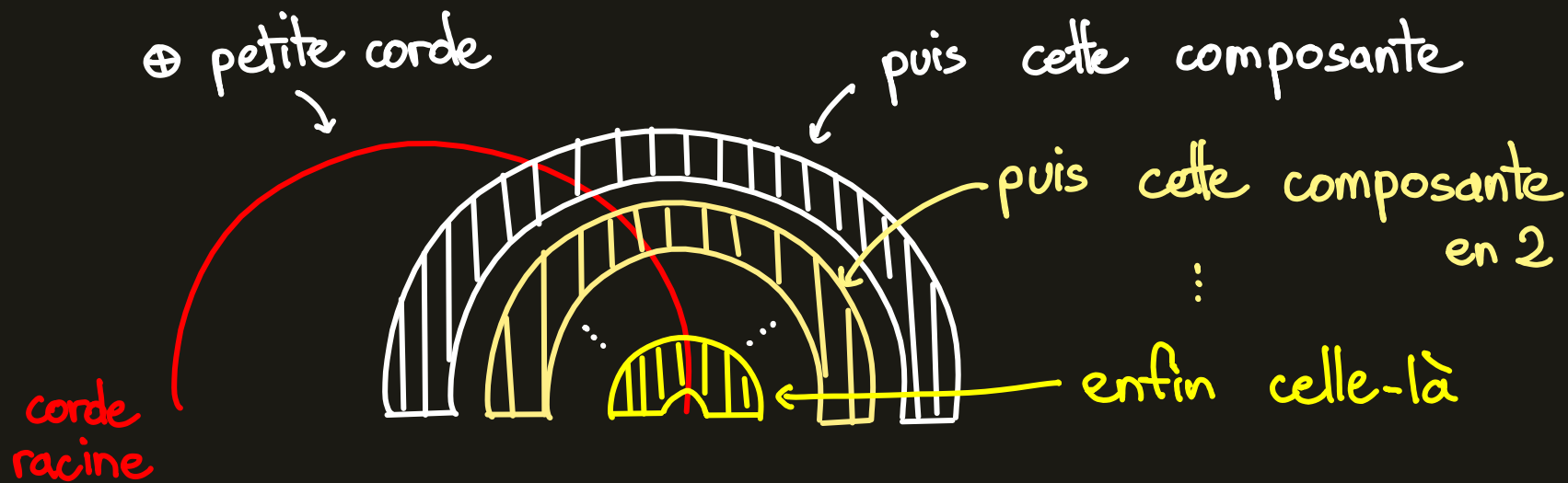


Exemple :

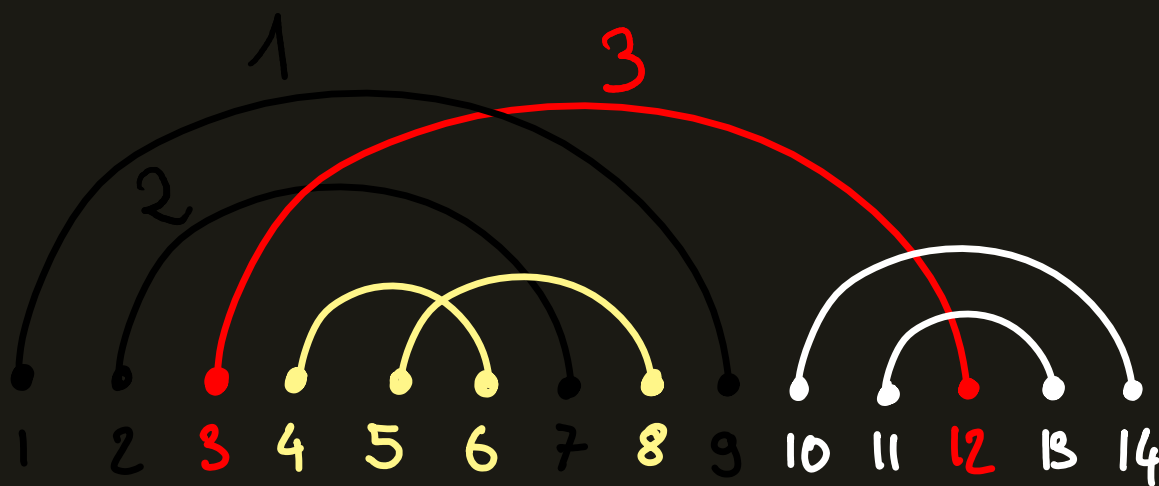


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

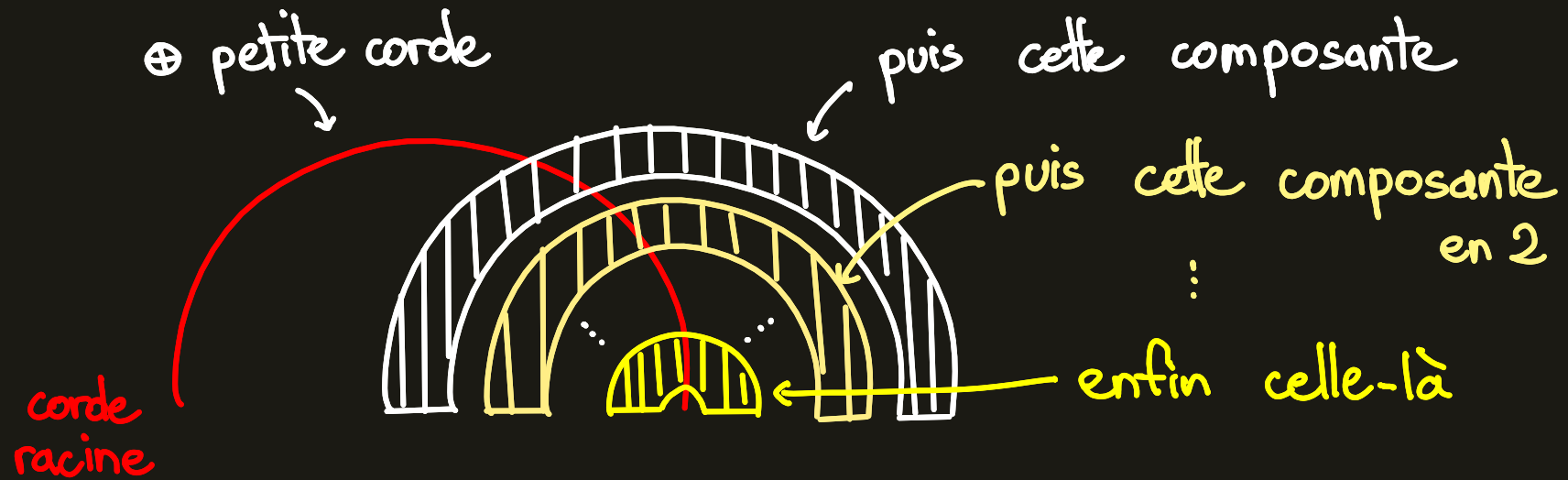


Exemple :

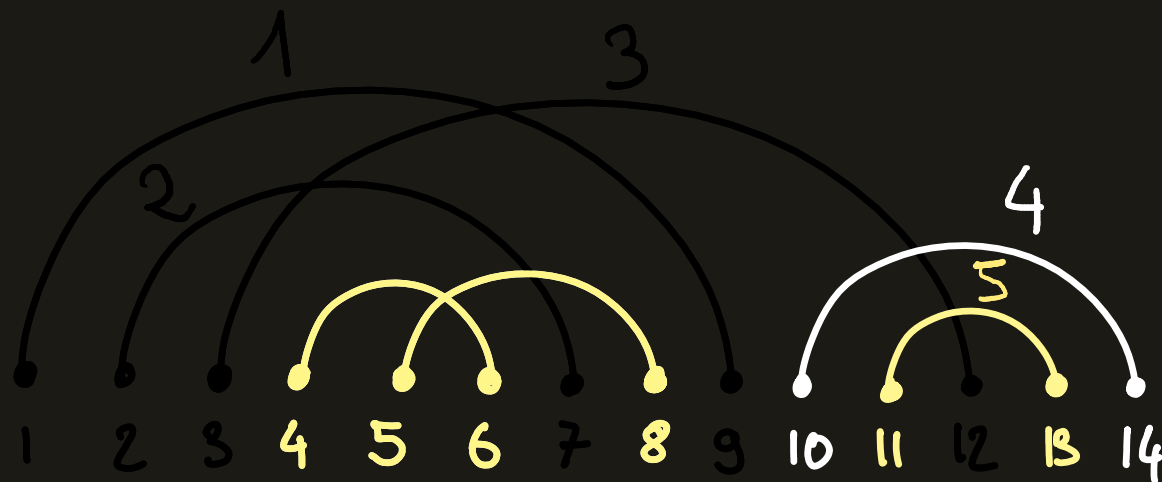


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

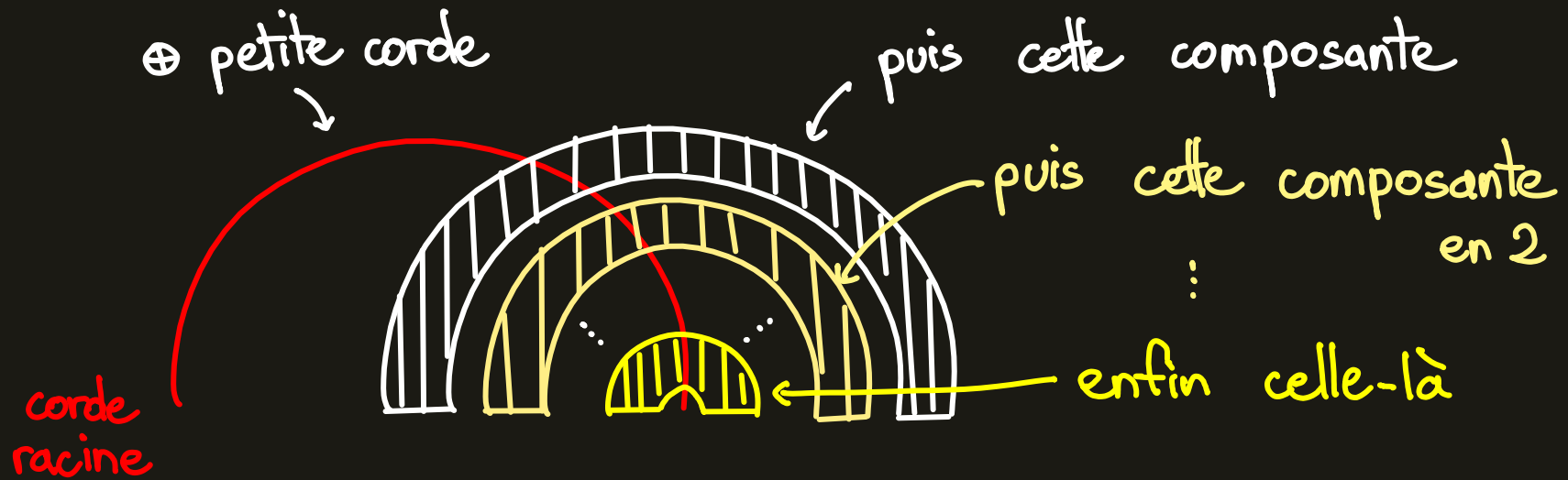


Exemple :

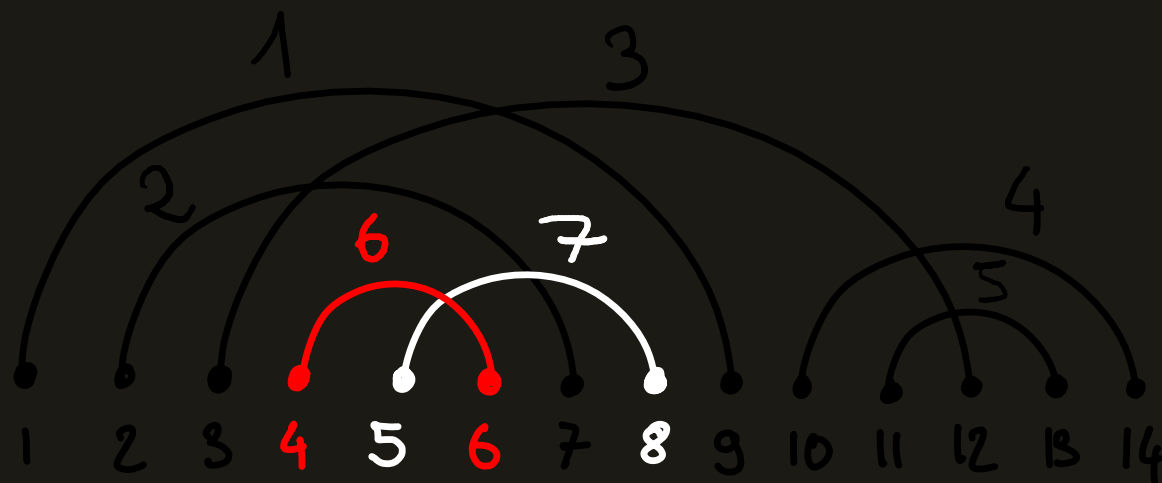


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

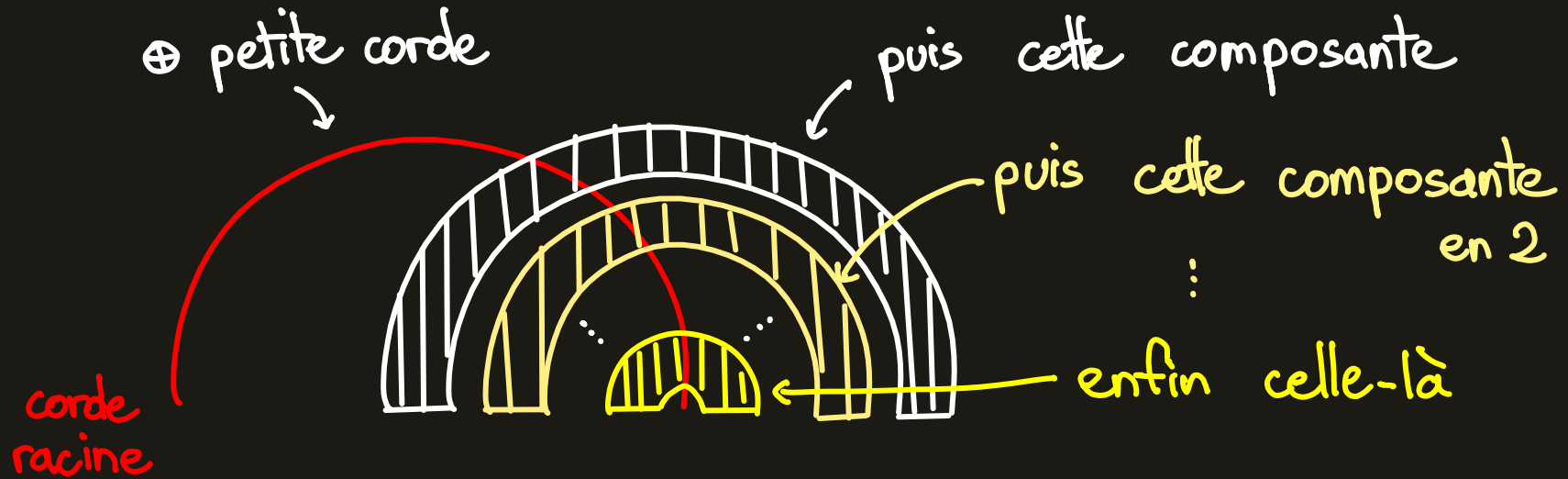


Exemple :

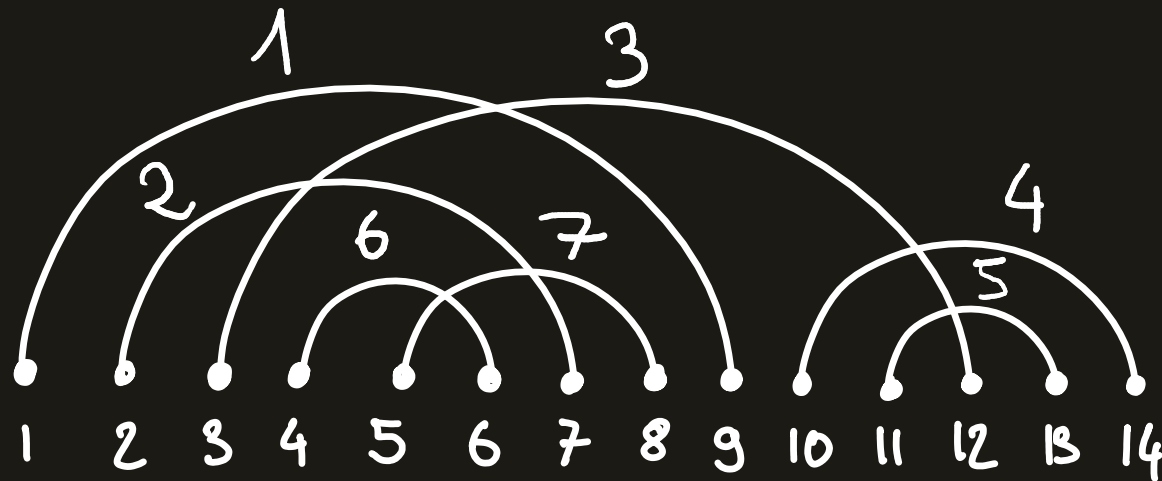


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

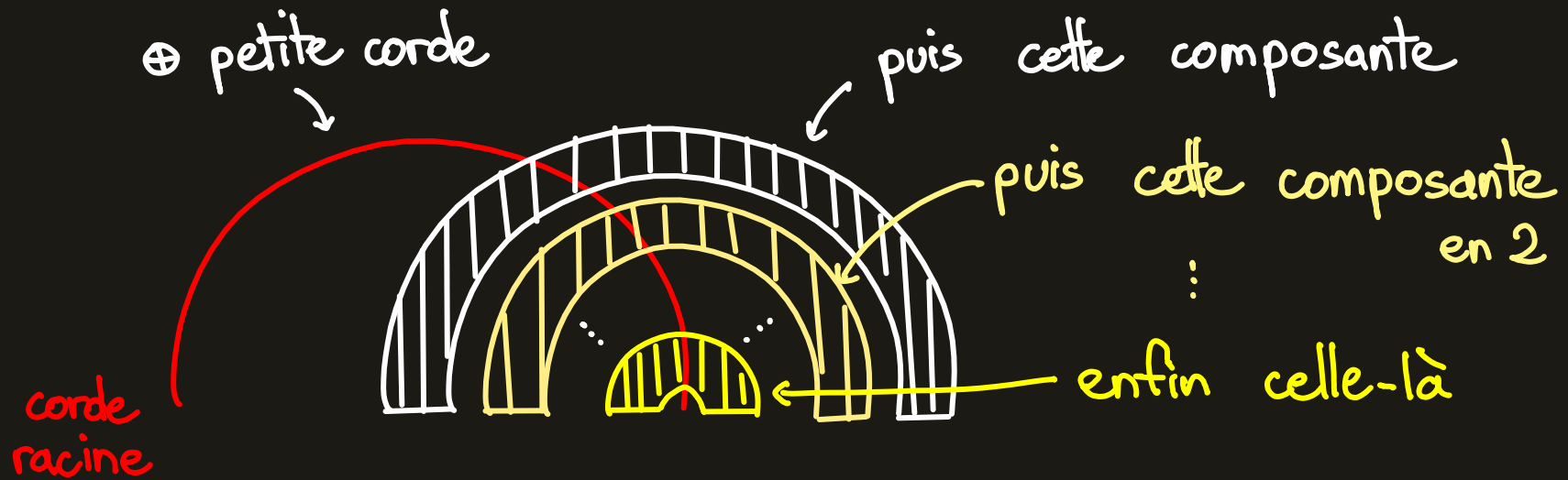


Exemple :

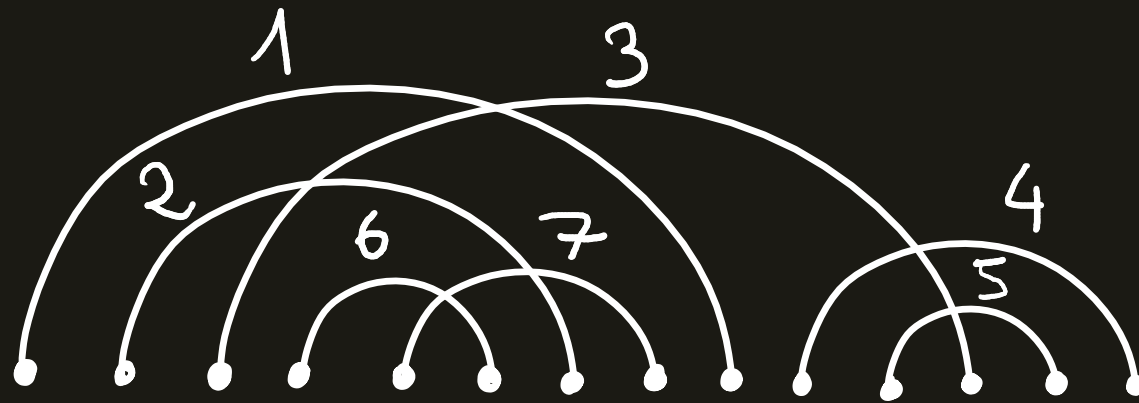


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

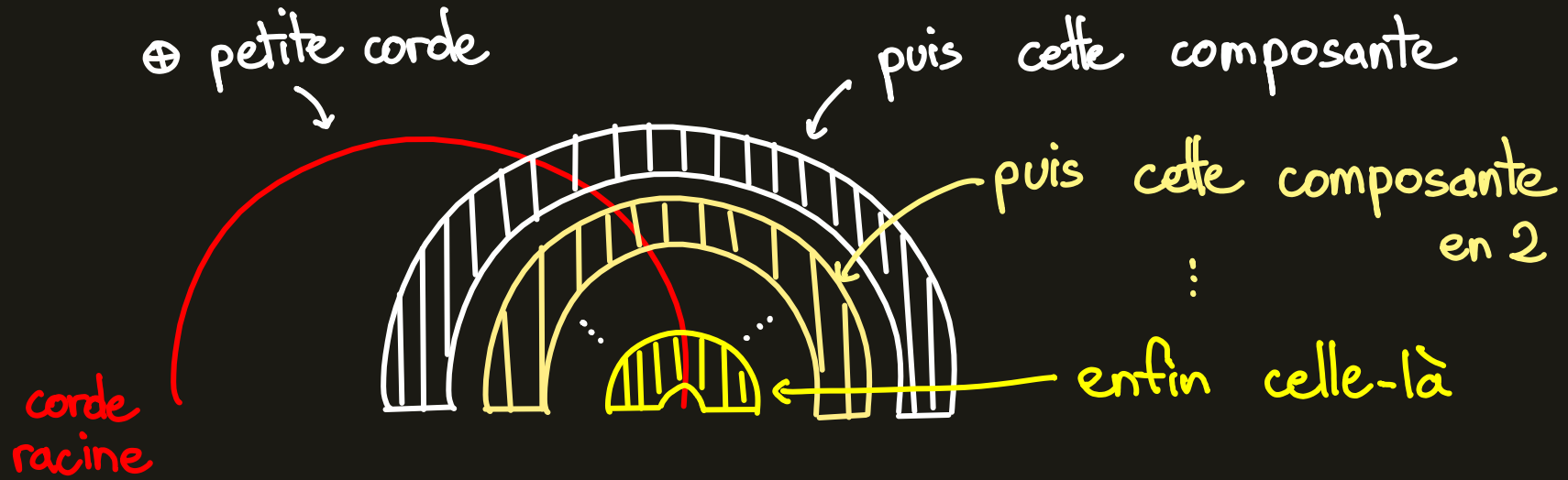


Exemple :

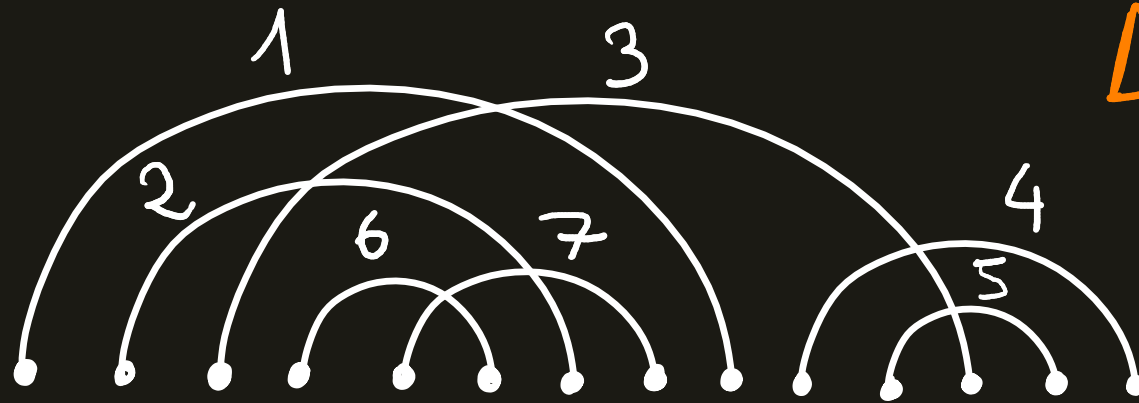


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :



Exemple :



⚠ ordre gauche-droite
+
ordre d'intersection

SOLUTION DE L'ÉQUATION DE DYSON-SCHWINGER

Théorème [Marie, Yeats]

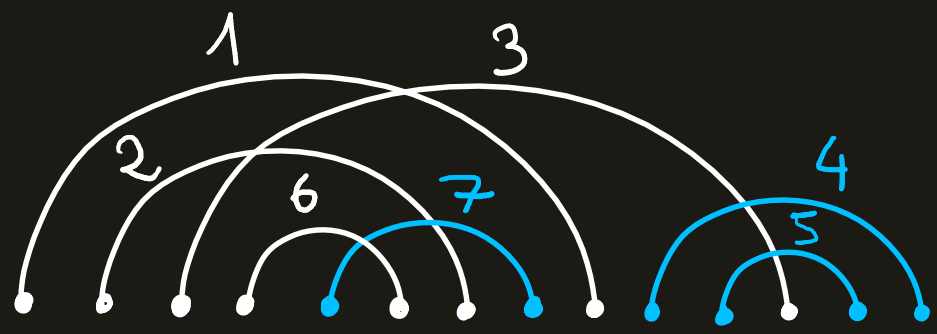
La précédente équation admet pour solution :

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{C \text{ diagramme}} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

de cordes connexe ✓
 tel que $t_1 \geq i$
 où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
 désigne les positions ✓
 des cordes terminales de C ✓

où $F(p) = \frac{f_0}{p} + f_1 + f_2 p + f_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

Ex:



$k=3 \quad t_1=4 \quad t_2=5 \quad t_3=7$

$$(*) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > 4 \\ x^7 \times b_0 \times b_{4-i} \times b_1 \times b_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{C \text{ diagramme de cordes connexe}} \frac{L^i}{i!} \right) x^{|C|} b_0^{|C|-k} b_{t_1-i} b_{t_2-t_1} b_{t_3-t_2} \dots b_{t_k-t_{k-1}}$$

tel que $t_1 \geq i$
 où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
 désigne les positions
 des cordes terminales de C

(*)

où $F(p) = \frac{b_0}{p} + b_1 + b_2 p + b_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

OBJECTIF

Comprendre asymptotiquement $x^{|c|} f_0^{|c|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$

OBJECTIF

nombre de
cordes terminales

Comprendre asymptotiquement $\propto |c| f_0^{|c|-k} f_{t_1-t_1} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$

OBJECTIF

nombre de
cordes terminales

Comprendre asymptotiquement $\propto |c| f_0^{|c|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$

position de la première
corde terminale

OBJECTIF

nombre de
cordes terminales

Comprendre asymptotiquement $\propto |c| f_0 |c|^{-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$

position de la première
corde terminale

écart entre deux
cordes terminales

OBJECTIF

nombre de
cordes terminales

Comprendre asymptotiquement $\propto |c| f_0 |c|^{-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$

position de la première
corde terminale

écart entre deux
cordes terminales

distribution
uniforme

OBJECTIF

nombre de
cordes terminales

Comprendre asymptotiquement $\propto |c| f_0^{|c|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$

position de la première
corde terminale

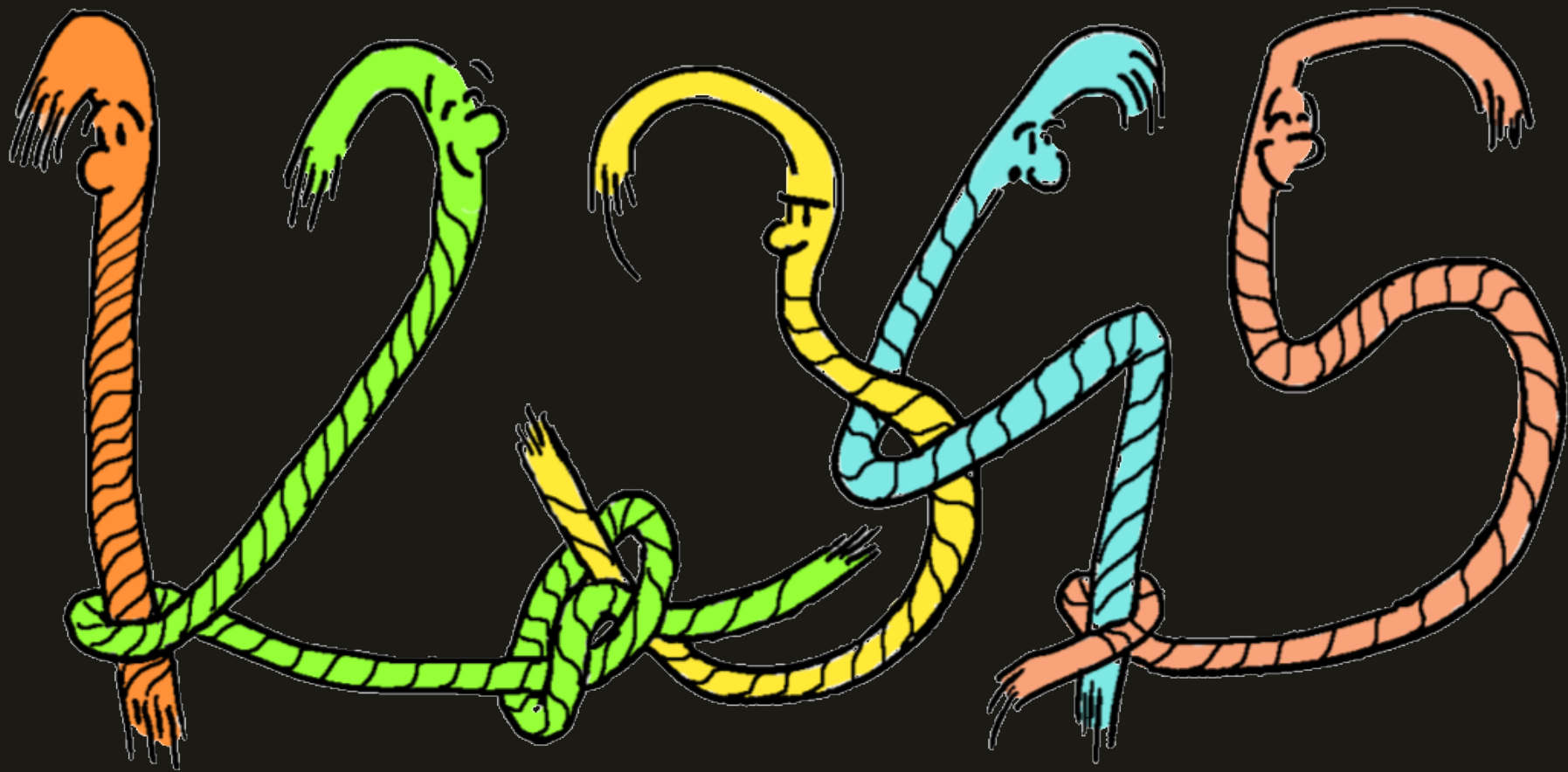
écart entre deux
cordes terminales

développement
log-dominant

distribution
uniforme

(+ significatif pour la physique)

CE QU'IL FAUT SAVOIR SUR LES DIAGRAMMES DE CORDES CONNEXES



PETIT ÉTAT DES LIEUX

modèle de
graphes aléatoires

cumulants

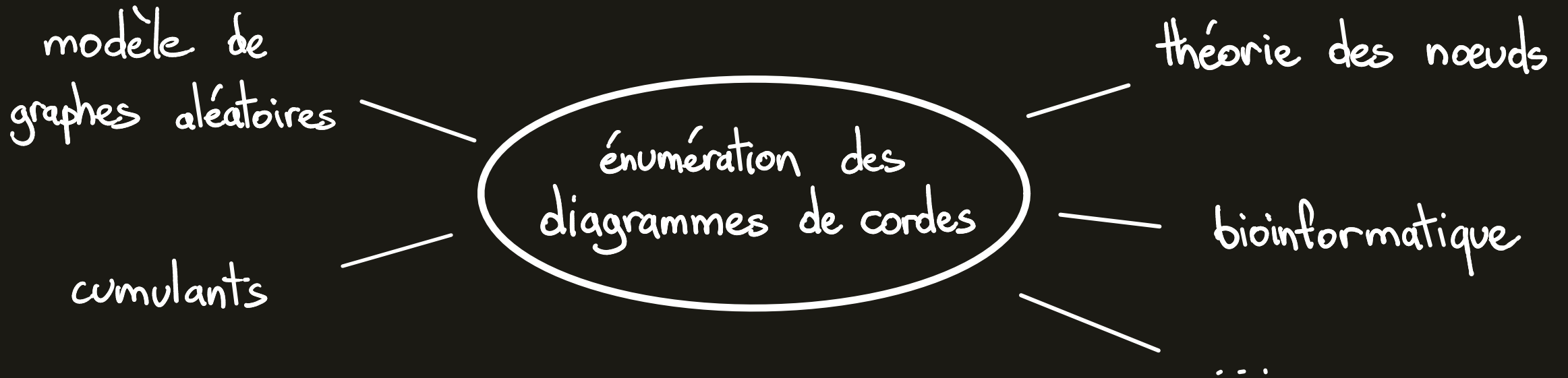
énumération des
diagrammes de cordes

théorie des noeuds

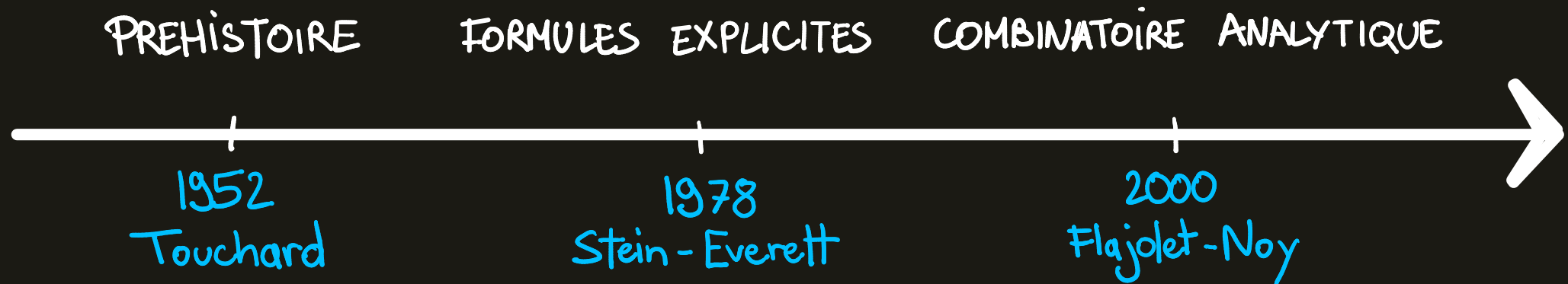
bioinformatique

...

PETIT ÉTAT DES LIEUX



Énumération des diagrammes connexes :



ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

nombre de diagrammes à n cordes = ??? ?
nombre de diagrammes **connexes** à n cordes = c_n

SCRATCH
SCRATCH



$$c_1 = 1 \quad c_2 = 1 \quad c_3 = 4 \quad c_4 = 27 \quad c_5 = 248$$

Pour $n=3$:



Formule de récurrence [Stein] $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

nombre de diagrammes à n cordes = $(2n-1)!!$

nombre de diagrammes **connexes** à n cordes = c_n

$$c_1 = 1 \quad c_2 = 1 \quad c_3 = 4 \quad c_4 = 27 \quad c_5 = 248$$



Formule de récurrence [Stein] $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$?

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

Formule: $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2(n-k)-1) \times c_{n-k} \times c_k$ $k \leftarrow n-k$

Formule: $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

+ $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2(n-k)-1) \times c_{n-k} \times c_k$

$k \leftarrow n-k$

$$2c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2) \times c_k \times c_{n-k}$$

Formule: $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

+ $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2(n-k)-1) \times c_{n-k} \times c_k$

$k \leftarrow n-k$

$$2c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2) \times c_k \times c_{n-k}$$

% 2

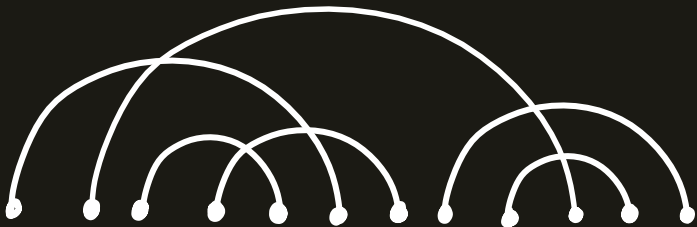
Formule: $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



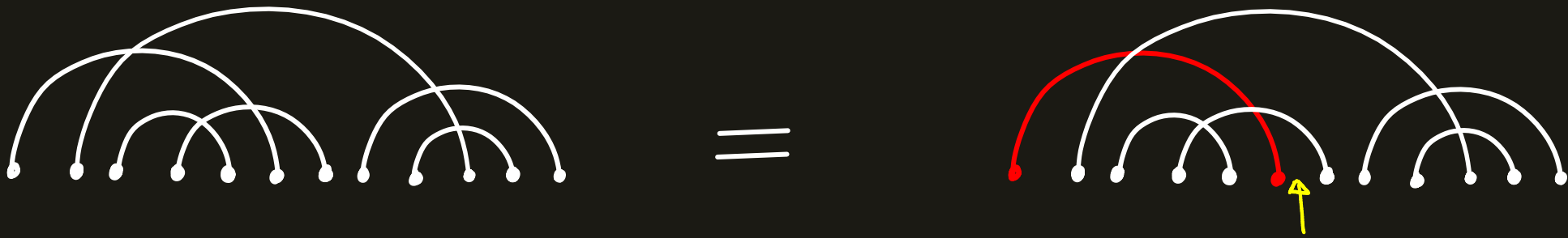
ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



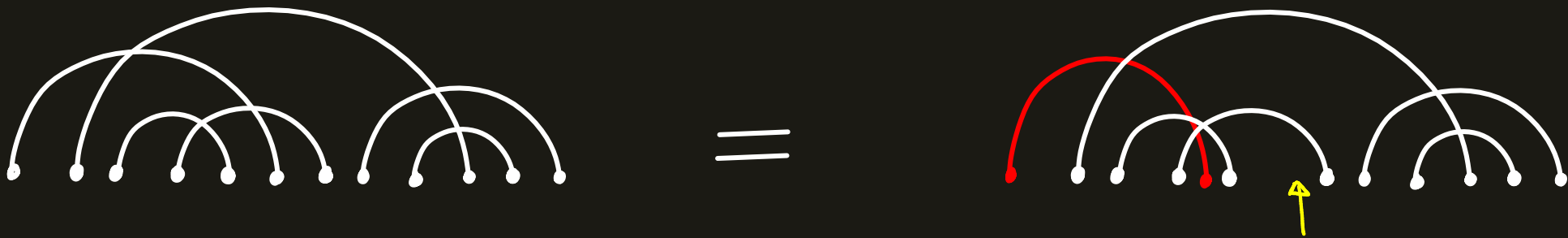
ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



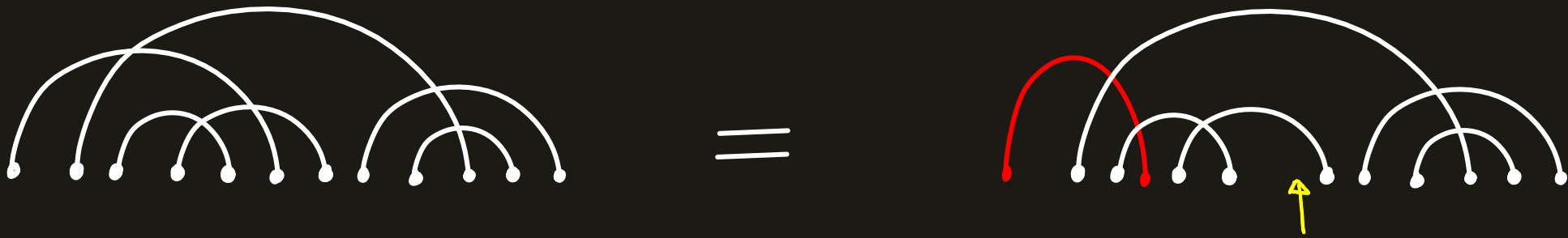
ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



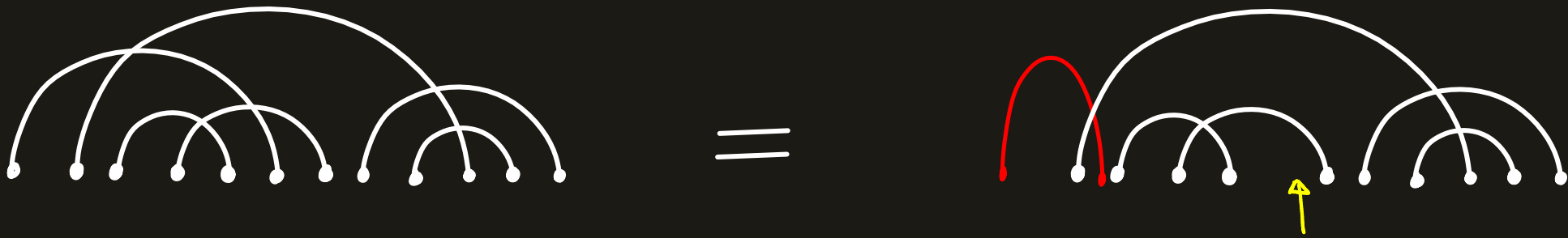
ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



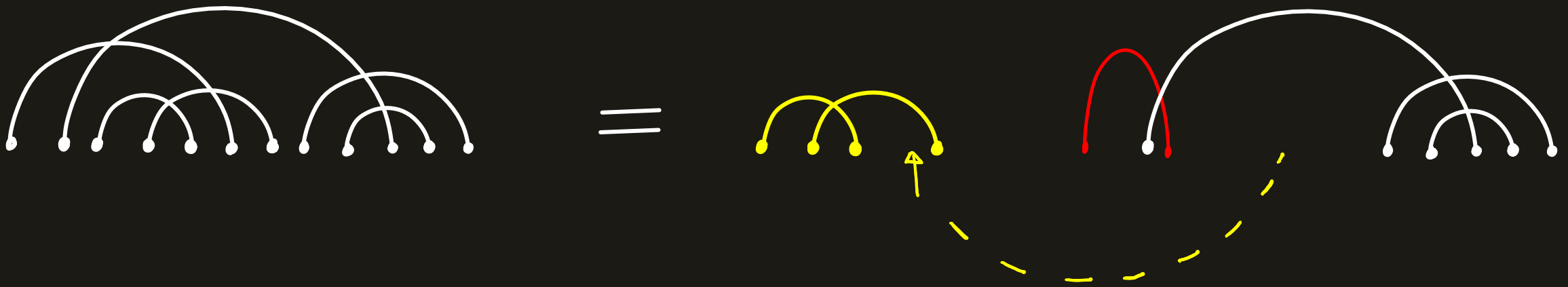
ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



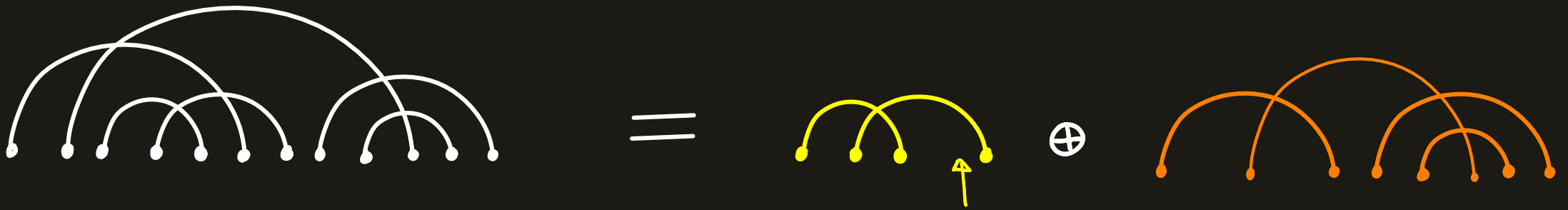
ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



=



k cordes

\oplus



$n-k$ cordes

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

$$c_n \sim \frac{1}{e} \times (2n-1)!! \quad [\text{Stein-Everett}]$$

Corollaire : $\mathbb{P}(\text{diagramme connexe}) = \frac{c_n}{(2n-1)!!} \rightarrow \frac{1}{e}$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

$$c_n \sim \frac{1}{e} \times (2n-1)!! \quad [\text{Stein-Everett}]$$

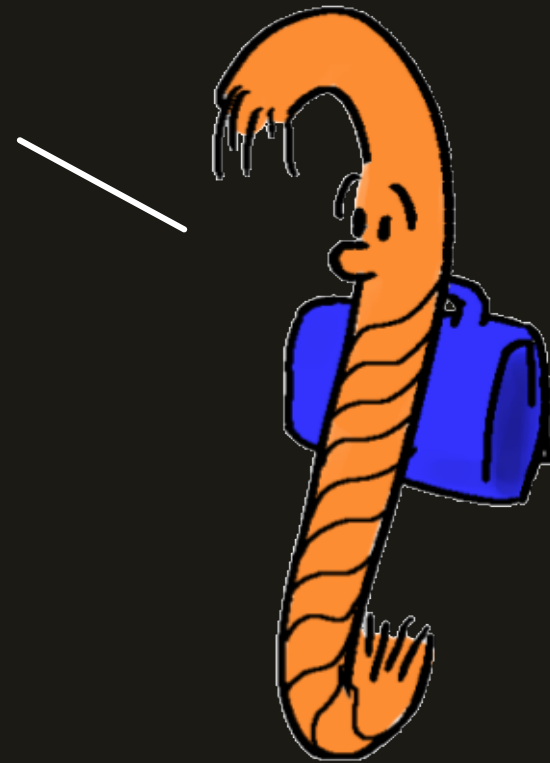
Corollaire : $\mathbb{P}(\text{diagramme connexe}) = \frac{c_n}{(2n-1)!!} \rightarrow \frac{1}{e}$

Plus fort [Flajolet-Noy]

- nombre de composantes connexes \sim Poisson (1)
- $|C|$ - taille de la plus grande composante \sim Poisson (1)

CORDES TERMINALES DANS LES DÉVELOPPEMENTS LOG-DOMINANTS

JE SUIS
EN TERMINALE
MAIS JE NE SAIS
PAS CE QUE VEUT
DIRE "LOGUE"



DÉVELOPPEMENT(S) LOG-DOMINANT(S)

Théorème [Marie, Yeats]

Rappelez-vous

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{C \text{ diagramme}} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

de cordes connexe
tel que $t_1 \geq i$
où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
désigne les positions
des cordes terminales de C

DÉVELOPPEMENT(S) LOG-DOMINANT(S)

Théorème [Marie, Yeats]

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \\ \text{tel que } t_1 \geq i \\ \text{où } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{désigne les positions} \\ \text{des cordes terminales de } C}} \frac{x^i}{i!}$$

de cordes connexe
tel que $t_1 \geq i$
où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
désigne les positions
des cordes terminales de C

$x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$

↑
on veut minimiser les
grandes puissances de x
(car contribution plus faible)

DÉVELOPPEMENT(S) LOG-DOMINANT(S)

Théorème [Marie, Yeats]

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \\ \text{tel que } t_1 \geq i}} \frac{(Lx)^i}{i!} x^{|C|-i} b_0^{|C|-k} b_{t_1-i} b_{t_2-t_1} b_{t_3-t_2} \dots b_{t_k-t_{k-1}}$$

$$i \leq t_1 \leq |C|$$

où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
désigne les positions
des cordes terminales de C

on veut minimiser les
grandes puissances de x
(car contribution plus faible)

DÉVELOPPEMENT(S) LOG-DOMINANT(S)

Théorème [Marie, Yeats]

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \\ \text{tel que } t_1 \geq i}} \frac{(Lx)^i}{i!} x^{|C|-i} b_0^{|C|-k} b_{t_1-i} b_{t_2-t_1} b_{t_3-t_2} \dots b_{t_k-t_{k-1}}$$

$$i \leq t_1 \leq |C|$$

où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
désigne les positions
des cordes terminales de C

on veut minimiser les
grandes puissances de x
(car contribution plus faible)

Coefficient de $(Lx)^i x^{|C|-i}$ pour i proche de $|C|$?

DÉVELOPPEMENT(S) LOG-DOMINANT(S)

Théorème [Marie, Yeats]

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \\ \text{tel que } t_1 \geq i}} \frac{(Lx)^i}{i!} x^{|C|-i} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

$$i \leq t_1 \leq |C|$$

où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
désigne les positions
des cordes terminales de C

on veut minimiser les
grandes puissances de x
(car contribution plus faible)

Coefficient de $(Lx)^i x^{|C|-i}$ pour i proche de $|C|$?

- $|C| = i$: développement log-dominant [Krümer-Kreiger]
- $|C| = i + 1$: développement log-dominant d'après
- $|C| = i + k$: développement log-dominant d'après d'après... d'après
k fois

DÉVELOPPEMENT(S) LOG-DOMINANT(S)

Théorème [Marie, Yeats]

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \\ \text{tel que } t_1 \geq i}} \frac{(Lx)^i}{i!} x^{|C|-i} b_0^{|C|-k} b_{t_1-i} b_{t_2-t_1} b_{t_3-t_2} \dots b_{t_k-t_{k-1}}$$

$$i \leq t_1 \leq |C|$$

où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
désigne les positions
des cordes terminales de C

on veut minimiser les
grandes puissances de x
(car contribution plus faible)

Coefficient de $(Lx)^i x^{|C|-i}$ pour i proche de $|C|$?

- $|C| = i$: développement log-dominant
- $t_1 = |C|$
- C n'a qu'une seule corde terminale

SEULEMENT UNE SEULE CORDE TERMINALE

nombre de diagrammes connexes à n cordes et une seule corde terminale

$$\parallel \\ (2n-3)!!$$

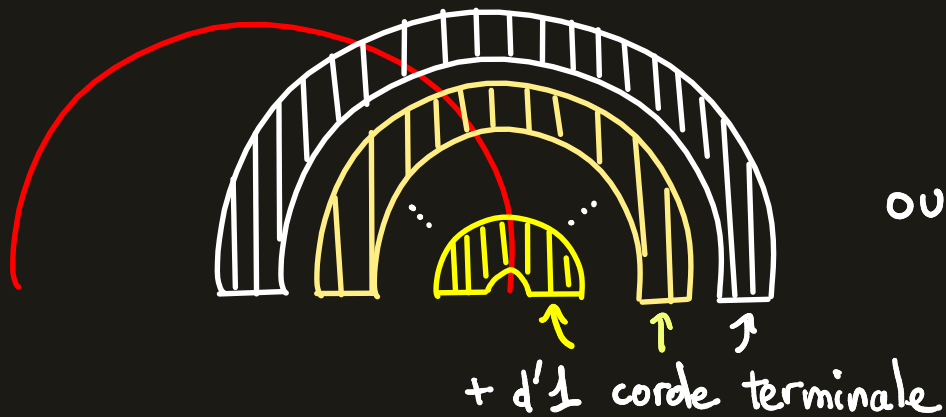
Preuve:

SEULEMENT UNE SEULE CORDE TERMINALE

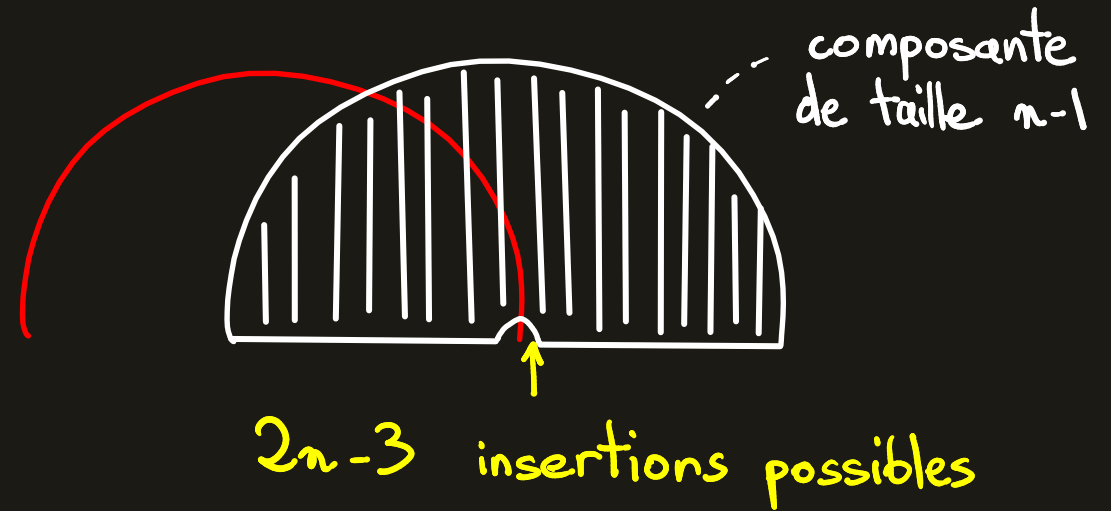
nombre de diagrammes connexes à n cordes et une seule corde terminale

$$\parallel \\ (2n-3)!!$$

Preuve:



ou



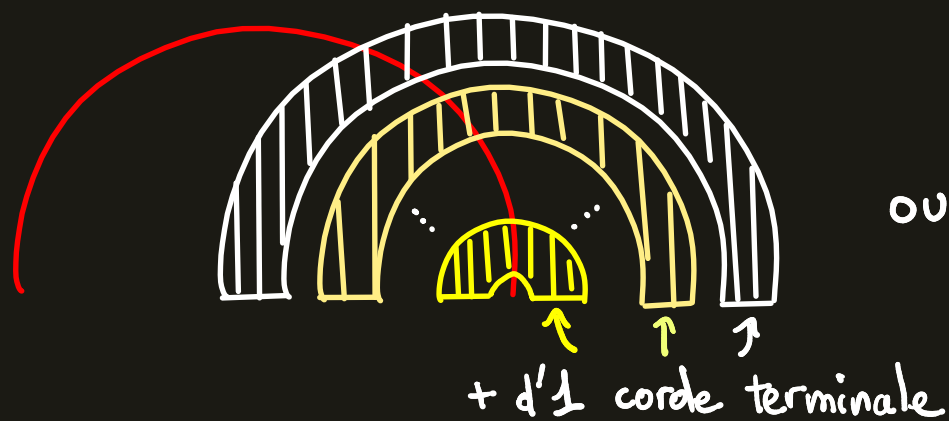
∩ IMPOSSIBLE!

SEULEMENT UNE SEULE CORDE TERMINALE

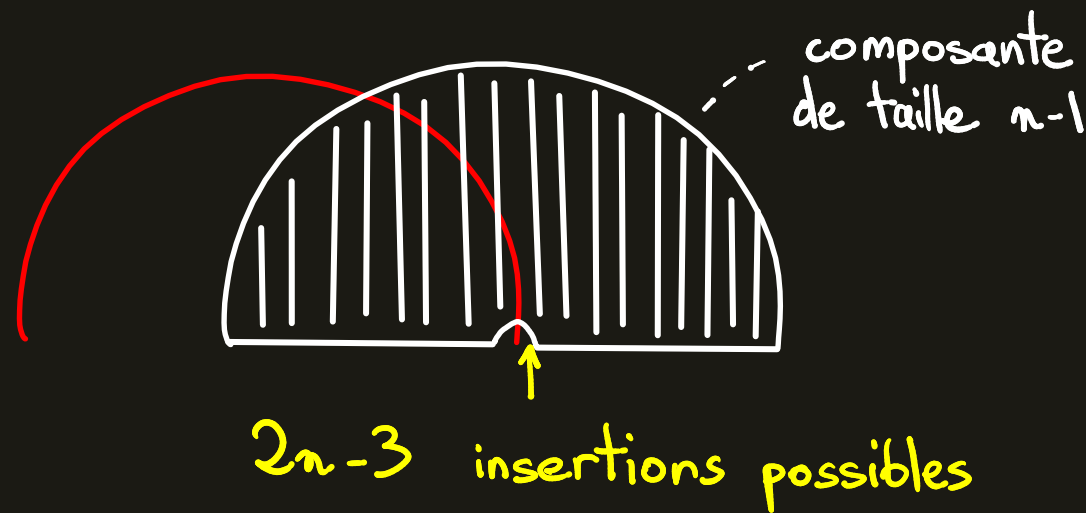
nombre de diagrammes connexes à n cordes et une seule corde terminale

$$\parallel \\ (2n-3)!!$$

Preuve:



ou




∩ IMPOSSIBLE!

Corollaire:

$$n^{\text{ième}} \text{ coefficient du développement log-dominant} = \frac{(2n-3)!!}{n!} f_0^n$$

$l^{\text{ième}}$ DÉVELOPPEMENT LOG-DOMINANT


→ Concerne les diagrammes tels que $t_1 \geq |C| - l$

→ La bijection  =  \oplus  fonctionne.

→ Ingrédients: récursion \oplus techniques de combinatoire analytique.

$l^{\text{ième}}$ DÉVELOPPEMENT LOG-DOMINANT

→ Concerne les diagrammes tels que $t_1 \geq |C| - l$

→ La bijection  =  \oplus  fonctionne.

→ Ingrédients: récursion \oplus techniques de combinatoire analytique.

Théorème: Pour $l \geq 0$,

nombre de diagrammes connexes à n cordes tels que $t_1 \geq |C| - l$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{l+1} l!} \times \frac{\ln(n)^l}{n^{\frac{3}{2}}} \times n!$$

$l^{\text{ième}}$ DÉVELOPPEMENT LOG-DOMINANT

→ Concerne les diagrammes tels que $t_1 \geq |C| - l$

→ La bijection  fonctionne.

→ Ingrédients: récursion \oplus techniques de combinatoire analytique.

Théorème: Pour $l \geq 0$,




nombre de diagrammes connexes à n cordes tels que $t_1 \geq |C| - l$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{l+1} l!} \times \frac{\ln(n)^l}{n^{\frac{3}{2}}} \times n!$$

Mais quid de $f_0^{|C|-k} f_{t_1-t_1} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$?

OÙ SEULES LES l DERNIÈRES CORDES SONT TERMINALES

→ Énumérons les diagrammes tels que toutes les cordes terminales sont parmi les l dernières.

→ La bijection  =  \oplus  fonctionne.

→ Ingrédients: récursion \oplus techniques de combinatoire analytique.

Théorème: Pour $l \geq 0$,


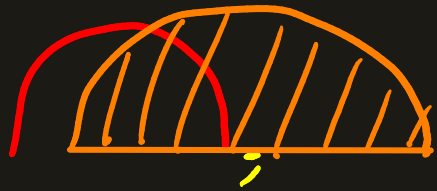
nombre de diagrammes connexes à n cordes tels que

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{l+1} l!} \times \frac{\ln(n)^l}{n^{\frac{3}{2}}} \times n!$$

seules les l dernières cordes sont terminales

OÙ SEULES LES l DERNIÈRES CORDES SONT TERMINALES

→ Énumérons les diagrammes tels que toutes les cordes terminales sont parmi les l dernières.

→ La bijection  =  \oplus  fonctionne.

→ Ingrédients: récursion \oplus techniques de combinatoire analytique.

Théorème: Pour $l \geq 0$,

nombre de diagrammes connexes à n cordes tels que

seules les l dernières cordes sont terminales

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{l+1} l!} \times \frac{\ln(n)^l}{n^{\frac{3}{2}}} \times n!$$

$$|c| \quad f_0^{|c|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \cdots f_{t_k-t_{k-1}} = f_0^{n-l+1} f_1^{l-1}$$

$l^{\text{ième}}$ DÉVELOPPEMENT LOG-DOMINANT

Ainsi les diagrammes tels que seules les l dernières cordes sont terminales sont dominants parmi les diagrammes tels que $t_1 \geq |C| - l$.

Théorème: Pour $l \geq 0$,

$$n^{\text{ième}} \text{ coefficient du } l^{\text{ième}} \text{ développement log-dominant} \\ \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{l+1} l!} \times \frac{\ln(n)^l}{n^{\frac{3}{2}}} \times n! \times f_0^{n-l+1} \times f_1^{l-1}$$

$l^{\text{ième}}$ DÉVELOPPEMENT LOG-DOMINANT

Ainsi les diagrammes tels que seules les l dernières cordes sont terminales sont dominants parmi les diagrammes tels que $t_1 \geq |C| - l$.

Théorème: Pour $l \geq 0$,

$$n^{\text{ième}} \text{ coefficient du } l^{\text{ième}} \text{ développement log-dominant} \\ \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{l+1} l!} \times \frac{\ln(n)^l}{n^{\frac{3}{2}}} \times n! \times f_0^{n-l+1} \times f_1^{l-1}$$

Seuls f_0 et f_1 comptent !

CORDES TERMINALES POUR LA DISTRIBUTION UNIFORME



MAAIS...

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

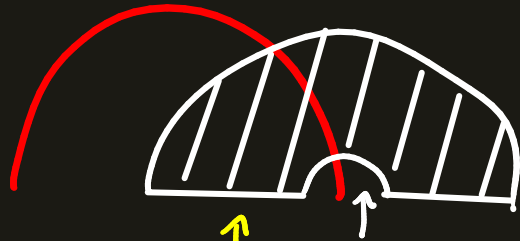
Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle! 😞

Idée: 😊



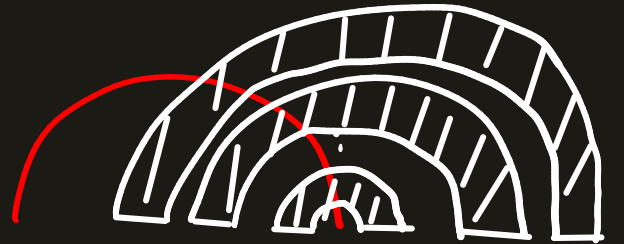
↑
grand nombre
de cordes

=



↑
proba??

ou



NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

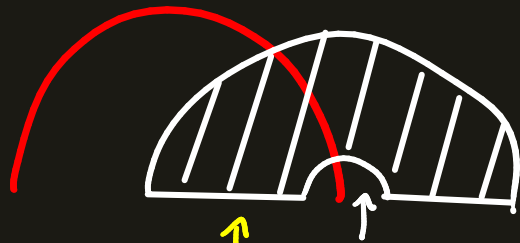
Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle! 😞

Idée: 😊



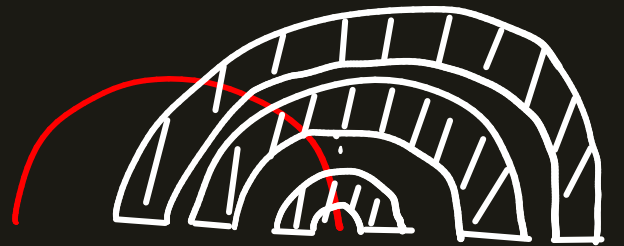
↑
grand nombre
de cordes

=



↑
proba??

ou



NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

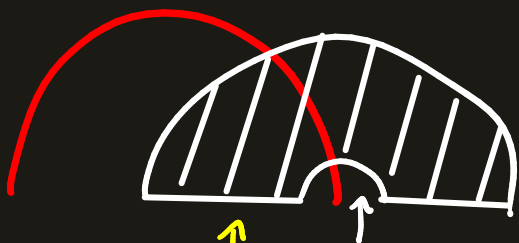
Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle! 😞

Idée: 😊

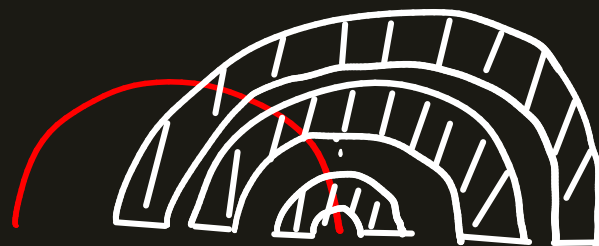


↑
grand nombre
de cordes

=



ou



↑
proba = $\frac{(2n-3) c_{n-1}}{c_n}$
→ 1

↑
proba → 0

Enlever la corde racine ne déconnecte pas le diagramme presque sûrement.
Intéressant mais insuffisant!

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

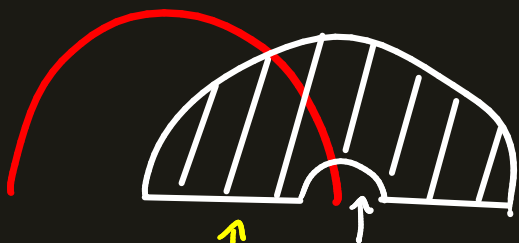
Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle! 😞

Idée: 😊

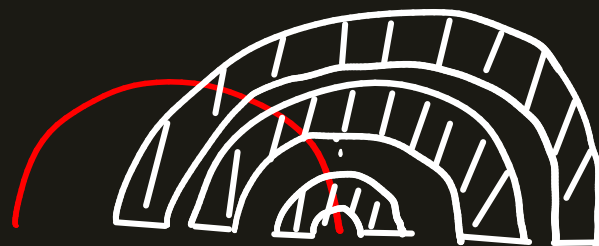


↑
grand nombre
de cordes

=



ou



↑
proba = $\frac{(2n-3) c_{n-1}}{c_n}$
→ 1

↑
proba → 0

Enlever la corde racine ne déconnecte pas le diagramme presque sûrement.
Intéressant mais insuffisant! 😞

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

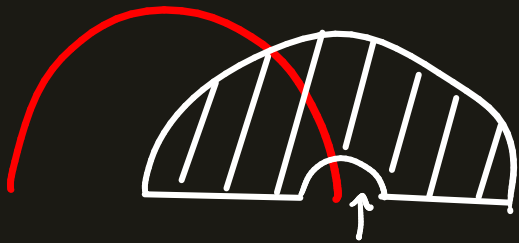
Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle! 😞

Idée: 😊

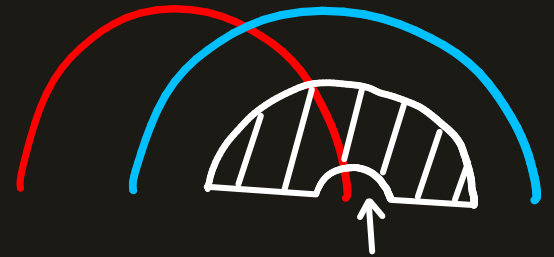


↑
grand nombre
de cordes

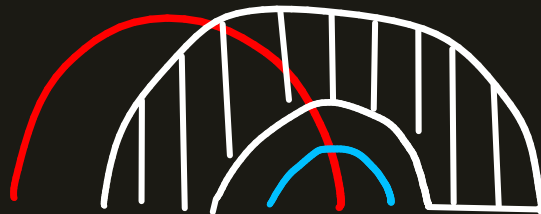
=



ou



ou



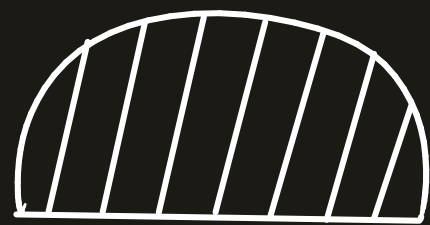
ou



NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

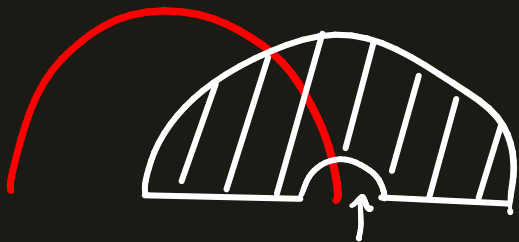
Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle! 😞

Idée: 😊

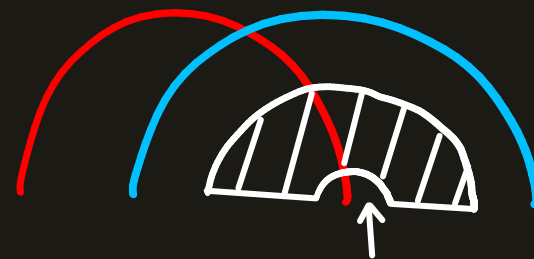


↑
grand nombre
de cordes

=



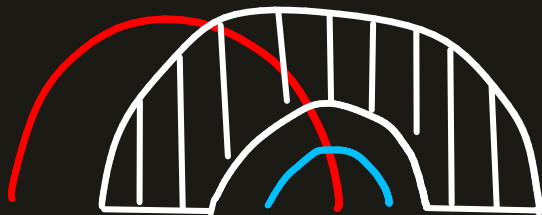
ou



$$\text{proba} = (2n-3) \frac{c_{n-1}}{c_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{proba} = (2n-5) \frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

ou



ou



$$\text{proba} = (2n-5) \frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

$$\text{proba} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

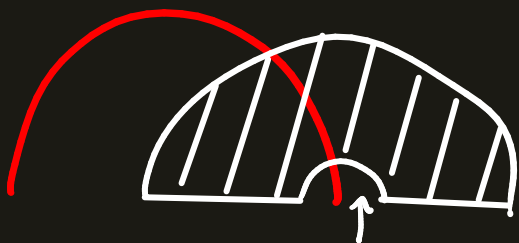
Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle! 😞

Idée: 😊

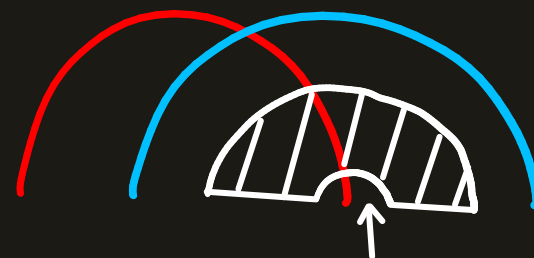


↑
grand nombre
de cordes

=



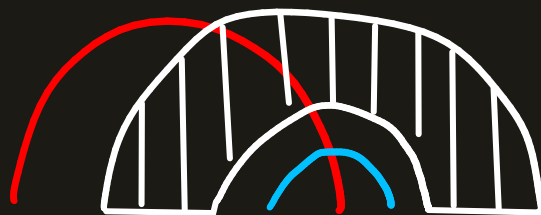
ou



$$\text{proba} = (2n-3) \frac{c_{n-1}}{c_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{proba} = (2n-5) \frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

ou



ou



$$\text{proba} = (2n-5) \frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

$$\text{proba} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle! 😞

Idée: 😊

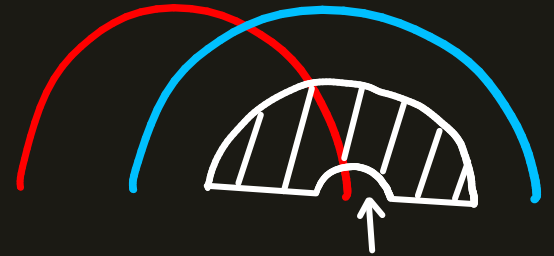


↑
grand nombre
de cordes

=



ou



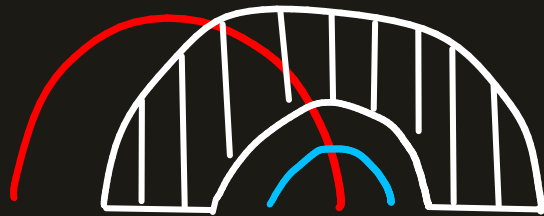
$$\text{proba} = (2n-3) \frac{c_{n-1}}{c_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{proba} = (2n-5) \frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

Ça va marcher!



ou



ou



$$\text{proba} = (2n-5) \frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

$$\text{proba} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

Définissons X_n comme la variable aléatoire telle que

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} & \text{avec proba } 1 - \frac{1}{n} \\ X_{n-1} + 1 & \text{avec proba } \frac{1}{n} \end{cases}$$

Idée n°1

Quelles que soient
les conditions initiales,

$X_n \rightarrow$ loi gaussienne

Idée n°2

Nombre de
cordes terminales

' \sim ' X_n

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

Théorème Pour la distribution uniforme,

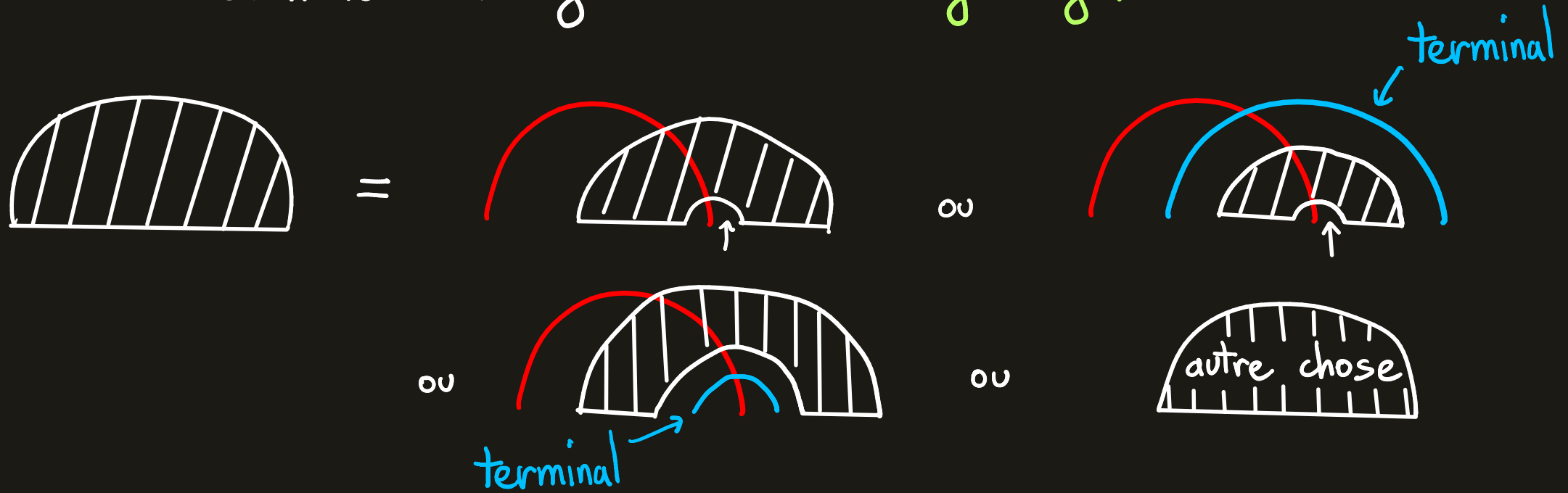
Nombre de cordes terminales $\xrightarrow{\text{loi}}$ Loi gaussienne
moyenne $\sim \ln(n)$
variance $\sim \ln(n)$

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES CONSÉCUTIVES

Si les cordes terminales sont en position $t_1 < t_2 < \dots < t_k$,
combien de j satisfont $t_j - t_{j-1} = 1$?

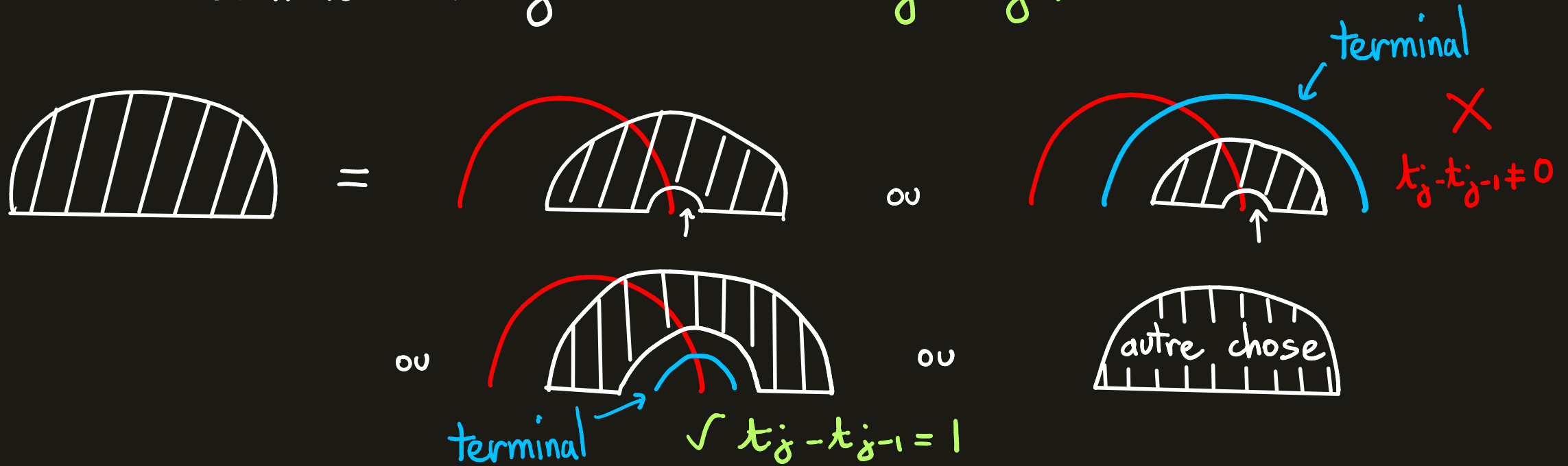
NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES CONSÉCUTIVES

Si les cordes terminales sont en position $t_1 < t_2 < \dots < t_k$,
combien de j satisfont $t_j - t_{j-1} = 1$?



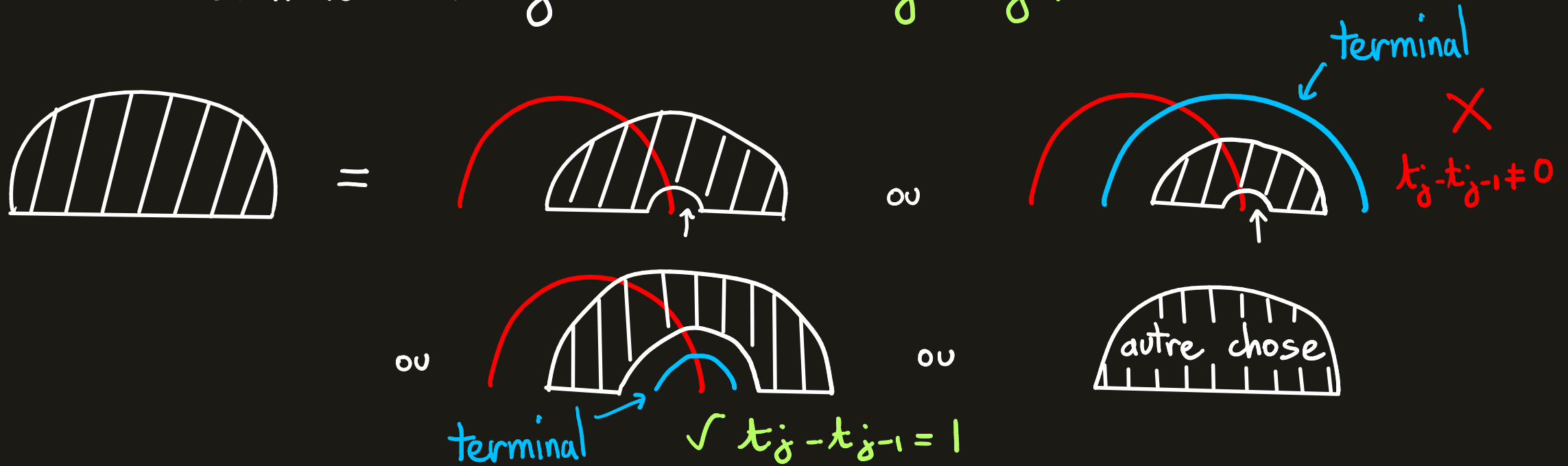
NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES CONSÉCUTIVES

Si les cordes terminales sont en position $t_1 < t_2 < \dots < t_k$,
combien de j satisfont $t_j - t_{j-1} = 1$?



NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES CONSÉCUTIVES

Si les cordes terminales sont en position $t_1 < t_2 < \dots < t_k$,
combien de j satisfont $t_j - t_{j-1} = 1$?



Théorème Pour la distribution uniforme,
Loi gaussienne
Nombre de cordes terminales consécutives $\xrightarrow{\text{loi}}$ moyenne $\sim \frac{1}{2} \ln(n)$
variance $\sim \frac{1}{2} \ln(n)$

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES CONSÉCUTIVES

Si les cordes terminales sont en position $t_1 < t_2 < \dots < t_k$,
combien de j satisfont $t_j - t_{j-1} = 1$?

En moyenne, $f_0^{|\mathcal{C}|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}} \sim f_0^{n - \ln n} f_{t_1-i} f_1^{\frac{\ln n}{2}} \dots$

→ confirme l'importance de f_0 et f_1

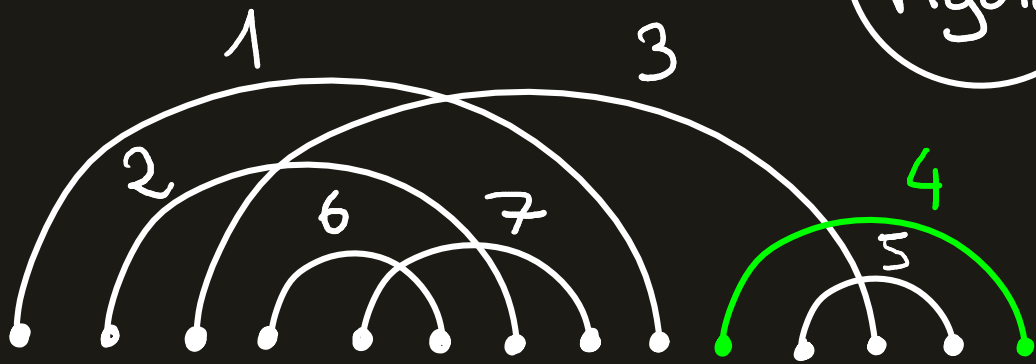
Théorème Pour la distribution uniforme,
Nombre de cordes terminales consécutives $\xrightarrow{\text{loi}}$ Loi gaussienne
moyenne $\sim \frac{1}{2} \ln(n)$
variance $\sim \frac{1}{2} \ln(n)$

POSITION DE LA PREMIÈRE CORDE TERMINALE

t_1 = variable aléatoire qui retourne la position de la 1^{ère} corde terminale

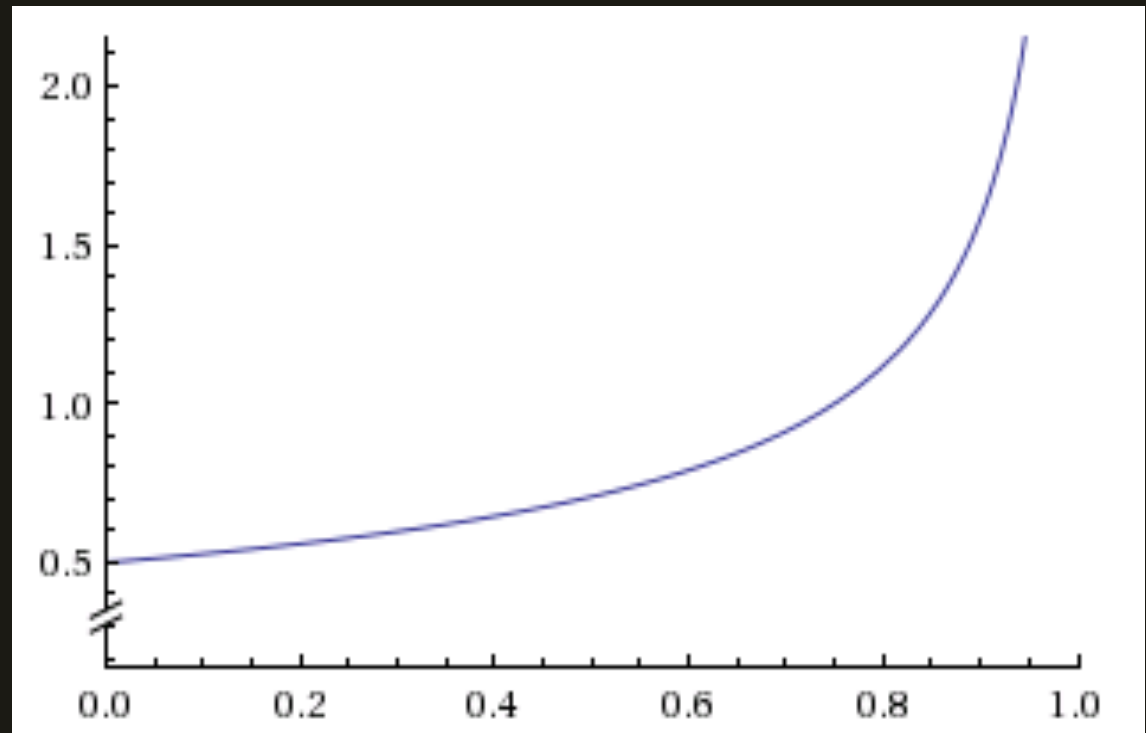
Première corde terminale = corde à l'extrémité la plus à droite

Fait rigolo



Théorème: $\mathbb{E}(t_1) \sim \frac{2}{3}n$

$\frac{t_1}{n} \xrightarrow{\text{loi}}$ loi de densité $\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \mathbb{1}_{\{0 < x < 1\}}$



CONCLUSION

- Retrouve les résultats de [Krüger-Kreimer]
- ⊕ automaticité de la méthode
 - ⊕ comportement asymptotique

→ Loi limite de $t_j - t_{j-1}$?

Conjecture:

partie discrète	⊕	partie continue
$\mathbb{P}(t_j - t_{j-1} = 1) \rightarrow \frac{1}{2}$		moyenne
		$\sim \frac{2}{3} \frac{n}{\ln n}$

→ Extension aux résultats de [Hahn-Yeats] ← travail en cours



THANK
YOU!