Cartes planaires équipées d'une forêt couvrante

COURTIEL Julien

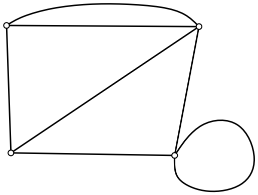
travail joint avec Mireille BOUSQUET-MÉLOU, LaBRI (Bordeaux).

Journées MAS 2012

Définition

Carte planaire	=	graphe connexe
	+	plongement de ce graphe sur une sphère,
		le tout considéré à isotopie/déformation près.

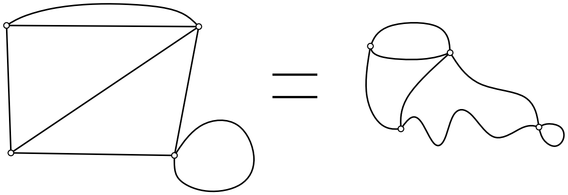
Exemple :



Définition

Carte planaire	=	graphe connexe
	+	plongement de ce graphe sur une sphère,
		le tout considéré à isotopie/déformation près.

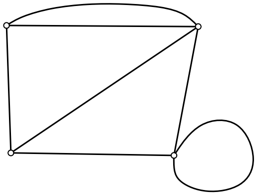
Exemple :



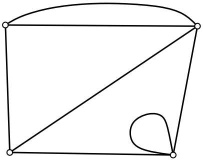
Définition

Carte planaire	$=$	graphe connexe
	$+$	plongement de ce graphe sur une sphère,
		le tout considéré à isotopie/déformation près.

Exemple :



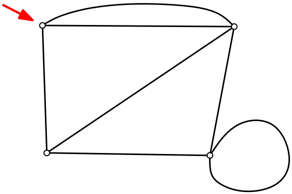
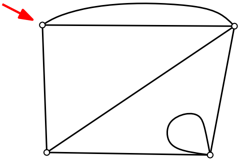
$\neq$



Définition

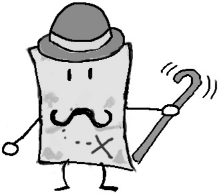
Carte planaire $=$ graphe connexe
$+$ plongement de ce graphe sur une sphère,
le tout considéré à isotopie/déformation près.

Exemple :


$\neq$


Les cartes considérées dans cet exposé sont **enracinées** en un coin.

Pourquoi étudie-t-on les forêts couvrantes ?



Potts, son polynôme et sa série génératrice

Pour un graphe G, le **polynôme de Potts** se définit comme :

$$P_G(q,\nu) := \sum_{\substack{\text{coloriage de } G \\ \text{à } q \text{ couleurs}}} \nu^{\#\text{arêtes monochromatiques}}.$$

- Le cas $\nu = 0$ revient à étudier le **polynôme chromatique** ;
- Le cas $q = 2$ est le **modèle d'Ising**.

Potts, son polynôme et sa série génératrice

Pour un graphe G, le **polynôme de Potts** se définit comme :

$$P_G(q,\nu) := \sum_{\substack{\text{coloriage de } G \\ \text{à } q \text{ couleurs}}} \nu^{\#\text{arêtes monochromatiques}}.$$

- Le cas $\nu = 0$ revient à étudier le **polynôme chromatique** ;
- Le cas $q = 2$ est le **modèle d'Ising**.

Soit $\mathfrak{C}$ une classe de cartes planaires.
On définit la **série génératrice de Potts** associée à $\mathfrak{C}$ comme

$$\boxed{M(q,\nu,t,z) := \frac{1}{q} \sum_{C \in \mathfrak{C}} t^{|E(C)|} z^{|F(C)|} P_C(q,\nu).}$$

Nature de la série ?

Question : Nature de la série $M(q, \nu, t, z)$?

Question : Nature de la série $M(q, \nu, t, z)$?

- **Est-elle algébrique ?** Existe-t-il un polynôme P vérifiant

$$P(M) = 0?$$

- **Est-elle différentiellement finie (ou holonome) ?** Existe-t-il une forme linéaire L tel que

$$L(M, \frac{\partial M}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^k M}{\partial t^k}) = 0?$$

- **Est-elle différentiellement algébrique ?** Existe-t-il un polynôme Q tel que

$$Q(M, \frac{\partial M}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^k M}{\partial t^k}) = 0?$$

Note : P, Q et L sont non nuls à coefficients dans $\mathbb{Q}(q, \nu, t, z)$.

Nature de la série ?

Question : Nature de la série $M(q, \nu, t, z)$?

- **Est-elle algébrique ?** Existe-t-il un polynôme P vérifiant
$$P(M) = 0?$$
NON, l'asymptotique des coefficients pour certaines valeurs de q et ν est en $\rho^{-n} n^{-3}$. [Mullin,1967][Flajolet,1985]
- **Est-elle différentiellement finie (ou holonome) ?** Existe-t-il une forme linéaire L tel que
$$L(M, \frac{\partial M}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^k M}{\partial t^k}) = 0?$$
- **Est-elle différentiellement algébrique ?** Existe-t-il un polynôme Q tel que
$$Q(M, \frac{\partial M}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^k M}{\partial t^k}) = 0?$$

Note : P, Q et L sont non nuls à coefficients dans $\mathbb{Q}(q, \nu, t, z)$.

La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires générales est différentiellement algébrique.

Toujours vrai si on remplace les cartes planaires générales par les quasi-triangulations.

Ce résultat est un véritable tour de force. Mais :

- Preuve très technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.
- On ne sait rien pour les autres classes de cartes.

La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires générales est différentiellement algébrique.

Toujours vrai si on remplace les cartes planaires générales par les quasi-triangulations.

Ce résultat est un véritable tour de force. Mais :

- Preuve très technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.
- On ne sait rien pour les autres classes de cartes.

La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires générales est différentiellement algébrique.

Toujours vrai si on remplace les cartes planaires générales par les quasi-triangulations.

Ce résultat est un véritable tour de force. Mais :

- Preuve très technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.
- On ne sait rien pour les autres classes de cartes.

La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires générales est différentiellement algébrique.

Toujours vrai si on remplace les cartes planaires générales par les quasi-triangulations.

Ce résultat est un véritable tour de force. Mais :

- Preuve très technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.
- On ne sait rien pour les autres classes de cartes.

La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires générales est différentiellement algébrique.

Toujours vrai si on remplace les cartes planaires générales par les quasi-triangulations.

Ce résultat est un véritable tour de force. Mais :

- Preuve très technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.
- On ne sait rien pour les autres classes de cartes.

La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires générales est différentiellement algébrique.

Toujours vrai si on remplace les cartes planaires générales par les quasi-triangulations.

Ce résultat est un véritable tour de force. Mais :

- Preuve très technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.
- On ne sait rien pour les autres classes de cartes.

Motivation : Résoudre ces problèmes sur des cas particuliers.

De Potts à Tutte

Le **polynôme de Tutte** $T_G(\mu, \nu)$ d'un graphe connexe G est un polynôme à **coefficient positifs** en μ et ν qu'on peut définir explicitement.

(Mais je ne veux pas vous le définir !)

Proposition [Fortuin, Kasteleyn, 1972]

Pour G connexe et $q = (\mu - 1)(\nu - 1)$, on a

$$P_G(q, \nu) = (\mu - 1)(\nu - 1)^{|V(G)|} T_G(\mu, \nu).$$

Le **polynôme de Tutte** $T_G(\mu, \nu)$ d'un graphe connexe G est un polynôme à **coefficient positifs** en μ et ν qu'on peut définir explicitement.

(Mais je ne veux pas vous le définir !)

Proposition [Fortuin, Kasteleyn, 1972]

Pour G connexe et $q = (\mu - 1)(\nu - 1)$, on a

$$P_G(q, \nu) = (\mu - 1)(\nu - 1)^{|V(G)|} T_G(\mu, \nu).$$

Pour $\mu = u + 1$ et $\nu = 1$:

$$T_G(u+1, 1) = \sum_{F \text{ forêt couvrante}} u^{cc(F)-1},$$

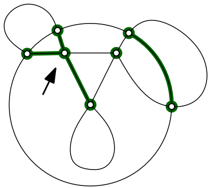
où $cc(F)$ désigne le nombre de composantes connexes de la forêt.

Une **forêt couvrante** dans un graphe G est un ensemble d'arêtes sans cycle.

(Chaque sommet non incident à l'ensemble des arêtes de la forêt compte pour une composante connexe.)

Simplification : $\mathfrak{C}$ $\leftarrow$ classe des cartes où chaque sommet a pour degré 4.

$$F(u,z) := \sum_{C \in \mathfrak{C}} T_C(u+1,1) z^{|F(C)|} = \sum_{\substack{C \in \mathfrak{C} \\ + \text{ forêt couvrante} \\ \text{pour } \mathfrak{C}}} u^{cc(\text{forêt})-1} z^{|F(C)|}.$$



Exemple : La contribution de cette carte à la série $F(u,z)$ est de :

$$u^2 z^9.$$

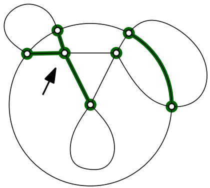
Question : Quelle est la nature de $F(u,z)$?

Une **forêt couvrante** dans un graphe G est un ensemble d'arêtes sans cycle.

(Chaque sommet non incident à l'ensemble des arêtes de la forêt compte pour une composante connexe.)

Simplification : $\mathfrak{C} \leftarrow$ classe des cartes où chaque sommet a pour degré 4.

$$F(u,z) := \sum_{C \in \mathfrak{C}} T_C(u+1,1) z^{|F(C)|} = \sum_{\substack{C \in \mathfrak{C} \\ + \text{ forêt couvrante} \\ \text{pour } \mathfrak{C}}} u^{cc(\text{forêt})-1} z^{|F(C)|}.$$



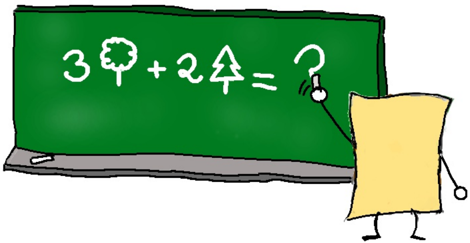
Exemple : La contribution de cette carte à la série $F(u,z)$ est de :

$$u^2 z^9.$$

Question : Quelle est la nature de $F(u,z)$?

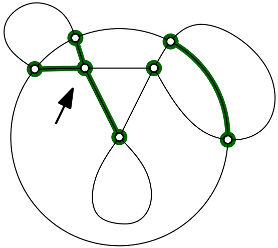
Remarque : F est à coefficients positifs en $(1+u)$.

Étudions les forêts couvrantes



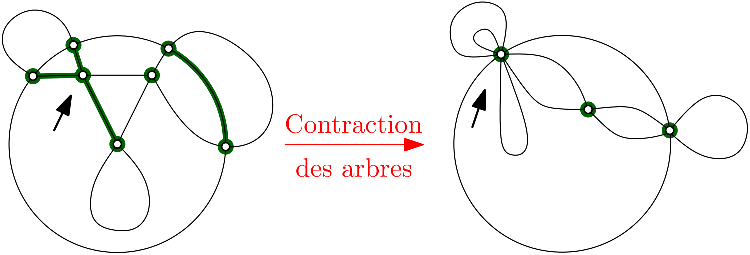
Blocked edges on Eulerian maps and mobiles (...),
de Bouttier, Di Francesco et Guitter (2008).

Contraction des arbres

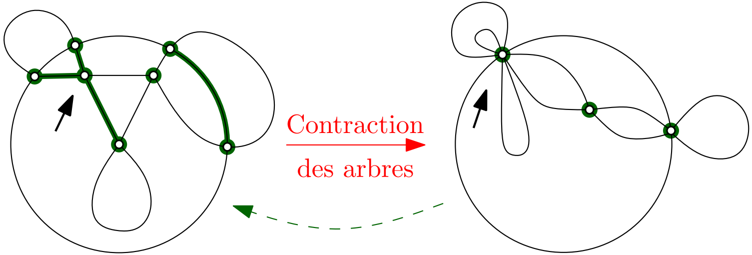


Contraction des arbres

En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.



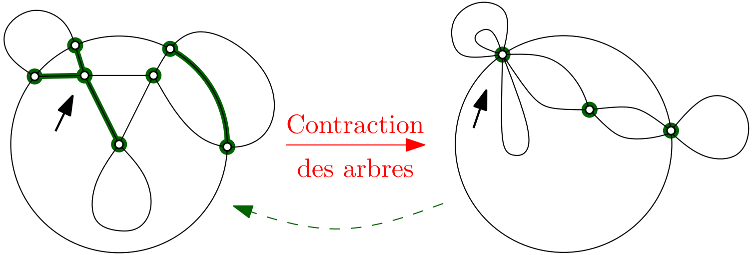
En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.



On peut revenir en arrière du moment où on connaît la répartition des degrés pour chaque sommet.

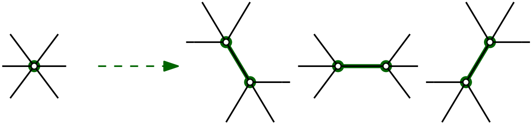
Contraction des arbres

En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.



On peut revenir en arrière du moment où on connaît la répartition des degrés pour chaque sommet.

Exemple :



3 manières différentes pour reconstruire

Équations obtenues

Grâce à Schaeffer (1997), Bouttier et Guitter (2011), on obtient après calculs :

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \theta(R),$$

où

$$R = z + u\phi(R),$$

avec

$$\theta : X \mapsto \sum_{k \geq 2} 4 \, \frac{(3\,(k-1))!\,X^k}{(k!)^2\,(k-2)!}$$

et

$$\phi : X \mapsto \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \binom{3(k-1)}{k-1, k-1, k-1} X^k.$$

Corollaire

Résumons :

$$R = z + u\phi(R)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \theta(R)$$

Résumons :

$$R = z + u\phi(R)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \theta(R)$$

Corollaire

Comme ϕ et θ sont holonomes, F est différentiellement algébrique.

Résumons :

$$R = z + u\phi(R)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \theta(R)$$

Corollaire

Comme ϕ et θ sont holonomes, F est différentiellement algébrique.

Quelques questions subsistent...

Peut-on calculer explicitement l'équation différentielle ?

Peut-on prouver l'holonomie ou la non-holonomie de F ?

Peut-on obtenir l'asymptotique ?

Peut-on en déduire des propriétés probabilistiques ?

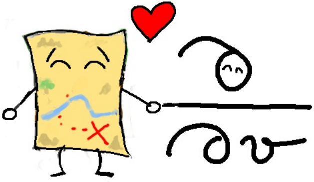
Équation différentielle

Peut-on calculer explicitement l'équation différentielle ?

Équation différentielle

Peut-on calculer explicitement l'équation différentielle ?

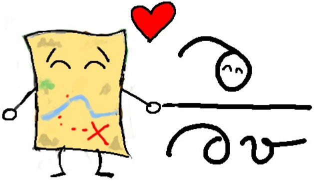
Oui.



Équation différentielle

Peut-on calculer explicitement l'équation différentielle ?

Oui.



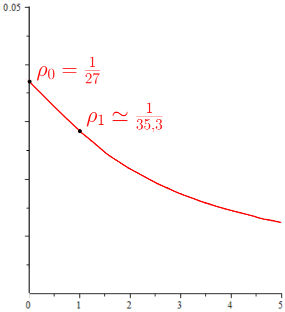
Toutefois l'équation différentielle trouvée est énorme (ce qui se confirme chez les autres classes de cartes).

Point positif : Avec la même méthode, on a retrouvé l'équation différentielle pour les cartes quasi-cubiques de Mireille Bousquet-Mélou et d'Olivier Bernardi.

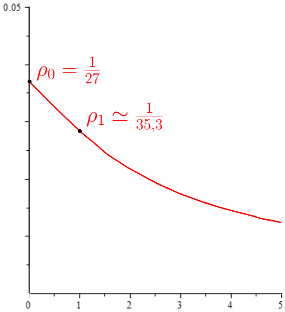
Rayon de convergence

On fixe u.
Considérons $F(u,z) = \sum_{n\geq 0} f_n(u)z^n$ comme série entière en z.
Appelons ρ_u le rayon de convergence.
(**Remarque :** $\lim_n |f_n(u)|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho_u}$)

On fixe u.
Considérons $F(u,z) = \sum_{n\geq 0} f_n(u) z^n$ comme série entière en z.
Appelons ρ_u le rayon de convergence.
(**Remarque :** $\lim_n |f_n(u)|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho_u}$)

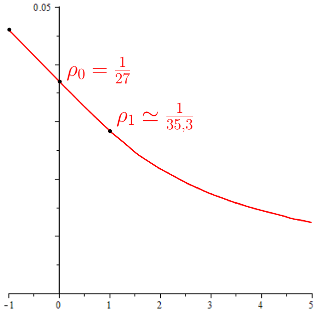


On fixe $u \in [-1, +\infty[$.
Considérons $F(u,z) = \sum_{n\geq 0} f_n(u) z^n$ comme série entière en z.
Appelons ρ_u le rayon de convergence.
(**Remarque :** $\lim_n |f_n(u)|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho_u}$)



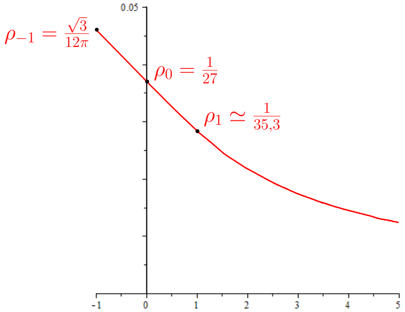
On fixe $u \in [-1, +\infty[$.
Considérons $F(u,z) = \sum_{n\geq 0} f_n(u) z^n$ comme série entière en z.
Appelons ρ_u le rayon de convergence.
(**Remarque :** $\lim_n |f_n(u)|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho_u}$)

Pour $-1 \leq u \leq 0$,
ρ_u est affine !



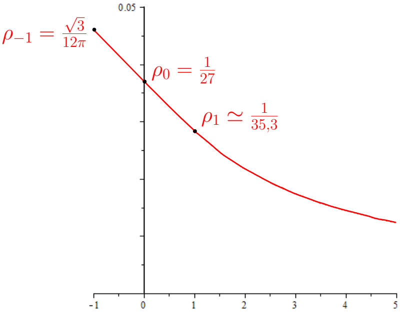
On fixe $u \in [-1, +\infty[$.
Considérons $F(u,z) = \sum_{n\geq 0} f_n(u) z^n$ comme série entière en z.
Appelons ρ_u le rayon de convergence.
(**Remarque :** $\lim_n |f_n(u)|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho_u}$)

Pour $-1 \leq u \leq 0$,
ρ_u est affine !
$$\rho_u = \frac{1}{27} - u\left(\frac{\sqrt{3}}{12\pi} - \frac{1}{27}\right)$$



On fixe $u \in [-1, +\infty[$.
Considérons $F(u,z) = \sum_{n\geq 0} f_n(u) z^n$ comme série entière en z.
Appelons ρ_u le rayon de convergence.
(**Remarque :** $\lim_n |f_n(u)|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho_u}$)

Pour $-1 \leq u \leq 0$,
ρ_u est affine !
$$\rho_u = \frac{1}{27} - u\left(\frac{\sqrt{3}}{12\pi} - \frac{1}{27}\right)$$



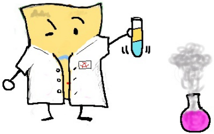
Corollaire

ρ_{-1} est transcendant : F n'est donc pas holonome.

Comportement asymptotique

Concluons par des équivalents de $f_n(u)$:

	$-1 \leq u < 0$	$u = 0$	$u > 0$
$f_n(u)$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^3 \ln(n)^2}$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^3}$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^{\frac{5}{2}}}$

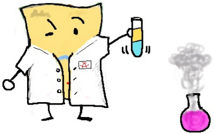


Du logarithme apparaît au dénominateur : un comportement encore jamais observé chez les cartes.

Comportement asymptotique

Concluons par des équivalents de $f_n(u)$:

	$-1 \leq u < 0$	$u = 0$	$u > 0$
$f_n(u)$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^3 \ln(n)^2}$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^3}$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^{\frac{5}{2}}}$



Du logarithme apparaît au dénominateur : un comportement encore jamais observé chez les cartes.

Corollaire

Pour $-1 \leq u < 0$ fixé, $F(u, z)$ n'est pas holonome en z.

Et les probas ?

Ce travail permettra :

- D'implémenter un algorithme de génération aléatoire.
- De prouver quelques propriétés probabilistisques, comme la loi limite de la taille de la composante racine.

Et les probas ?

Ce travail permettra :

- D'implémenter un algorithme de génération aléatoire.
- De prouver quelques propriétés probabilistisques, comme la loi limite de la taille de la composante racine.

Et les probas ?

Ce travail permettra :

- D'implémenter un algorithme de génération aléatoire.
- De prouver quelques propriétés probabilistisques, comme la loi limite de la taille de la composante racine.

Question ouverte

Comment se comporte asymptotiquement le diamètre d'une carte avec arbre couvrant/forêt couvrante ?

Fin