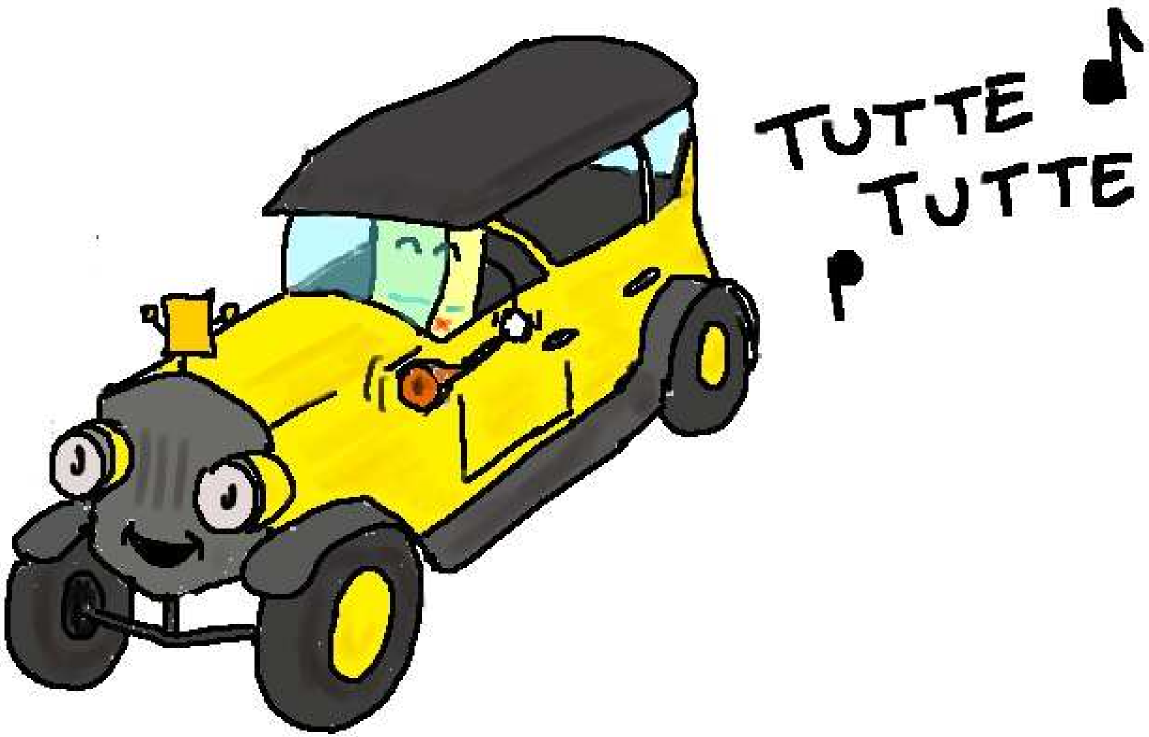
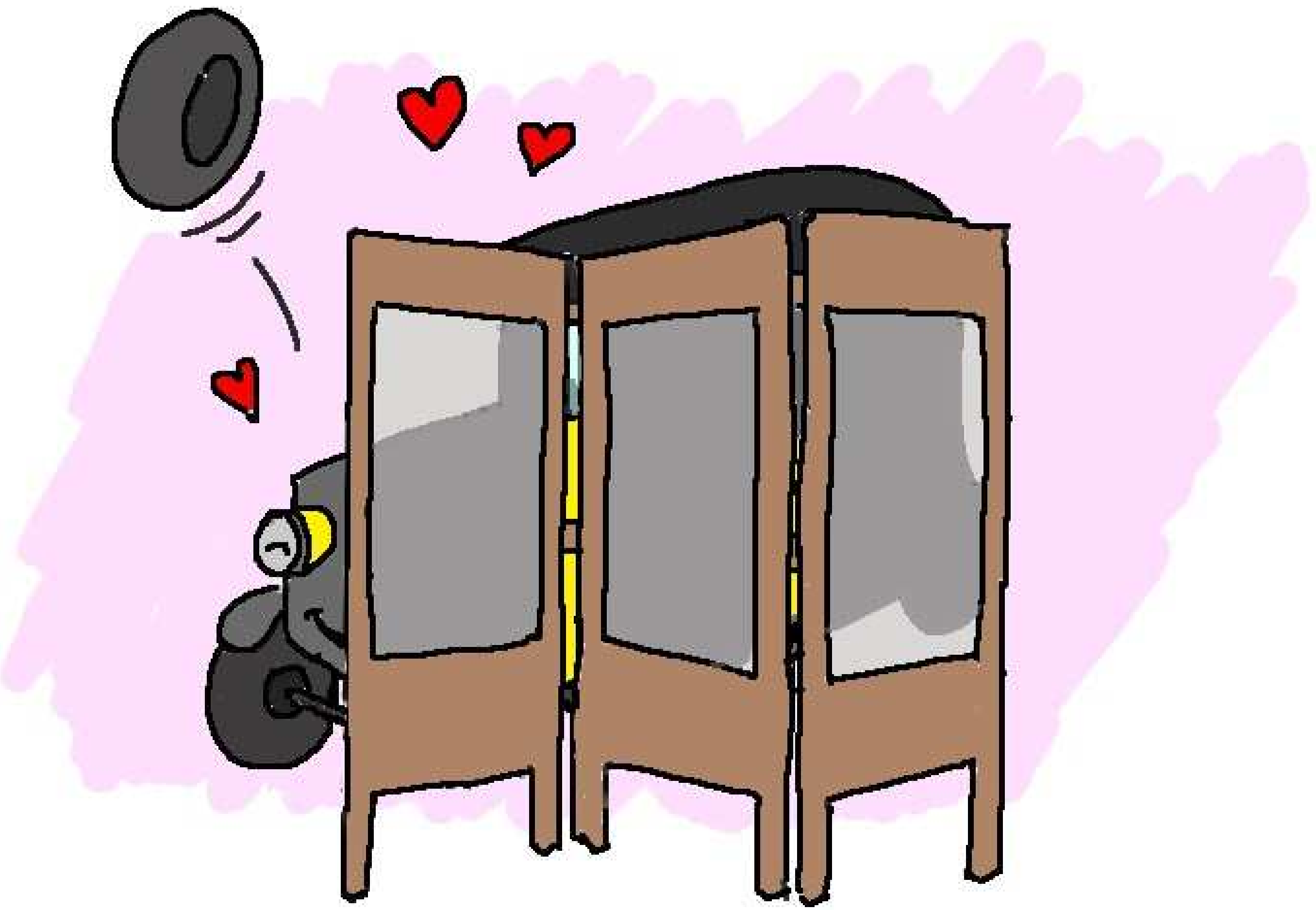
UNE DÉFINITION UNIFIÉE DE L' ACTIVITÉ POUR LE POLYNÔME DE TUTTE

COURTIEL Julien

Montpellier, 10 octobre 2013



LE POLYNÔME DE TUTTE SOUS TOUTES LES COUTURES

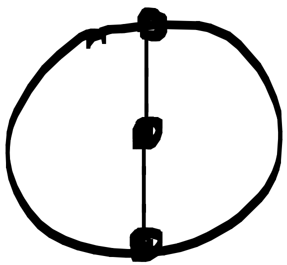


SOUS-GRAPHES COUVRANTS

Soit G un graphe, $V(G)$ = ensemble des sommets
$E(G)$ = ensemble des arêtes.

H est un sous-graphe (couvrant) de G ssi :

$$V(H) = V(G)$$
$$E(H) \subset E(G)$$



G

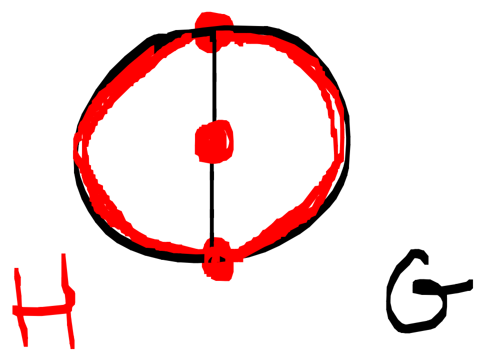
SOUS-GRAPHES COUVRANTS

Soit G un graphe, $V(G)$ = ensemble des sommets
$E(G)$ = ensemble des arêtes.

H est un sous-graphe (couvrant) de G ssi :

$$V(H) = V(G)$$

$$E(H) \subset E(G)$$



POLYNÔME DE TUTTE : DÉFINITION

Le polynôme de Tutte d'un graphe G est défini par :

$$\boxed{T_G(x,y) = \sum_{S \text{ sous-graphe de } G} (x-1)^{cc(S)-cc(G)} (y-1)^{nc(S)}}$$

[Whitney ~30 – Tutte ~50]

$cc(G)$ = nombre de composantes connexes de G

$nc(G)$ = nombre cyclomatique de G
= nombre minimal d'arêtes à enlever pour que G soit acyclique
$= |E(G)| + cc(G) - |V(G)|$

POLYNÔME DE TUTTE : DÉFINITION

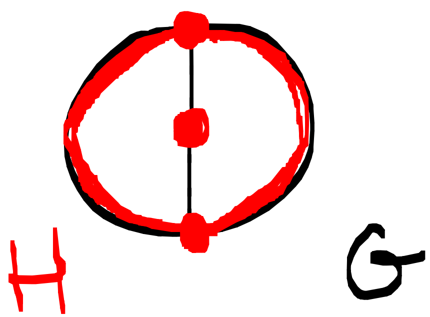
Le polynôme de Tutte d'un graphe G est défini par :

$$\boxed{T_G(x,y) = \sum_{\substack{S \text{ sous-}\\ \text{graphe de } G}} (x-1)^{cc(S)-cc(G)} (y-1)^{nc(S)} \quad \text{[Whitney} \sim 30 \text{ - Tutte} \sim 50]}$$

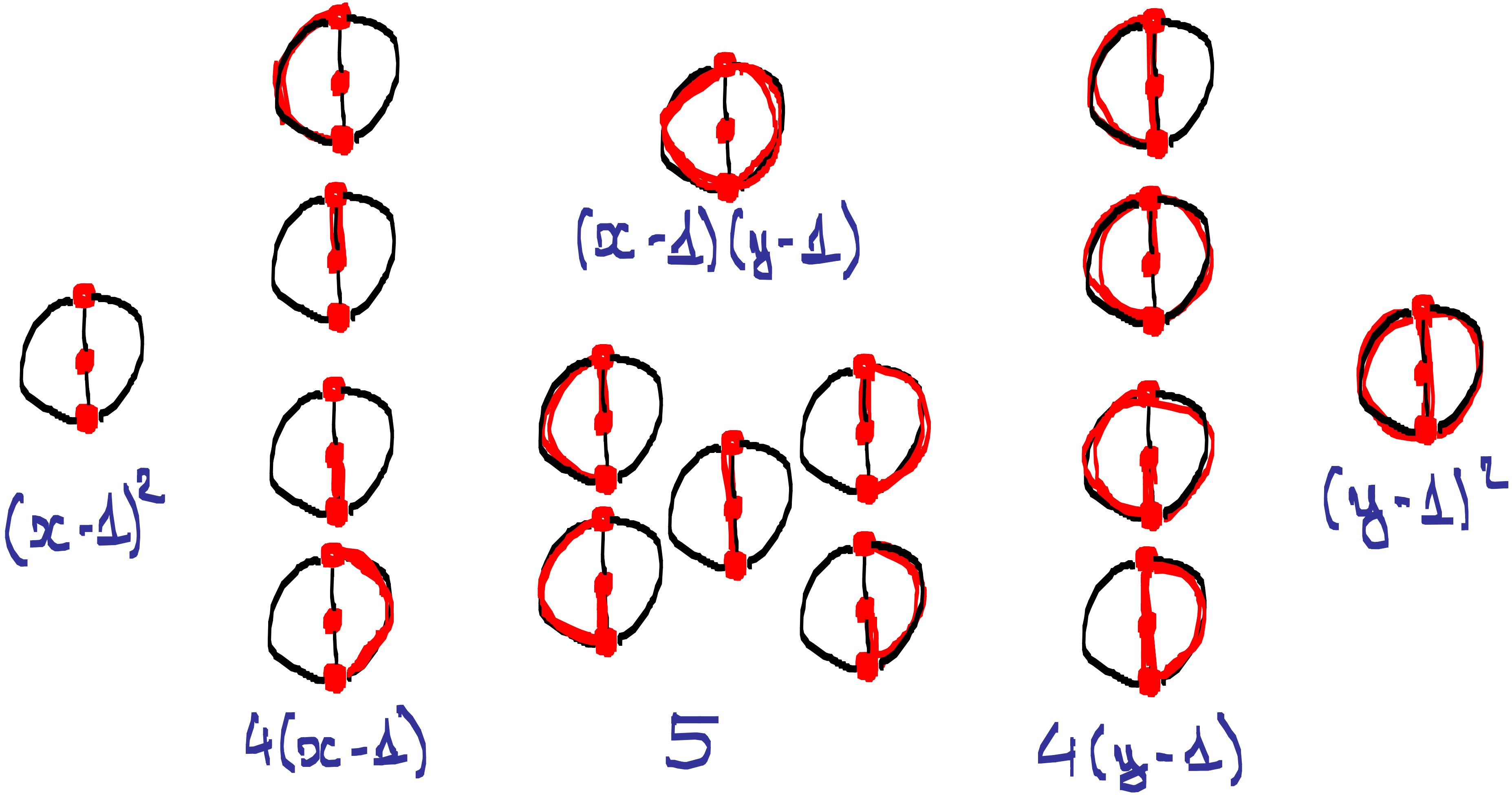
$cc(G)$ = nombre de composantes connexes de G

$nc(G)$ = nombre cyclomatique de G
= nombre minimal d'arêtes à enlever pour que G soit acyclique
$= |E(G)| + cc(G) - |V(G)|$

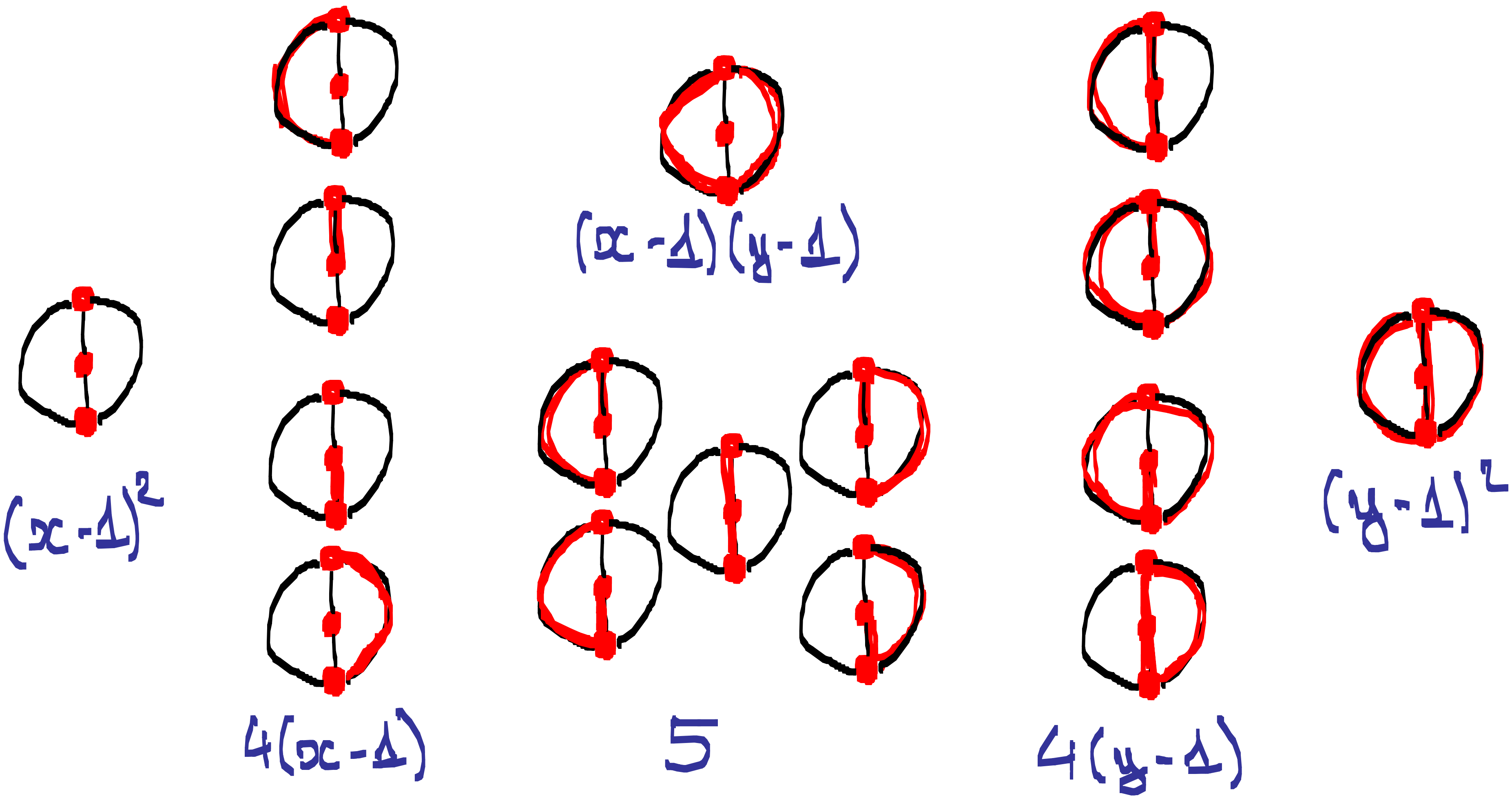
$cc(G) = 1$
$nc(G) = 2$
$cc(H) = 2$
$nc(H) = 1$



POLYNÔME DE TUTTE : EXEMPLE

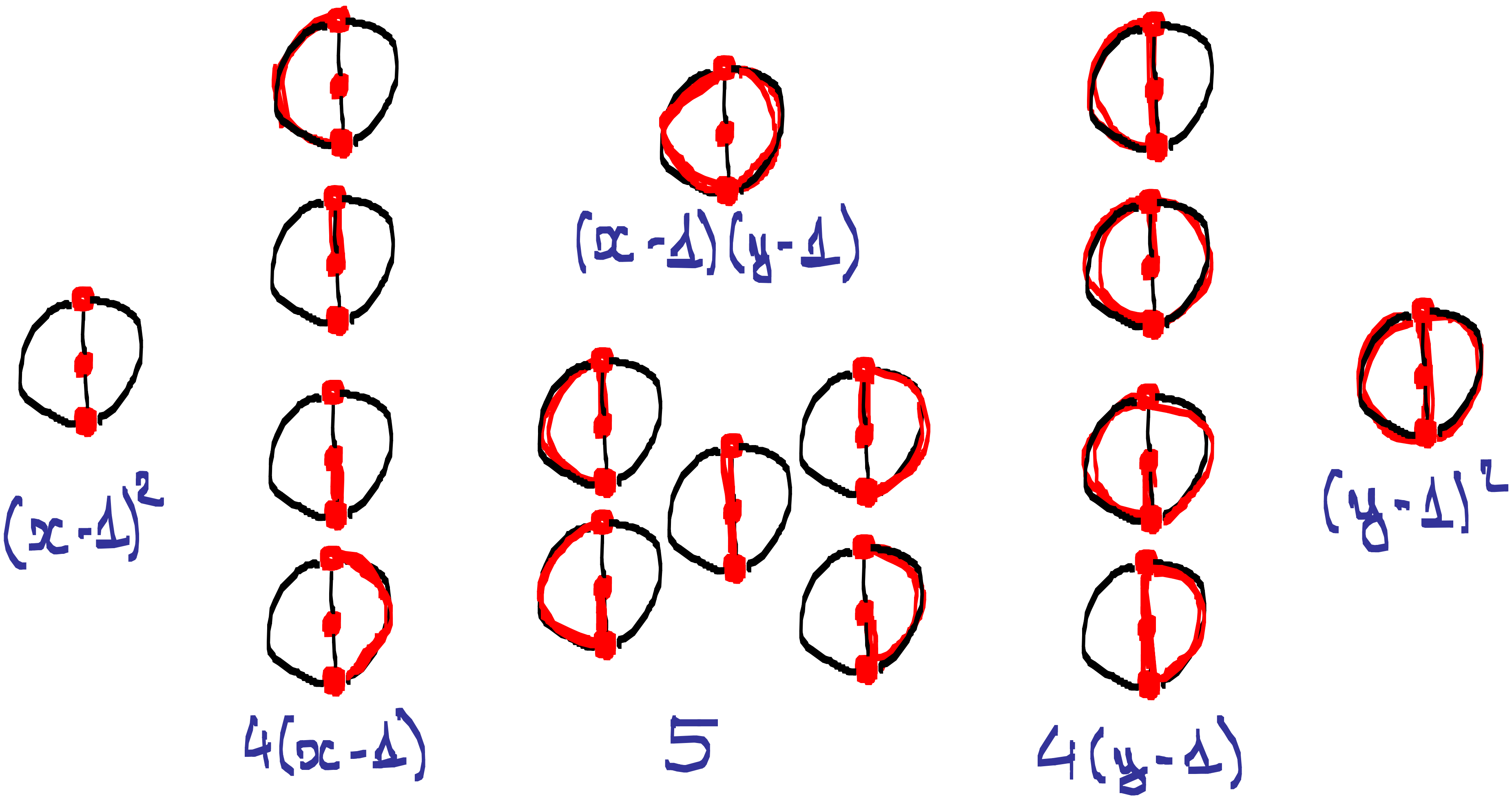


POLYNÔME DE TUTTE : EXEMPLE



$$T(x,y) = (x-1)^2 + 4(x-1) + 5 + (x-1)(y-1) + 4(y-1) + (y-1)^2$$

POLYNÔME DE TUTTE : EXEMPLE

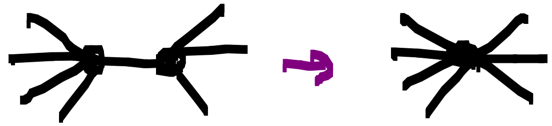


$$T(x,y) = (x-1)^2 + 4(x-1) + 5 + (x-1)(y-1) + 4(y-1) + (y-1)^2$$
$$= x^2 + x + xy + y + y^2$$

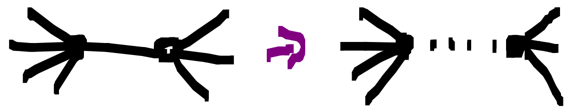
POLYNÔME DE TUTTE : RÉCURRENCE

Soient G un graphe, e une arête de G

contracte(G,e) = graphe G où e a été contractée



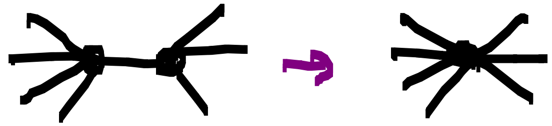
supprime(G,e) = graphe G où e a été supprimée



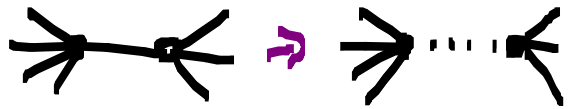
POLYNÔME DE TUTTE : RÉCURRENCE

Soient G un graphe, e une arête de G

$\mathrm{contracte}(G,e) =$ graphe G où e a été contractée



$\mathrm{supprime}(G,e) =$ graphe G où e a été supprimée



$$T_G(x,y) = \begin{cases} T_{\mathrm{contracte}(G,e)}(x,y) + T_{\mathrm{supprime}(G,e)}(x,y) & \text{si } e \text{ est standard,} \\ x \cdot T_{\mathrm{contracte}(G,e)}(x,y) & \text{si } e \text{ est une isthme,} \\ y \cdot T_{\mathrm{supprime}(G,e)}(x,y) & \text{si } e \text{ est une boucle.} \end{cases}$$

isthme = arête dont la suppression déconnecte le graphe

standard = ni isthme, ni boucle.

POLYNÔME DE TUTTE : RÉCURRENCE

Corollaire : $T_G(x,y) \in \mathbb{N}[x,y]$

$$T_G(x,y) = \begin{cases} T_{\text{contracte}(G,e)}(x,y) + T_{\text{supprime}(G,e)}(x,y) & \text{si } e \text{ est standard,} \\ x \cdot T_{\text{contracte}(G,e)}(x,y) & \text{si } e \text{ est une isthme,} \\ y \cdot T_{\text{supprime}(G,e)}(x,y) & \text{si } e \text{ est une boucle.} \end{cases}$$

isthme = arête dont la suppression déconnecte le graphe

standard = ni isthme, ni boucle.

POLYNÔME DE TUTTE : SPÉCIALISATIONS

- $T_G(1,2)$ = nombre de sous-graphes connexes
- $T_G(2,1)$ = nombre de forêts couvrantes
- $T_G(1,1)$ = nombre d'arbres couvrants
- $T_G(2,0)$ = nombre d'orientations acycliques
- ...

POLYNÔME DE TUTTE : SPÉCIALISATIONS

- $T_G(1,2)$ = nombre de sous-graphes connexes
- $T_G(2,1)$ = nombre de forêts couvrantes
- $T_G(1,1)$ = nombre d'arbres couvrants
- $T_G(2,0)$ = nombre d'orientations acycliques
- ...

Polynôme chromatique de G = $\boxed{(-1)^{|V(G)|} q^{cc(G)} T_G(1-q, 0)}$

POLYNÔME DE TUTTE : SPÉCIALISATIONS

- $T_G(1,2)$ = nombre de sous-graphes connexes
- $T_G(2,1)$ = nombre de forêts couvrantes
- $T_G(1,1)$ = nombre d'arbres couvrants
- $T_G(2,0)$ = nombre d'orientations acycliques
- ...

Polynôme chromatique de G = $\boxed{(-1)^{|V(G)|}\, q^{cc(G)}\, T_G(1-q,0)}$

Mais aussi... polynôme des flots, orientations fortement connexes, orientations bipolaires, configurations du tas de sable, modèle de Potts...

POLYNÔME DE TUTTE : REMARQUES

Polynôme de Tutte de l'union disjointe de deux graphes : $T_{G_1 \cup G_2}(x,y) = T_{G_1}(x,y) \times T_{G_2}(x,y)$

→ Permet de se restreindre aux graphes <u>connexes</u>

(et c'est ce qu'on fera)

POLYNÔME DE TUTTE : REMARQUES

Polynôme de Tutte de l'union disjointe de deux graphes : $T_{G_1 \cup G_2}(x,y) = T_{G_1}(x,y) \times T_{G_2}(x,y)$

→ Permet de se restreindre aux graphes <u>connexes</u>

(et c'est ce qu'on fera)

G planaire,
G^* un graphe dual, $T_{G^*}(x,y) = T_G(y,x)$

POLYNÔME DE TUTTE - AUTRE ÉCRITURE

Théorème :

$$\boxed{T_G(x,y) = \sum_{\substack{T \text{ arbre} \\ \text{couvrant} \\ \text{de } G}} x^{i(T)} y^{e(T)}}$$

$i(T)$ = nombre d'arêtes internes actives

$e(T)$ = nombre d'arêtes externes actives

POLYNÔME DE TUTTE - AUTRE ÉCRITURE

Théorème :

$$\boxed{T_G(x,y) = \sum_{\substack{T \text{ arbre} \\ \text{couvrant} \\ \text{de } G}} x^{i(T)} y^{e(T)}}$$

$i(T)$ = nombre d'arêtes internes actives

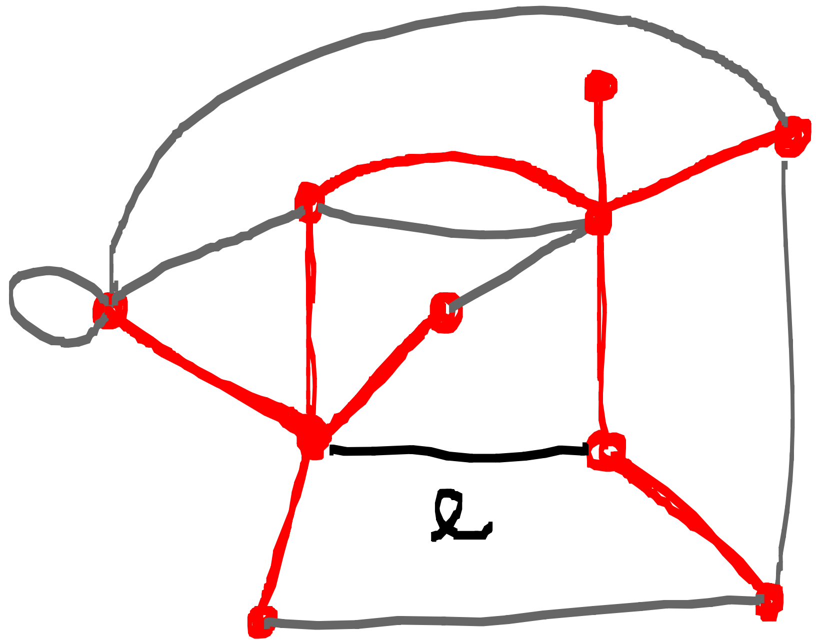
$e(T)$ = nombre d'arêtes externes actives

Question : Comment caractériser l'activité ?

ACTIVITÉS

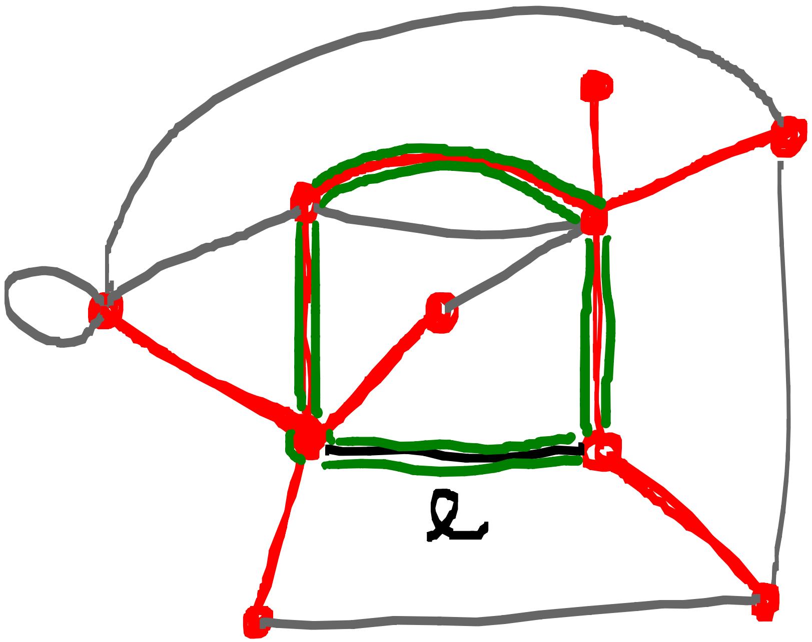
CYCLE FONDAMENTAL

Soient T un arbre couvrant et e une arête externe,



CYCLE FONDAMENTAL

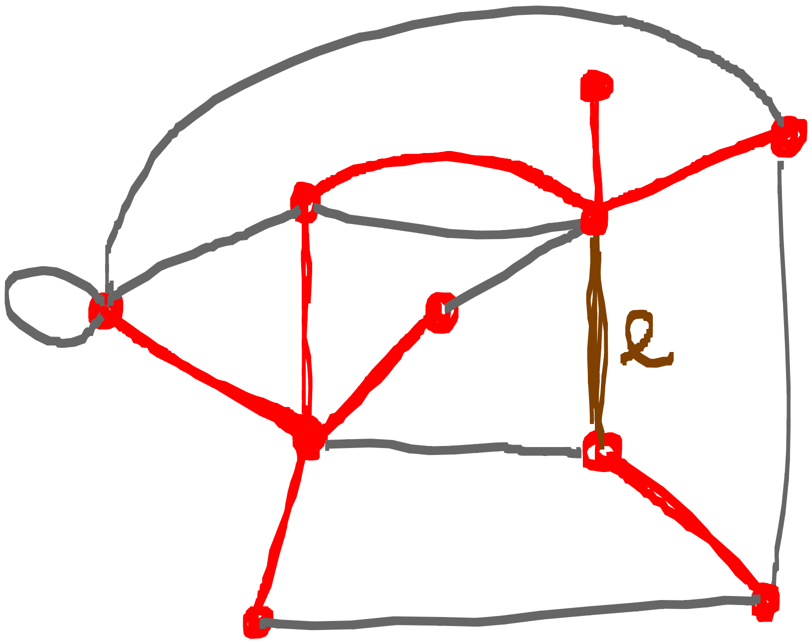
Soient T un arbre couvrant et e une arête externe,



Cycle fondamental de e =
Unique cycle inclus dans $T \cup \{e\}$.

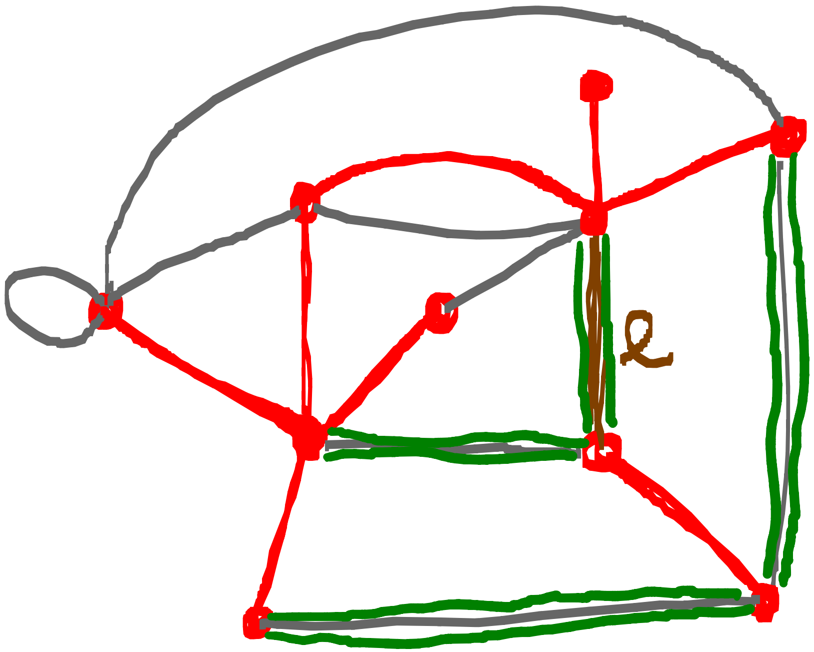
COCYCLE FONDAMENTAL

Soient T un arbre couvrant et e une arête interne,



COCYCLE FONDAMENTAL

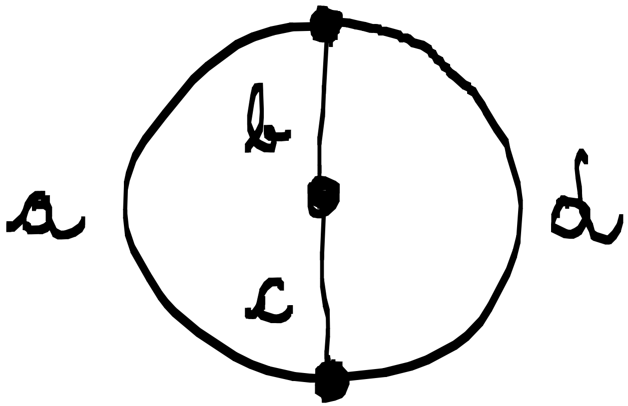
Soient T un arbre couvrant et e une arête interne,



Cocycle fondamental de e = unique cocycle inclus dans $\overline{T} \cup \{e\}$.

$\overline{X}$ = complémentaire de X dans G

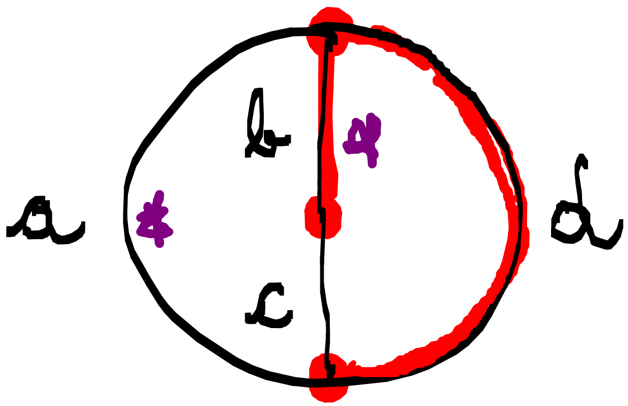
ACTIVITÉ SELON TUTTE



On étiquette et on ordonne les arêtes :

$$a < b < c < d$$

ACTIVITÉ SELON TUTTE

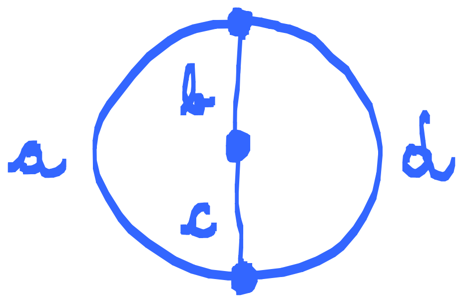


On étiquette et on ordonne les arêtes :

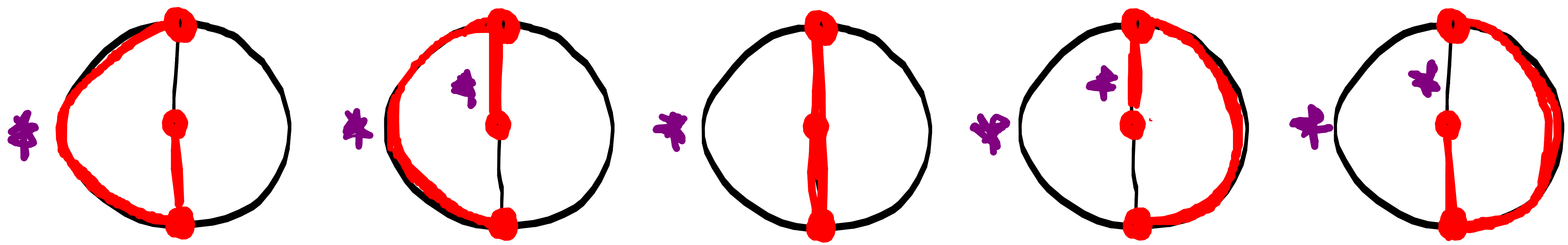
$a < b < c < d$

Arête active = arête minimale dans son cycle/cocycle fondamental

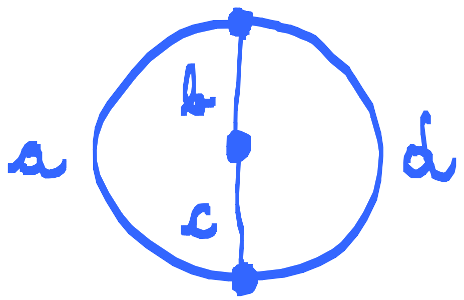
ACTIVITÉ SELON TUTTE



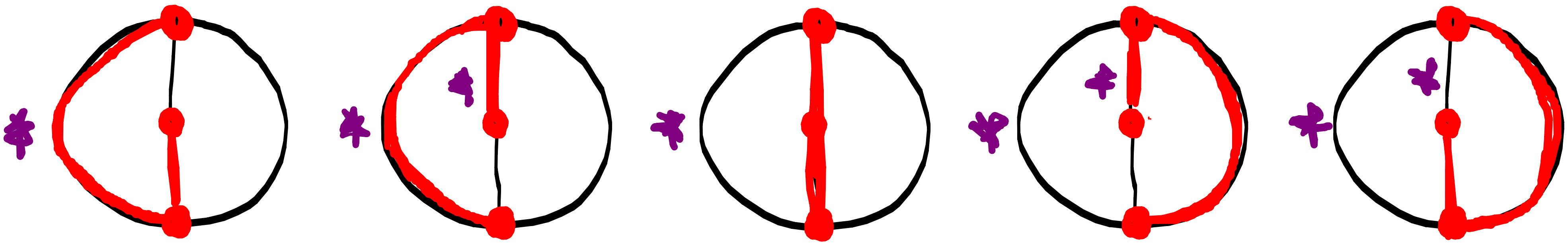
$a < b < c < d$



ACTIVITÉ SELON TUTTE



$a < b < c < d$

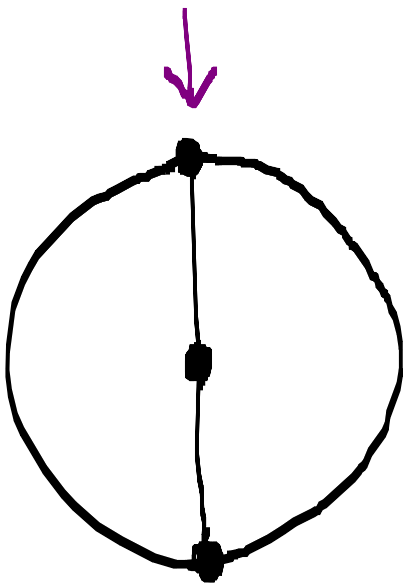


$x \qquad x^2 \qquad y \qquad xy \qquad y^2$

$$T_{\Phi}(x,y) = x^2 + x + xy + y + y^2$$

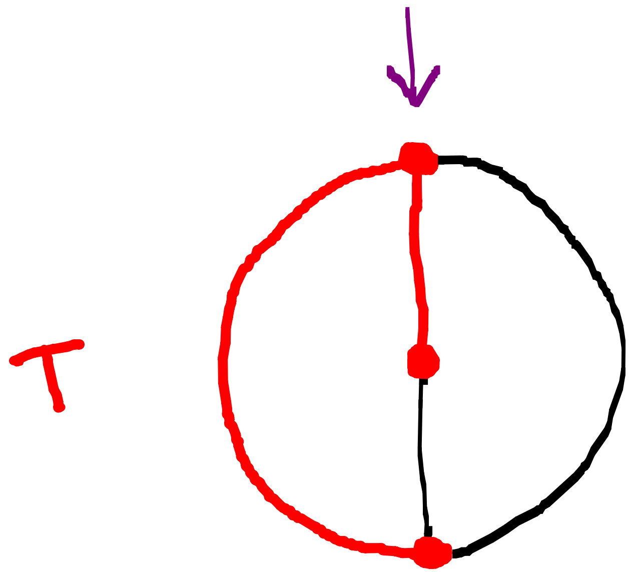
ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + enracinement de G :



ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

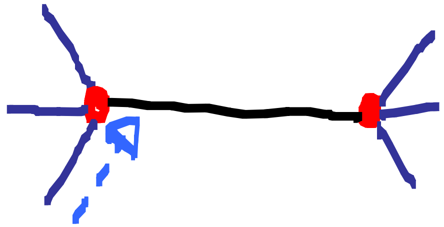
On fixe un plongement + enracinement de G :



Règles :

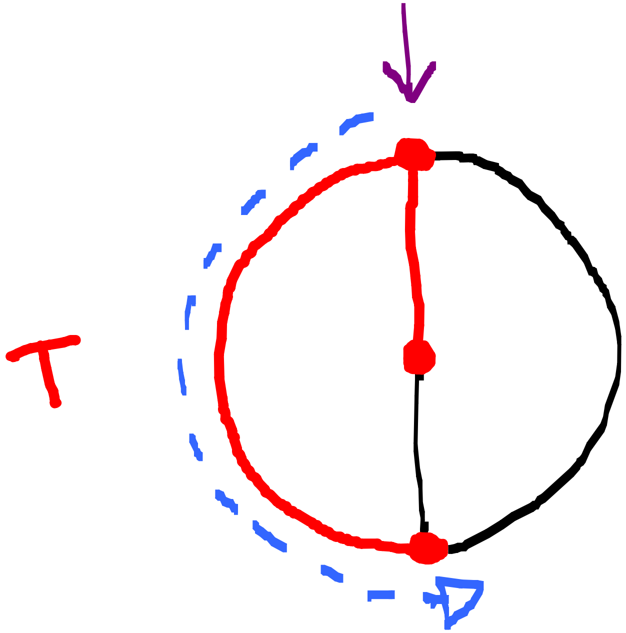
Arête interne

Arête externe



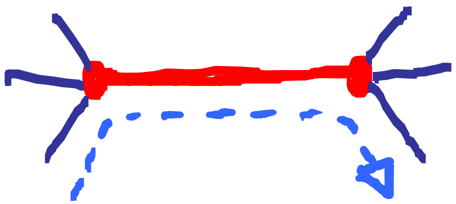
ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + enracinement de G :



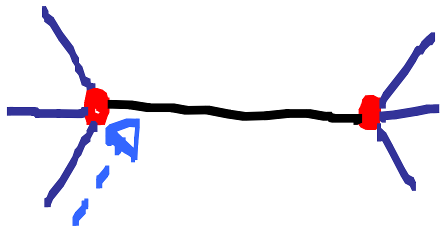
Règles :

Arête interne



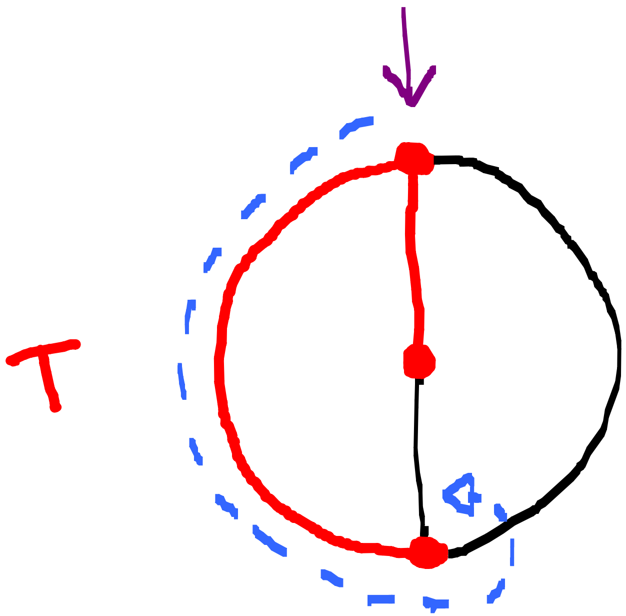
On longe.

Arête externe



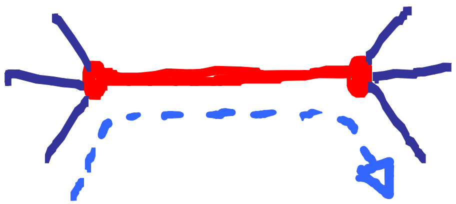
ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + enracinement de G :



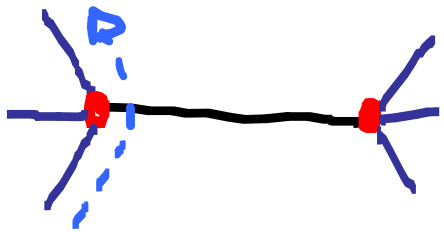
Règles :

Arête interne



On longe.

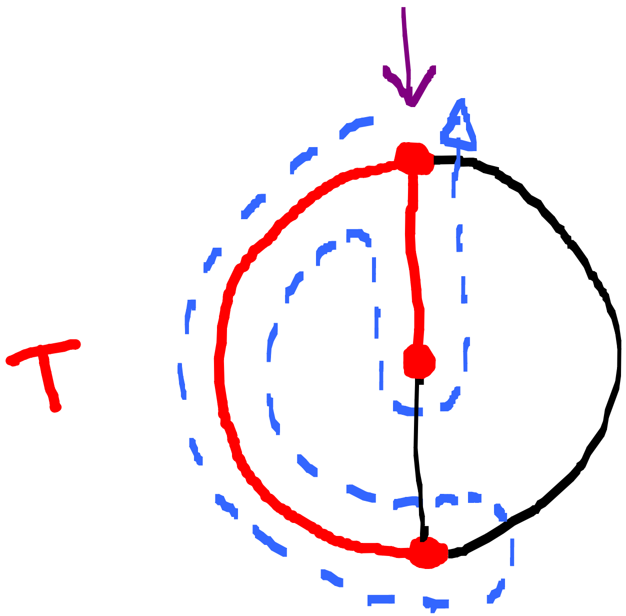
Arête externe



On traverse.

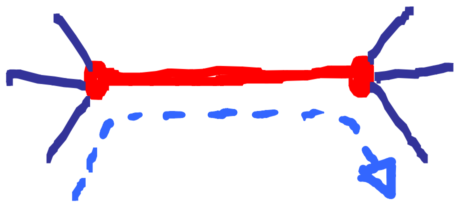
ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + enracinement de G :



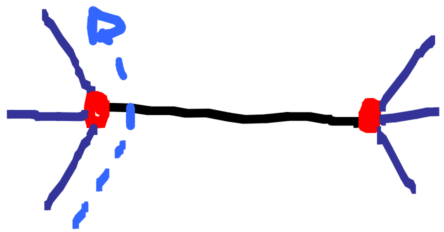
Règles :

Arête interne



On longe.

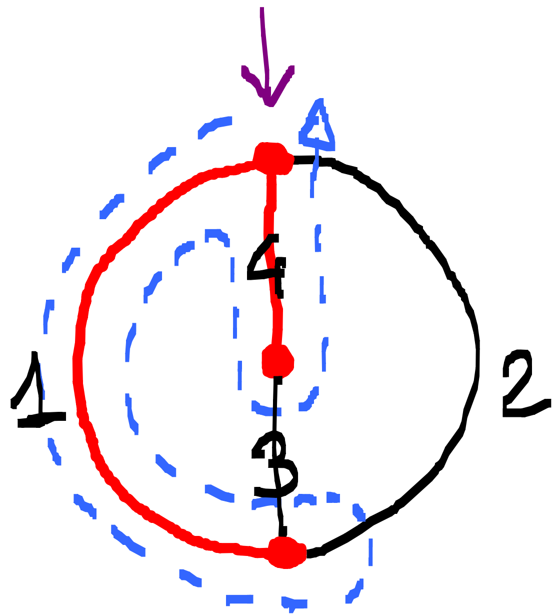
Arête externe



On traverse.

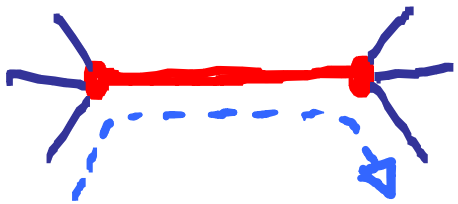
ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + enracinement de G :



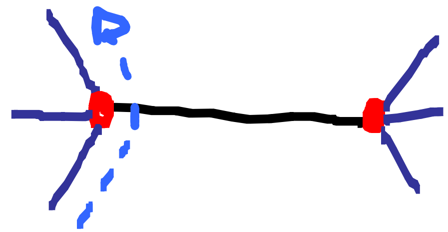
Règles :

Arête interne



On longe.

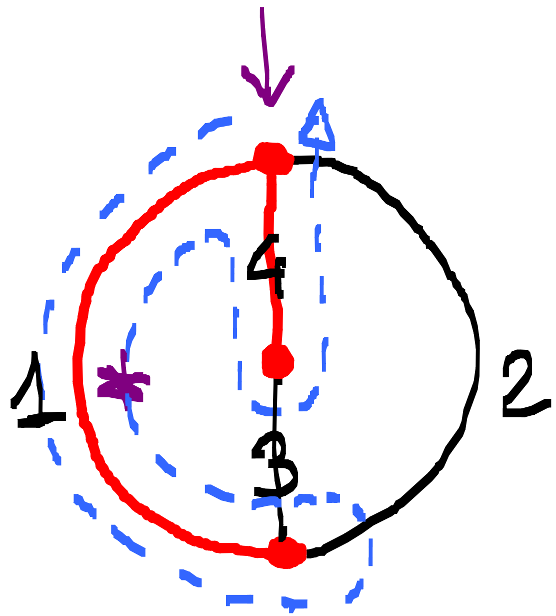
Arête externe



On traverse.

ACTIVITÉ SELON BERNARDI : DÉFINITION

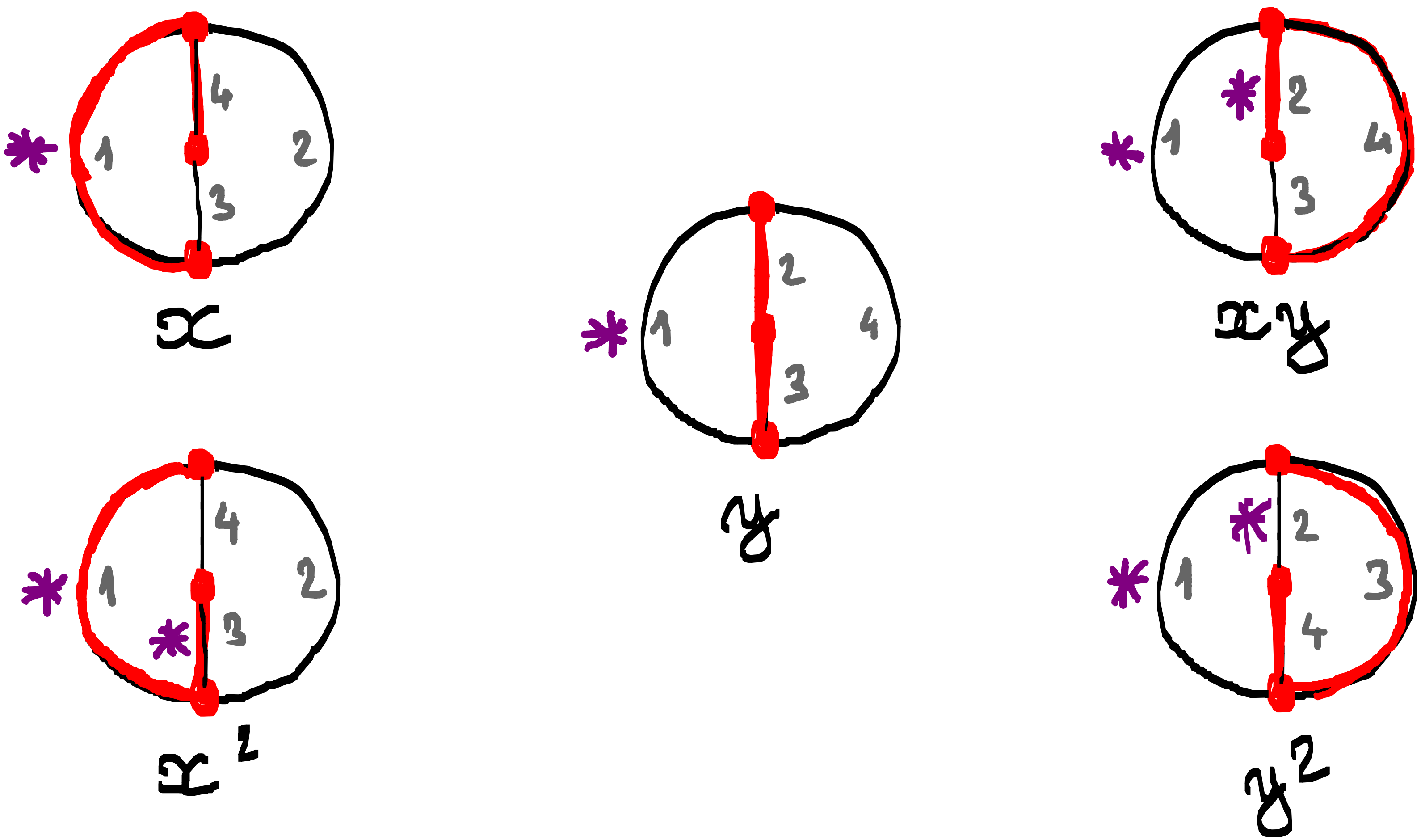
On fixe un plongement + enracinement de G :



Arête active = Arête minimale dans son cycle / cocycle fondamental

(selon l'ordre de visite des arêtes lors du tour de l'arbre)

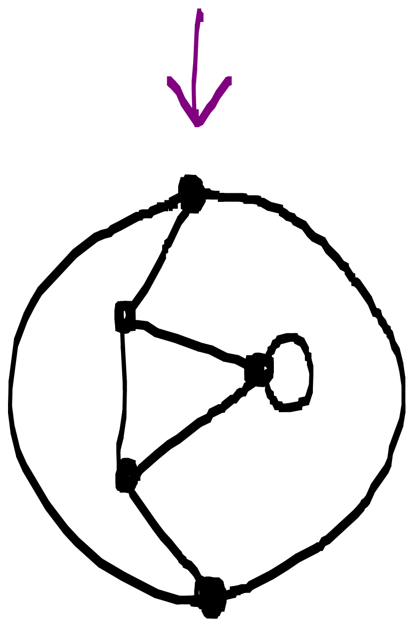
ACTIVITÉ SELON BERNARDI : EXEMPLE



$$T_{\Phi}(x,y) = x^2 + x + xy + y + y^2 .$$

ACTIVITÉ BOURGEONNANTE : ÉLAGAGE

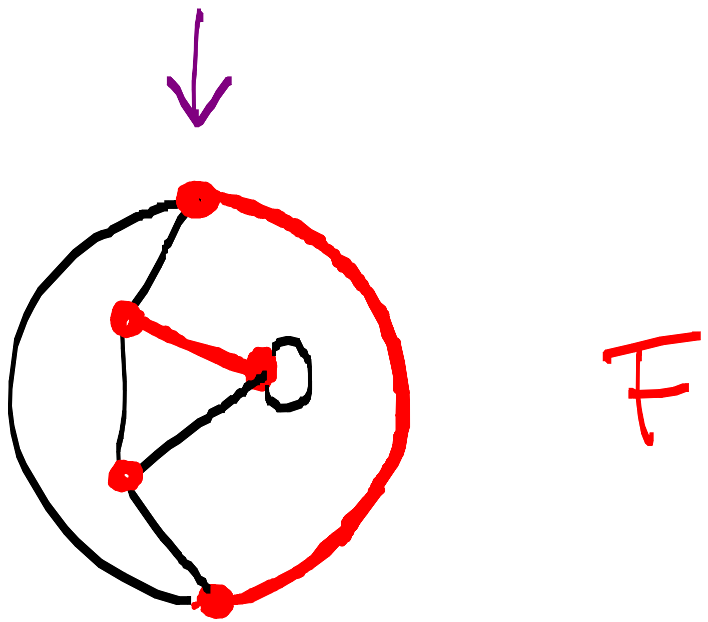
On fixe un plongement + enracinement de G.



ACTIVITÉ BOURGEONNANTE : ÉLAGAGE

On fixe un plongement + enracinement de G.

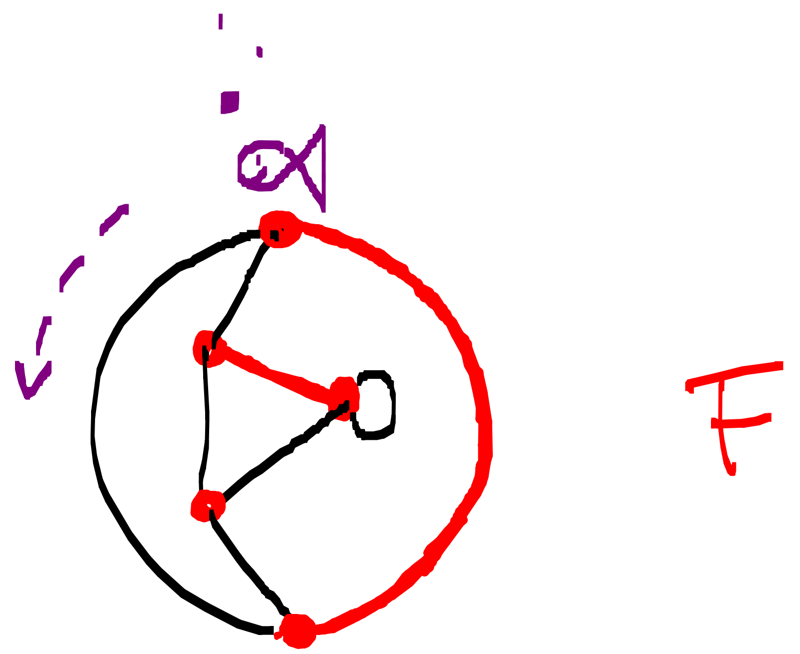
DÉFINITION DE Z(F), avec F forêt couvrante :



ACTIVITÉ BOURGEONNANTE : ÉLAGAGE

On fixe un plongement + enracinement de G.

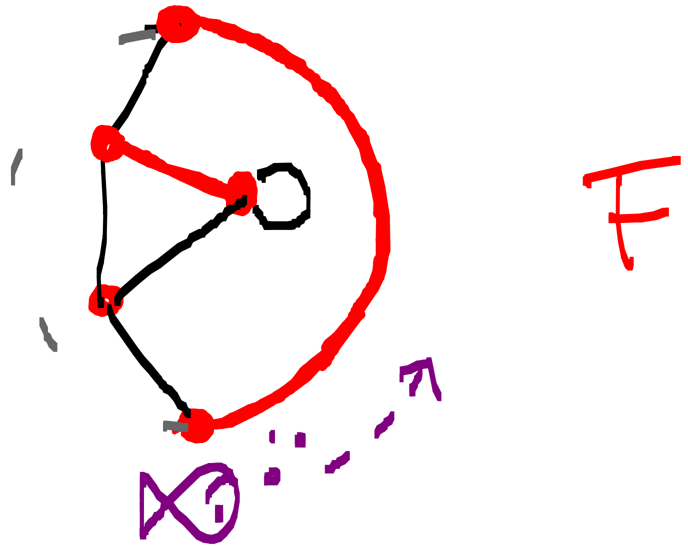
DÉFINITION DE $\tau(F)$, avec F forêt courante :



ACTIVITÉ BOURGEONNANTE : ÉLAGAGE

On fixe un plongement + enracinement de G.

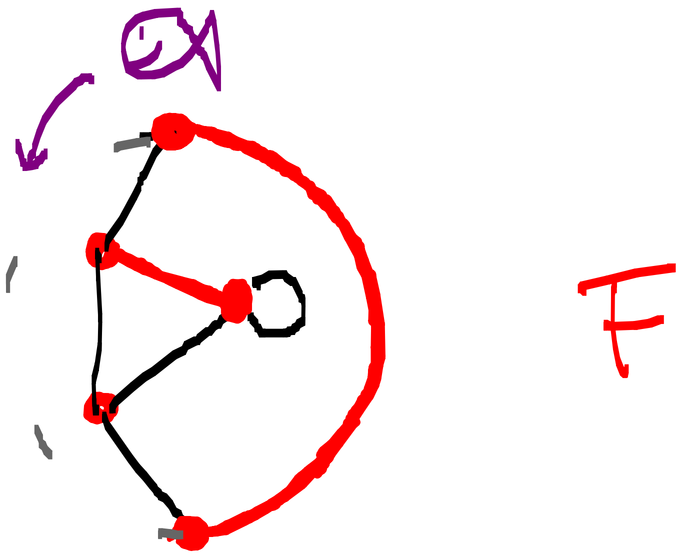
DÉFINITION DE $\mathcal{C}(F)$, avec F forêt courante :



ACTIVITÉ BOURGEONNANTE : ÉLAGAGE

On fixe un plongement + enracinement de G.

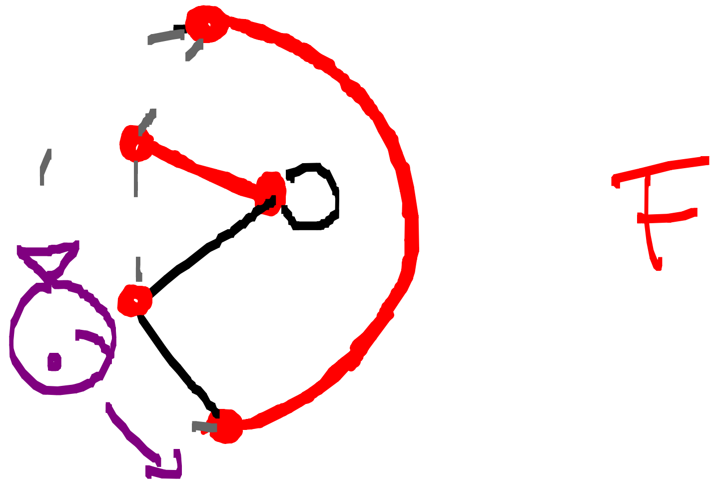
DÉFINITION DE $\tau(F)$, avec F forêt courante :



ACTIVITÉ BOURGEONNANTE : ÉLAGAGE

On fixe un plongement + enracinement de G.

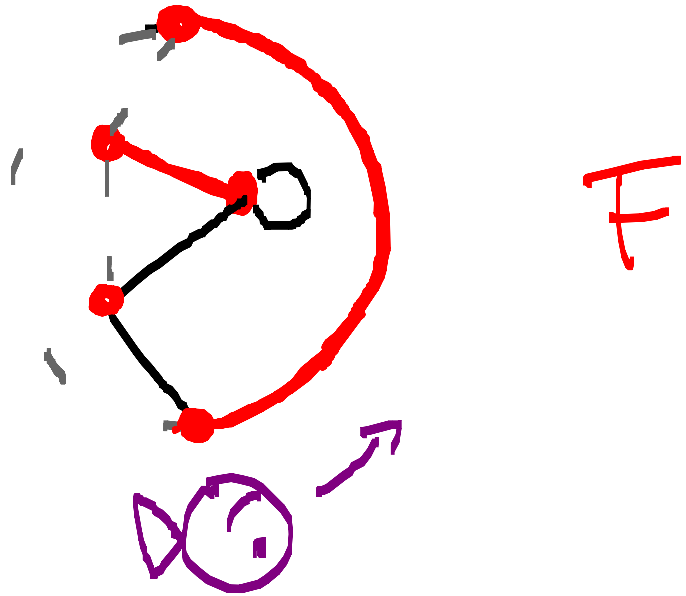
DÉFINITION DE $\tau(F)$, avec F forêt courante :



ACTIVITÉ BOURGEONNANTE : ÉLAGAGE

On fixe un plongement + enracinement de G.

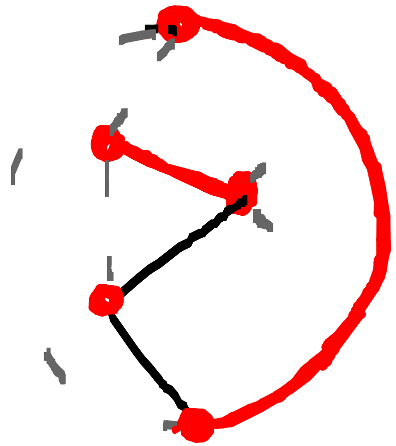
DÉFINITION DE $\tau(F)$, avec F forêt courante :



ACTIVITÉ BOURGEONNANTE : ÉLAGAGE

On fixe un plongement + enracinement de G.

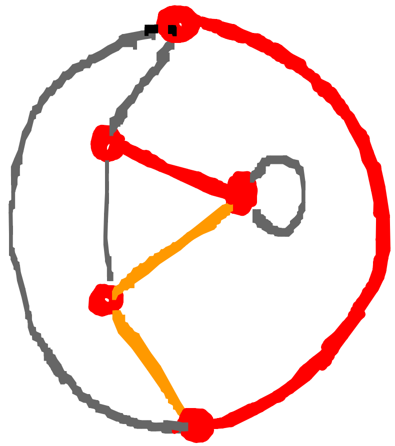
DÉFINITION DE $\tau(F)$, avec F forêt couvrante :

$\tau(F) =$ 

ACTIVITÉ BOURGEONNANTE : ÉLAGAGE

On fixe un plongement + enracinement de G.

DÉFINITION DE $\tau(F)$, avec F forêt couvrante :

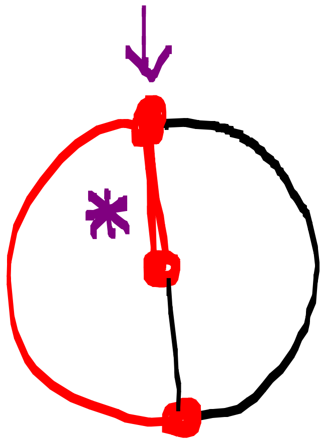
$\tau(F) =$ 

ACTIVITÉ BOURGEONNANTE : ACTIVITÉ INTERNE

Soit T un arbre courant,

Une arête interne e est dite **active** si

$$\tau(T \setminus \{e\}) = T$$

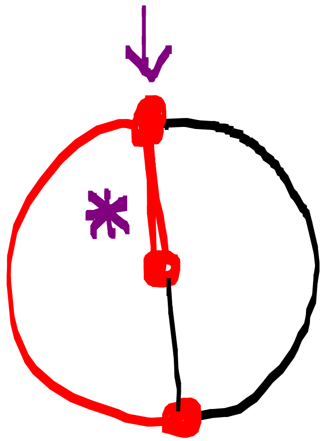


ACTIVITÉ BOURGEONNANTE : ACTIVITÉ INTERNE

Soit T un arbre couvrant,

Une arête interne e est dite **active** si

$$\tau(T \setminus \{e\}) = T$$



Prop :

$$\tau(F) = T$$

$$\Updownarrow$$

$$T \setminus \{\text{arêtes actives internes}\} \subseteq F \subseteq T$$

ACTIVITÉ BOURGEONNANTE : LIEN AVEC TUTTE

Prop : On peut définir $e(T)$ tel que

$$T_G(x,y) = \sum_{\substack{T \text{ arbre} \\ \text{couvrant}}} x^{i(T)} \, y^{e(T)}$$

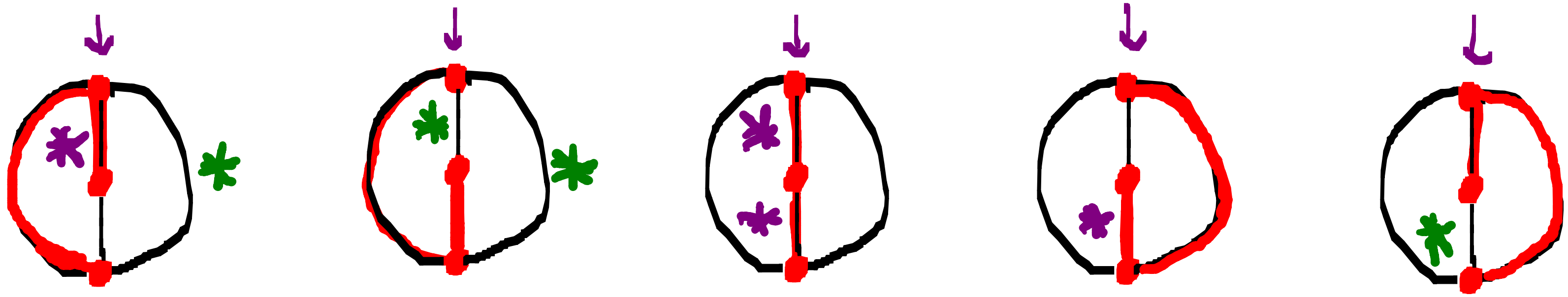
où $i(T) = \#$ arêtes internes actives (au sens bourgeonnant)

ACTIVITÉ BOURGEONNANTE : LIEN AVEC TUTTE

Prop : On peut définir $e(T)$ tel que

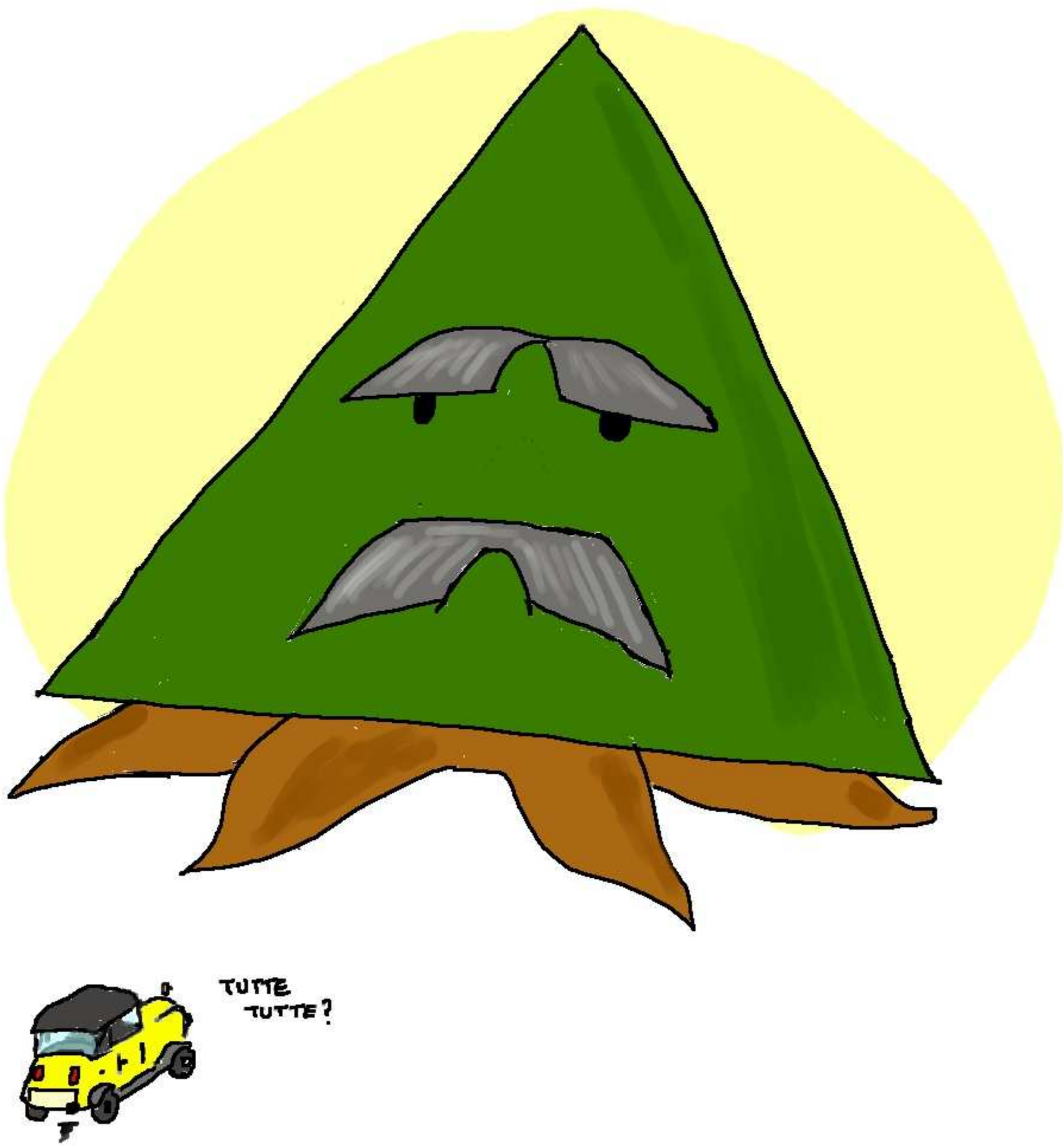
$$T_G(x,y) = \sum_{T \text{ arbre couvrant}} x^{i(T)}\, y^{e(T)}$$

où $i(T) = \#$ arêtes internes actives (au sens bourgeonnant)



xy $\quad y^2 \quad x^2 \quad x \quad y$

DELTA - ACTIVITÉ

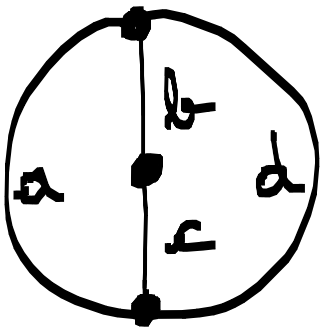


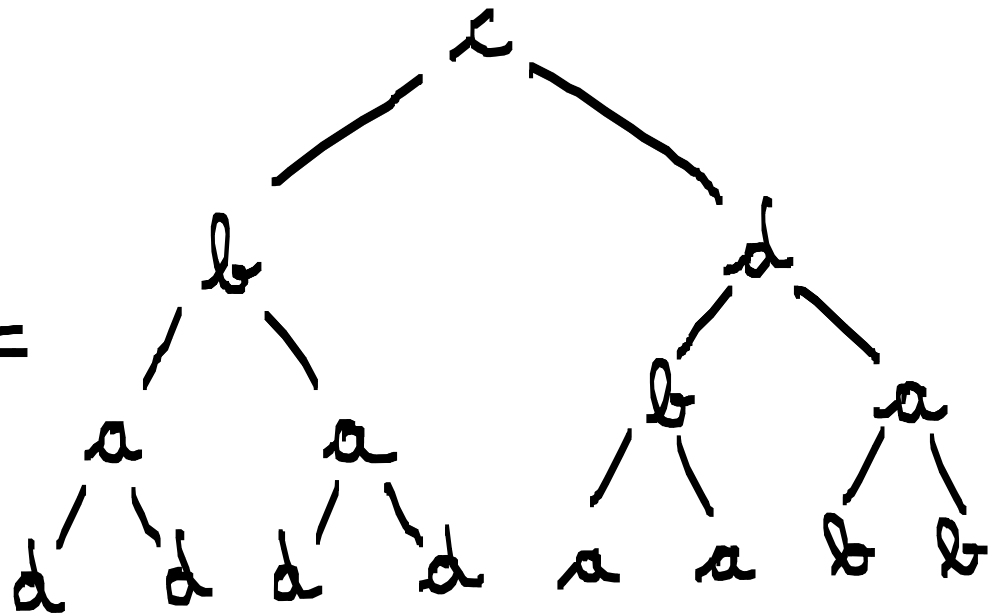
ARBRE DE DÉCISION

Fixons G un graphe.

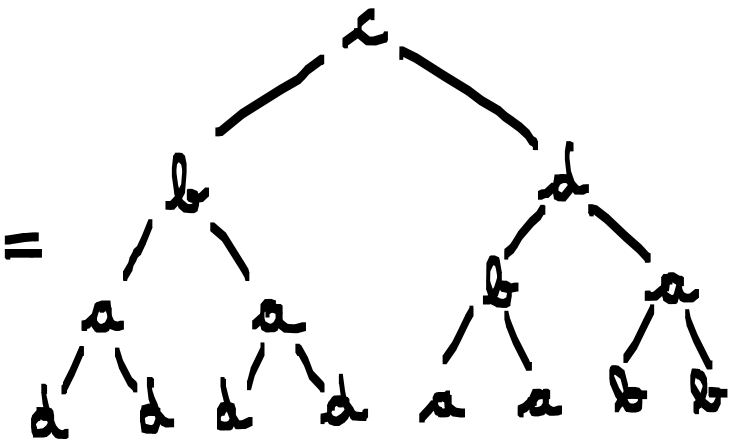
Arbre de décision = Arbre binaire (plan) Δ avec un étiquetage $V(\Delta) \longrightarrow E(G)$ tq le long de n'importe quel chemin partant de la racine jusqu'à une feuille de Δ, la suite des étiquettes forme une permutation de $E(G)$.

Ex :

$G =$ 

$\Delta =$ 

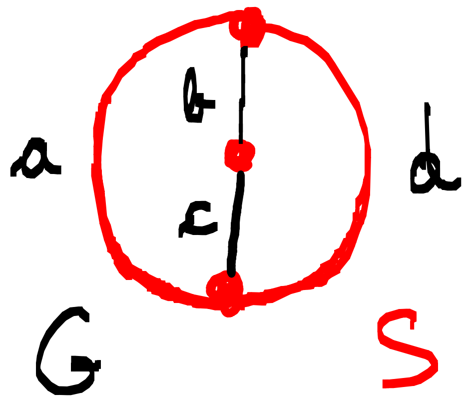
ASSIGNER LES TYPES

$\Delta =$ 

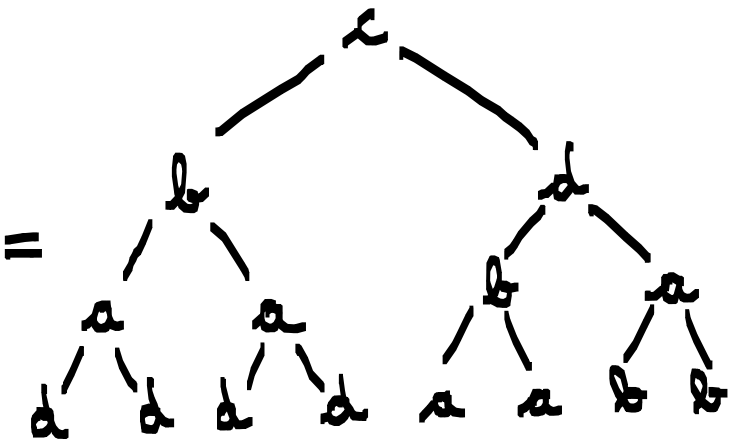
Paramètre : Sous-graphe S

Ici : $S = \{a, d\}$

*	type L
*	type I
externe sans *	type S_e
interne sans *	type S_i



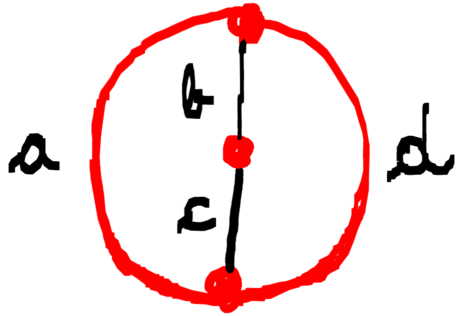
ASSIGNER LES TYPES

$\Delta =$ 

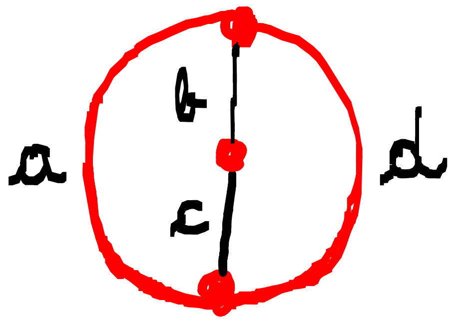
<u>Paramètre</u> : Sous-graphe S

Ici : $S = \{a, d\}$

*	type L
*	type I
externe sans *	type S_e
interne sans *	type S_i

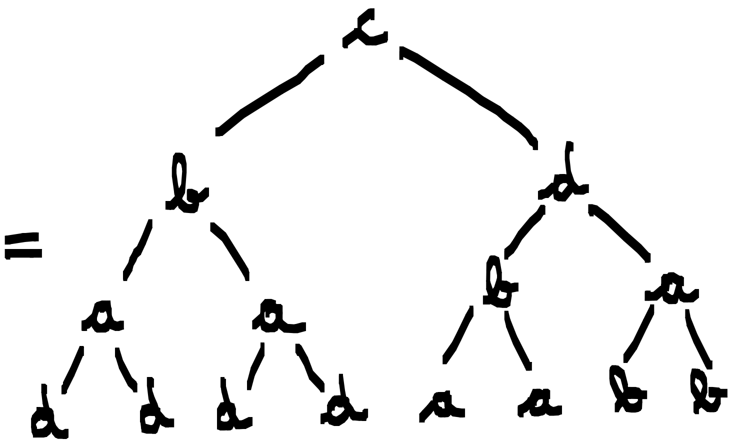


G



H

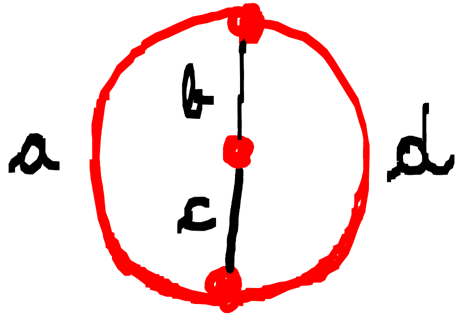
ASSIGNER LES TYPES

$\Delta =$ 

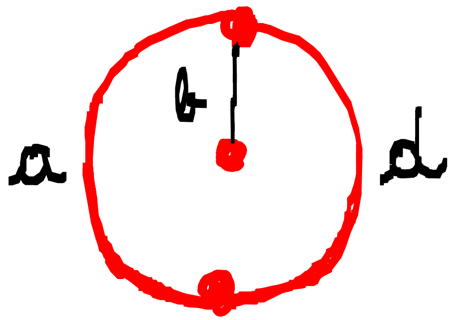
Paramètre : Sous-graphe S

Ici : $S = \{a, d\}$

*	type L
*	type I
externe sans *	type S_e
interne sans *	type S_i

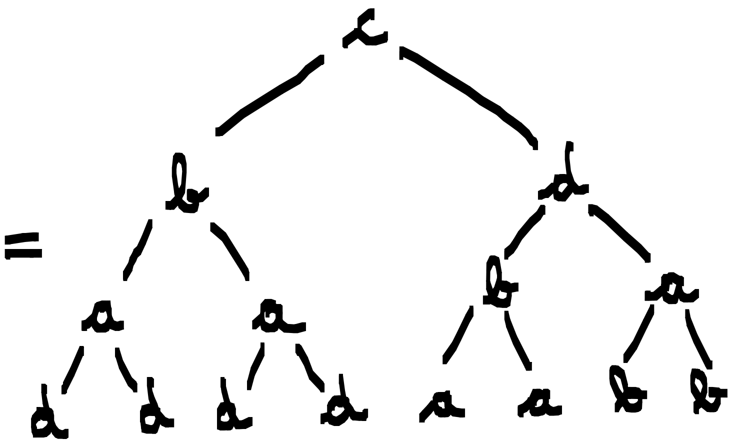


G



H

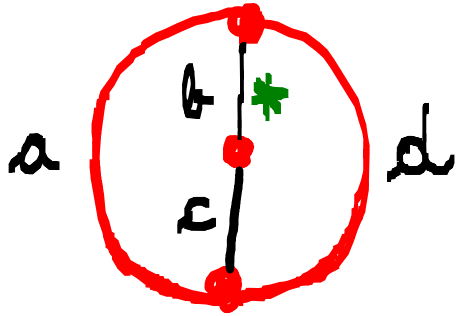
ASSIGNER LES TYPES

$\Delta =$ 

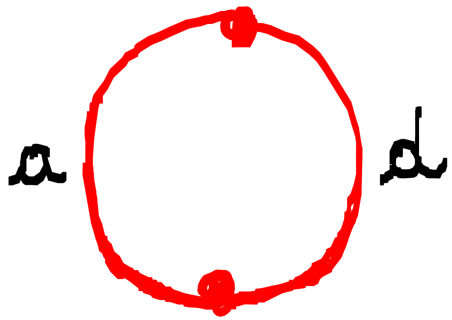
Paramètre : Sous-graphe S

Ici : $S = \{a, d\}$

*	type L
*	type I
externe sans *	type S_e
interne sans *	type S_i

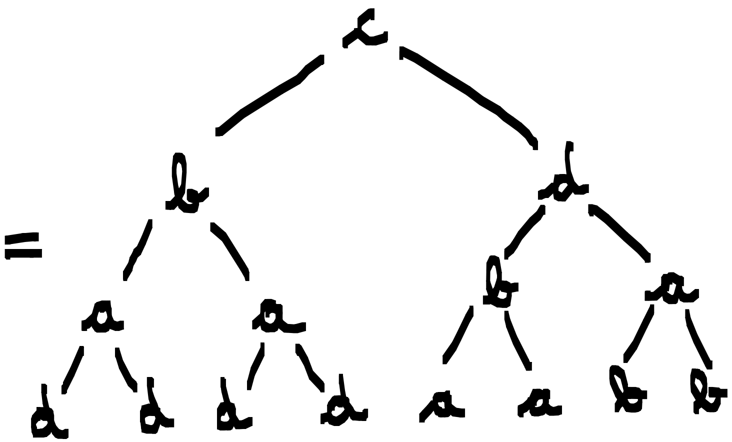


G



H

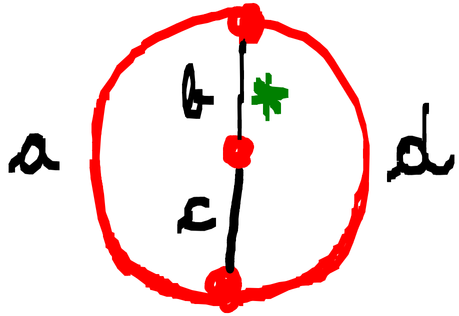
ASSIGNER LES TYPES

$\Delta =$ 

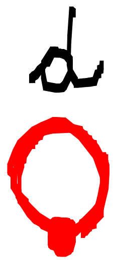
Paramètre : Sous-graphe S

Ici : $S = \{a, d\}$

*	type L
*	type I
externe sans *	type S_e
interne sans *	type S_i

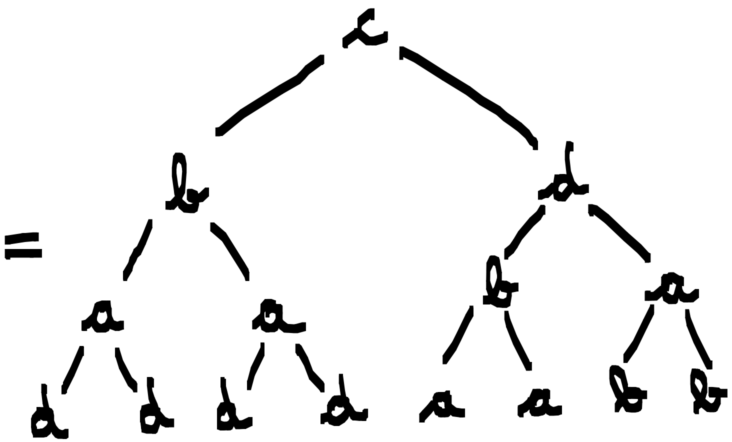


G



H

ASSIGNER LES TYPES

$\Delta =$ 

Paramètre : Sous-graphe S

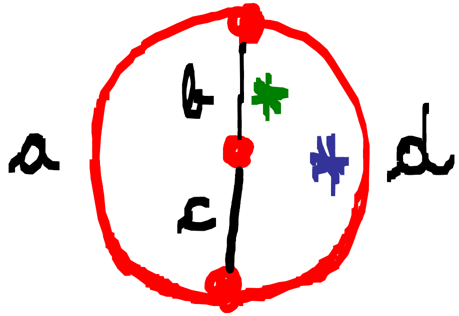
Ici : $S = \{a, d\}$

$*$ type L

$*$ type I

externe sans $*$ type S_e

interne sans $*$ type S_i



G

H

QUATRE VERSIONS ÉQUIVALENTES DE L'ALGORITHME

<u>Initialisation</u> : $H \leftarrow G$; $n_1 \leftarrow$ nœud racine

Pour k de 1 à $|E(G)|$ Faire

$e_k \leftarrow$ étiquette de n_k

Si e_k standard externe ds H
Alors type de $e_k \leftarrow S_e$
$H \leftarrow$ supprime(H, e_k)

Si e_k boucle dans H
Alors type de $e_k \leftarrow L$
$H \leftarrow$ supprime(H, e_k)

$n_{k+1} \leftarrow$ fils gauche de n_k

Si e_k standard interne dans H
Alors type de $e_k \leftarrow S_i$
$H \leftarrow$ contracte(H, e_k)

Si e_k isthme dans H
Alors type de $e_k \leftarrow I$
$H \leftarrow$ contracte(H, e_k)

$n_{k+1} \leftarrow$ fils droit de n_k

VERSION 1

QUATRE VERSIONS ÉQUIVALENTES DE L'ALGORITHME

Initialisation : $H \leftarrow G$; $n_1 \leftarrow$ nœud racine

Pour k de 1 à $|E(G)|$ Faire

$e_k \leftarrow$ étiquette de n_k

Si e_k standard externe dans H
Alors type de $e_k \leftarrow S_e$
$H \leftarrow$ supprime(H, e_k)

Si e_k boucle dans H
Alors type de $e_k \leftarrow L$
$H \leftarrow$ supprime(H, e_k)

$n_{k+1} \leftarrow$ fils gauche de n_k

Si e_k standard interne dans H
Alors type de $e_k \leftarrow S_i$
$H \leftarrow$ contracte(H, e_k)

Si e_k isthme dans H
Alors type de $e_k \leftarrow I$

$n_{k+1} \leftarrow$ fils droit de n_k

VERSION 2

QUATRE VERSIONS ÉQUIVALENTES DE L'ALGORITHME

Initialisation : $H \leftarrow G$; $n_1 \leftarrow$ nœud racine

Pour k de 1 à $|E(G)|$ Faire

$e_k \leftarrow$ étiquette de n_k

Si e_k standard externe ds H
Alors type de $e_k \leftarrow S_e$
$H \leftarrow$ supprime(H, e_k)

Si e_k boucle dans H
Alors type de $e_k \leftarrow L$

$n_{k+1} \leftarrow$ fils gauche de n_k

Si e_k standard interne dans H
Alors type de $e_k \leftarrow S_i$
$H \leftarrow$ contracte(H, e_k)

Si e_k isthme dans H
Alors type de $e_k \leftarrow I$
$H \leftarrow$ contracte(H, e_k)

$n_{k+1} \leftarrow$ fils droit de n_k

VERSION 3

QUATRE VERSIONS ÉQUIVALENTES DE L'ALGORITHME

<u>Initialisation</u> : $H \leftarrow G$; $n_1 \leftarrow$ nœud racine

Pour k de 1 à $|E(G)|$ Faire

$e_k \leftarrow$ étiquette de n_k

Si e_k standard externe ds H	Si e_k standard interne dans H
Alors type de $e_k \leftarrow S_e$	Alors type de $e_k \leftarrow S_i$
$H \leftarrow$ supprime(H, e_k)	$H \leftarrow$ contracte(H, e_k)
Si e_k boucle dans H	Si e_k isthme dans H
Alors type de $e_k \leftarrow L$	Alors type de $e_k \leftarrow I$
$n_{k+1} \leftarrow$ fils gauche de n_k	$n_{k+1} \leftarrow$ fils droit de n_k

VERSION 4

QUATRE VERSIONS ÉQUIVALENTES DE L'ALGORITHME

Initialisation : $H \leftarrow G$; $n_1 \leftarrow$ nœud racine

Pour k de 1 à $|E(G)|$ Faire

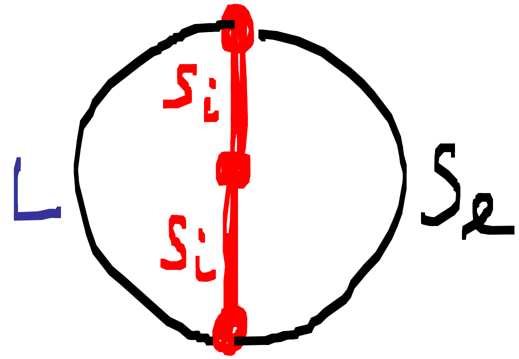
$e_k \leftarrow$ étiquette de n_k

Si e_k standard externe ds H Alors type de $e_k \leftarrow S_e$ $H \leftarrow$ supprime(H, e_k)	Si e_k standard interne dans H Alors type de $e_k \leftarrow S_i$ $H \leftarrow$ contracte(H, e_k)
Si e_k boucle dans H Alors type de $e_k \leftarrow L$	Si e_k isthme dans H Alors type de $e_k \leftarrow I$
$n_{k+1} \leftarrow$ fils gauche de n_k	$n_{k+1} \leftarrow$ fils droit de n_k

Les quatre algorithmes attribuent à chaque arête le même type.

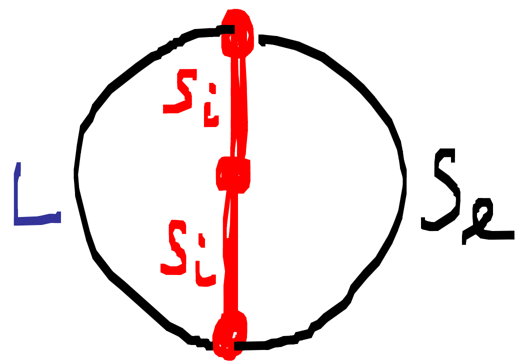
ARÊTES ACTIVES

Si S est un arbre couvrant, toute arête de type L est externe, toute arête de type I est interne.



ARÊTES ACTIVES

Si S est un arbre couvrant,
toute arête de type L est externe,
toute arête de type I est interne.



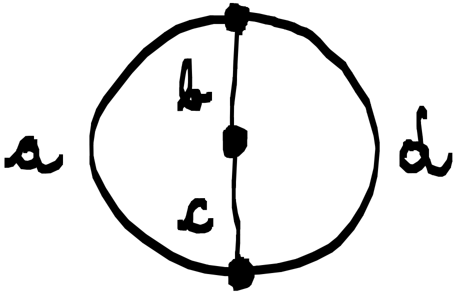
Arête Δ-active = arête de type L ou I.

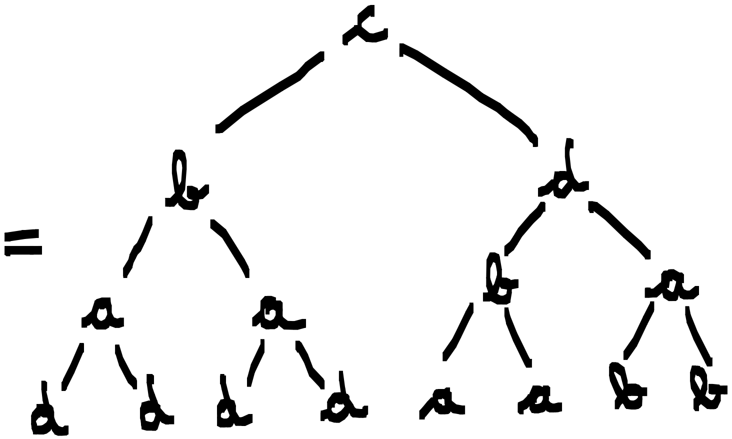
<u>Th</u> : Quel que soit l'arbre de décision Δ,

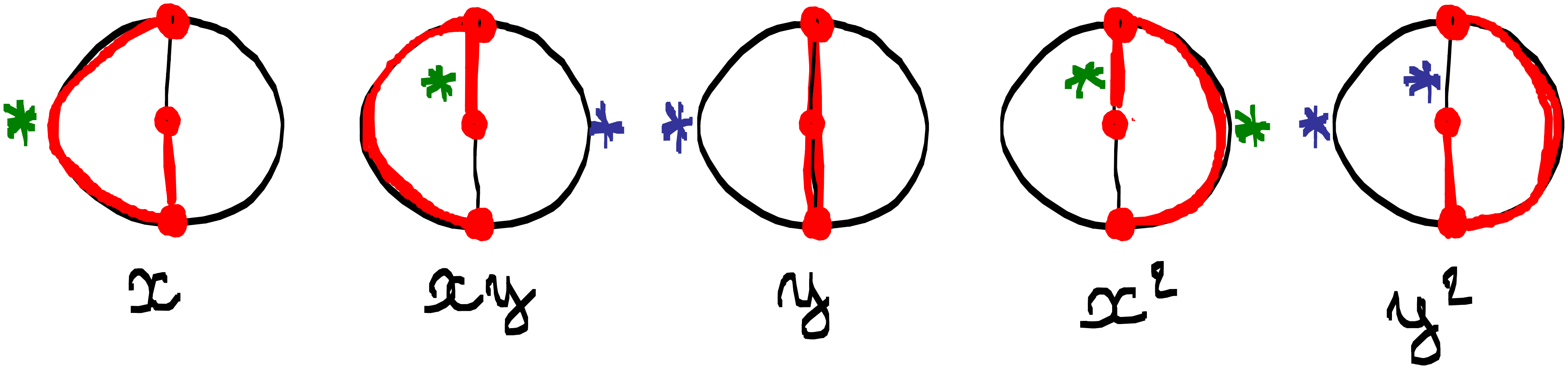
$$T_G(x,y) = \sum_{T \text{ arbre couvrant}} x^{i(T)}\, y^{e(T)}$$

$i(T) = \#$ arêtes Δ-actives internes, $e(T) = \#$ arêtes Δ-actives externes

EXEMPLE

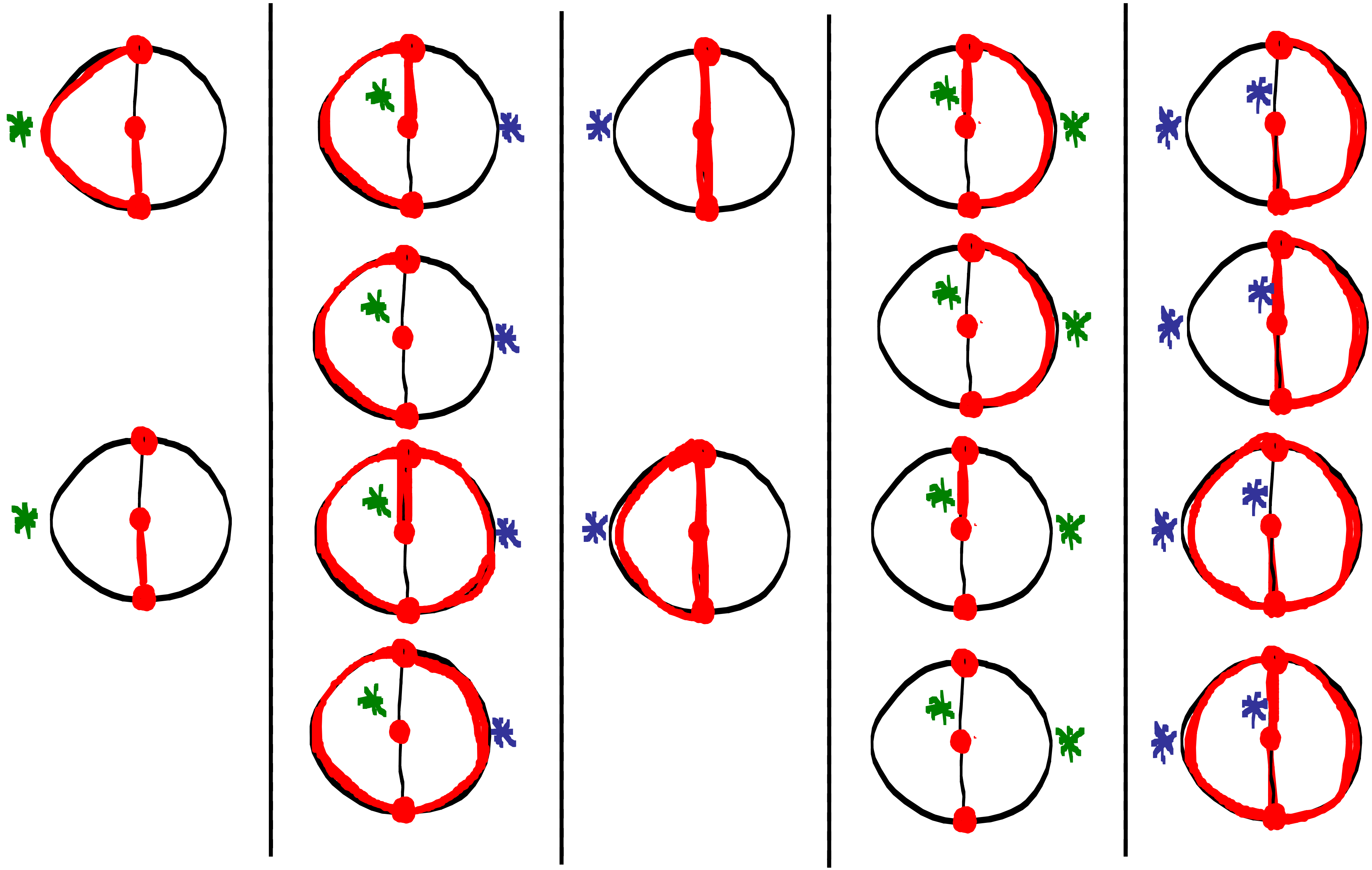
$G =$ 

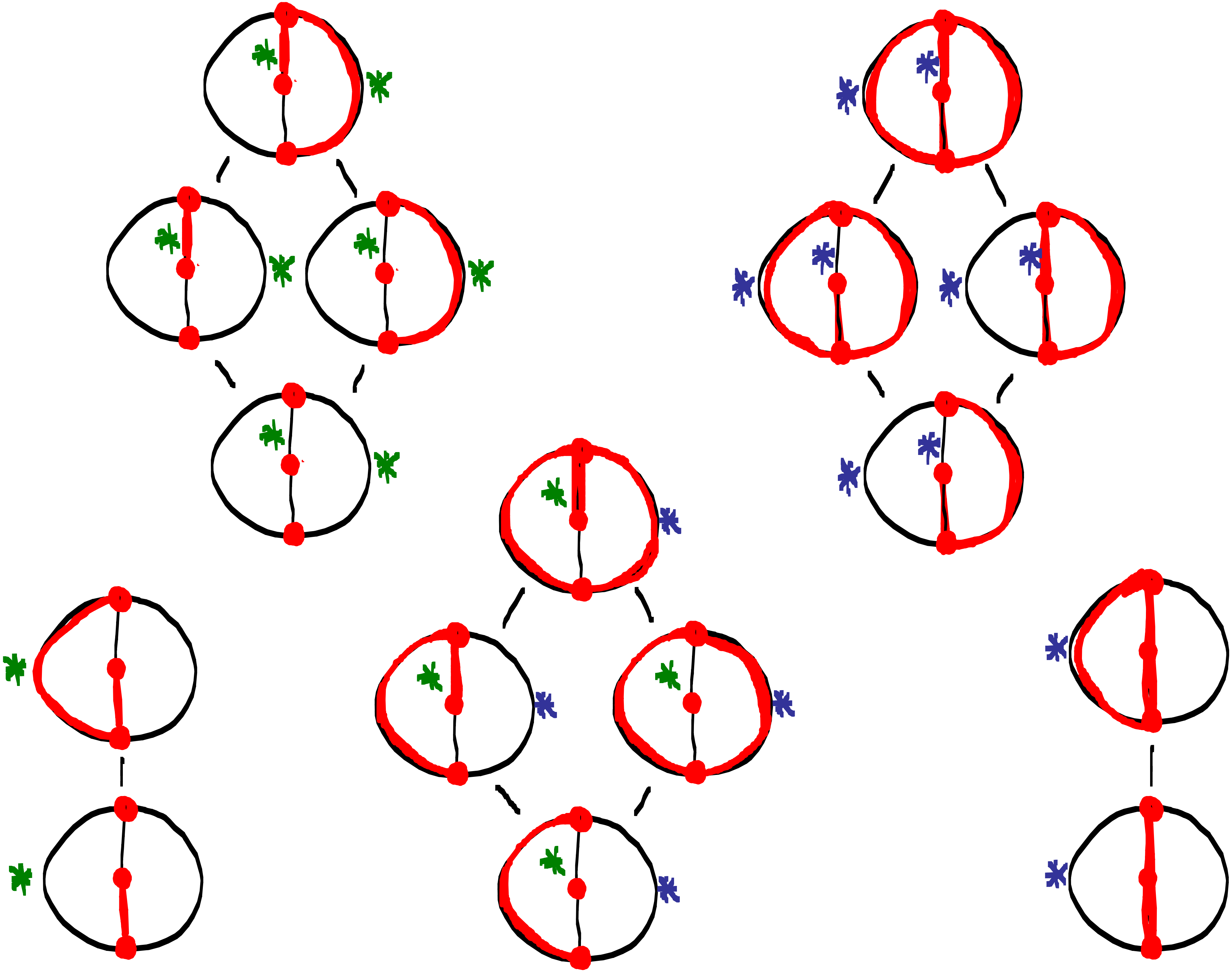
$\Delta =$ 

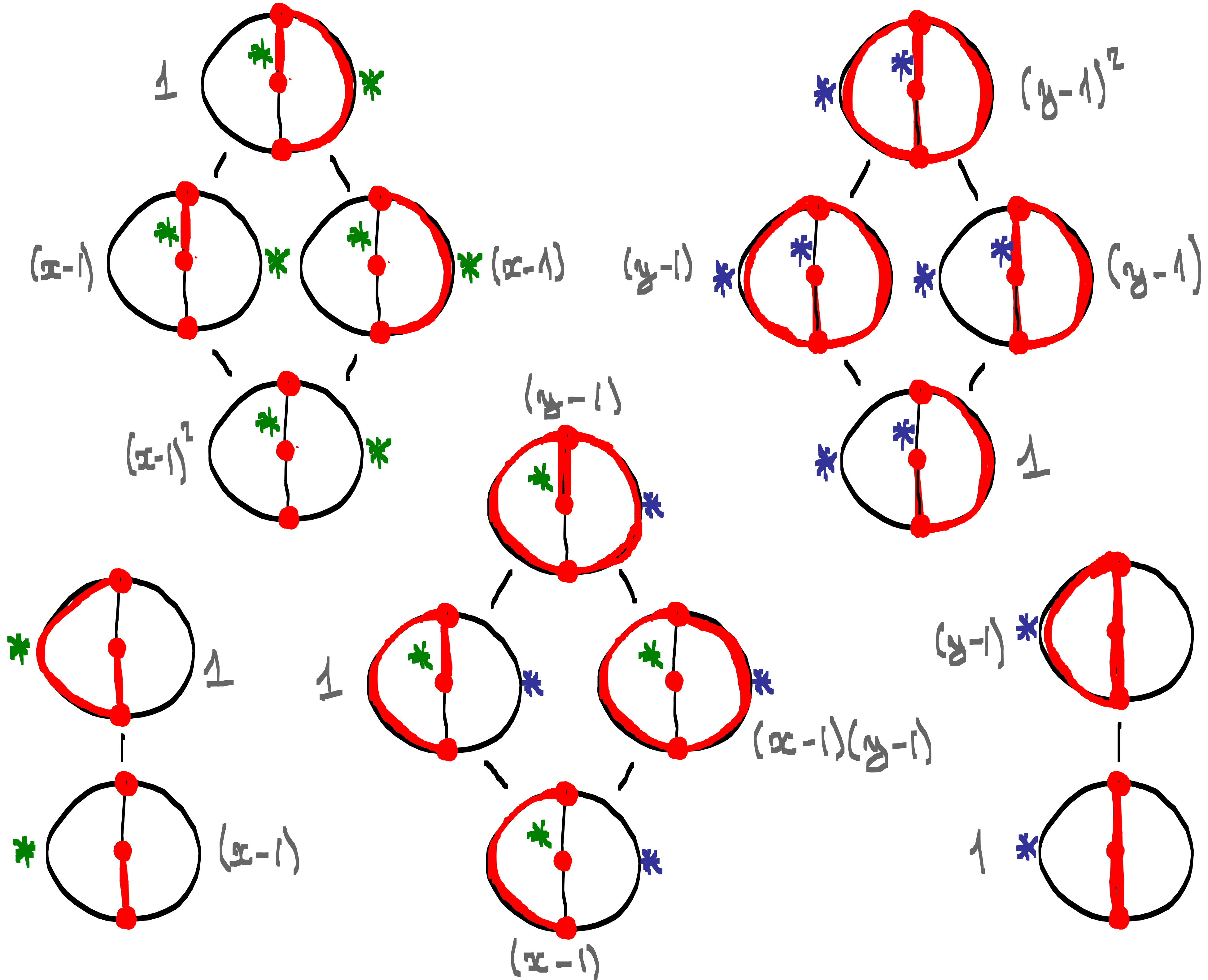


$$T_G(x,y) = x^2 + x + xy + y + y^2$$

✱ : arête de type I ✱ : arête de type L






1
(x-1)
(x-1)
(x-1)^2
(y-1)^2
(y-1)
(y-1)
1
(y-1)
1
(x-1)(y-1)
(x-1)
1
(x-1)
(y-1)
1

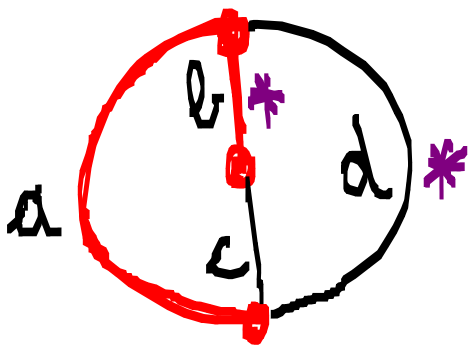
LIEN AVEC CYCLE / COCYCLE FONDAMENTAL

Soit T un arbre couvrant,

e_k = k-ième arête visitée dans l'algorithme.

Ordonnons $E(G)$: $e_1 < e_2 < \ldots < e_{|E(G)|}$.

Ex :



$c < b < a < d$

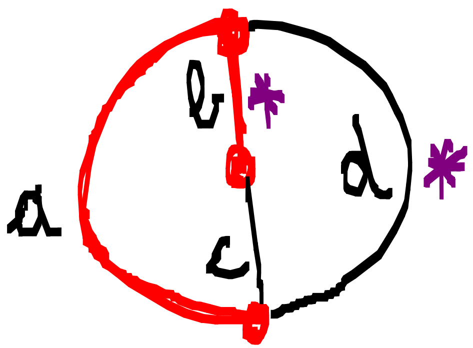
LIEN AVEC CYCLE/COCYCLE FONDAMENTAL

Soit T un arbre couvrant,

e_k = k-ième arête visitée dans l'algorithme.

Ordonnons $E(G)$: $e_1 < e_2 < \ldots < e_{|E(G)|}$.

Ex :



$c < b < a < d$

Prop : Une arête est active ssi elle est maximale dans son cycle/cocycle fondamental.

LIEN AVEC CYCLE/COCYCLE FONDAMENTAL

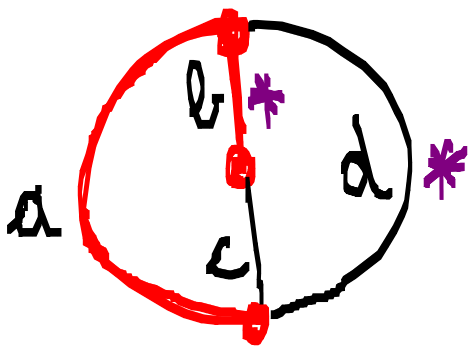
Soit T un arbre couvrant,

e_k = k-ième arête visitée dans l'algorithme.

Ordonnons $E(G)$: $e_1 < e_2 < \dots < e_{|E(G)|}$.

"(Δ, T)-ordre"

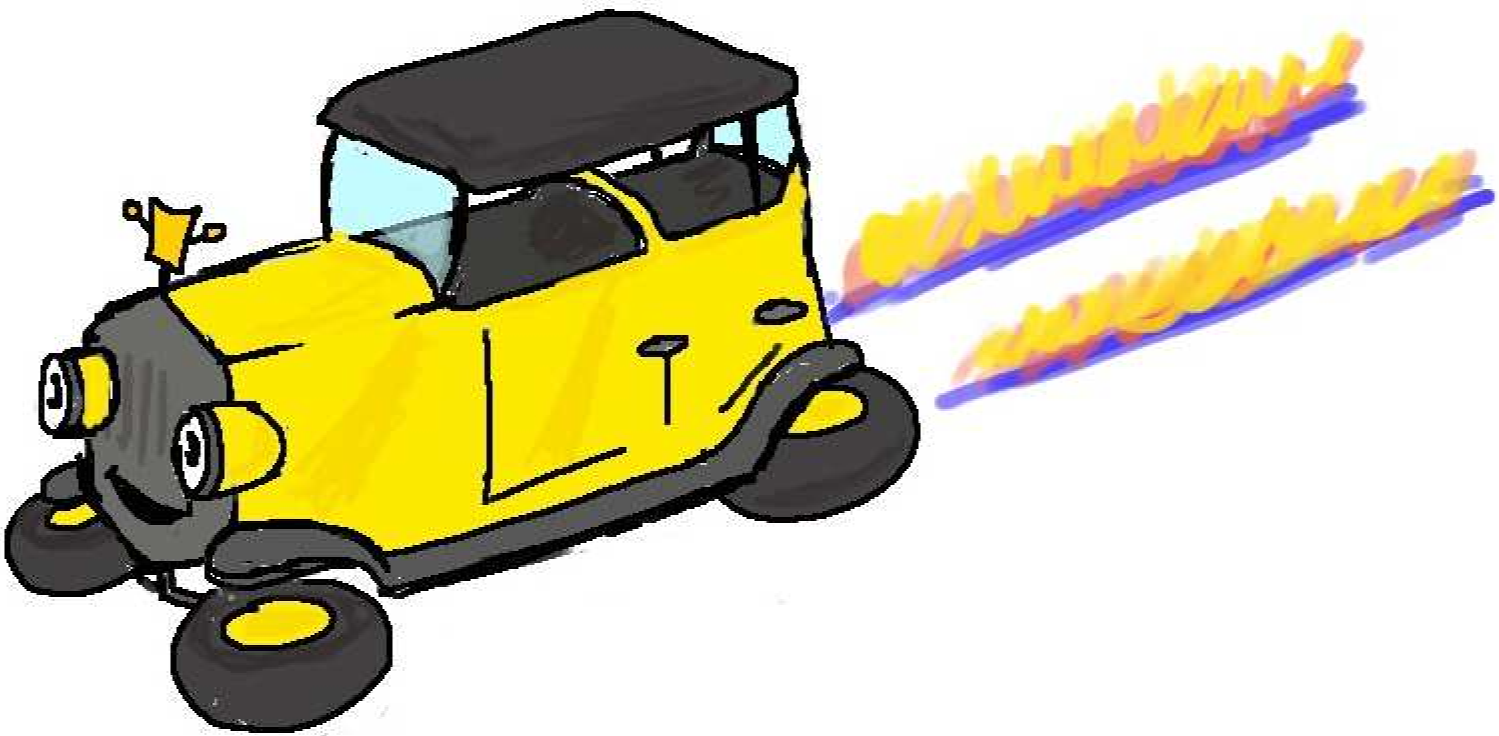
Ex :



$c < b < a < d$

Prop : Une arête est active ssi elle est maximale dans son cycle/cocycle fondamental.

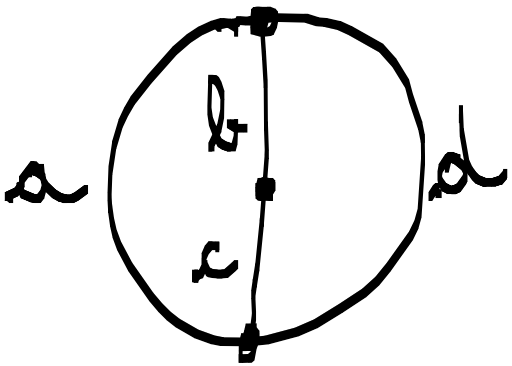
RETOUR VERS LES ACTIVITÉS



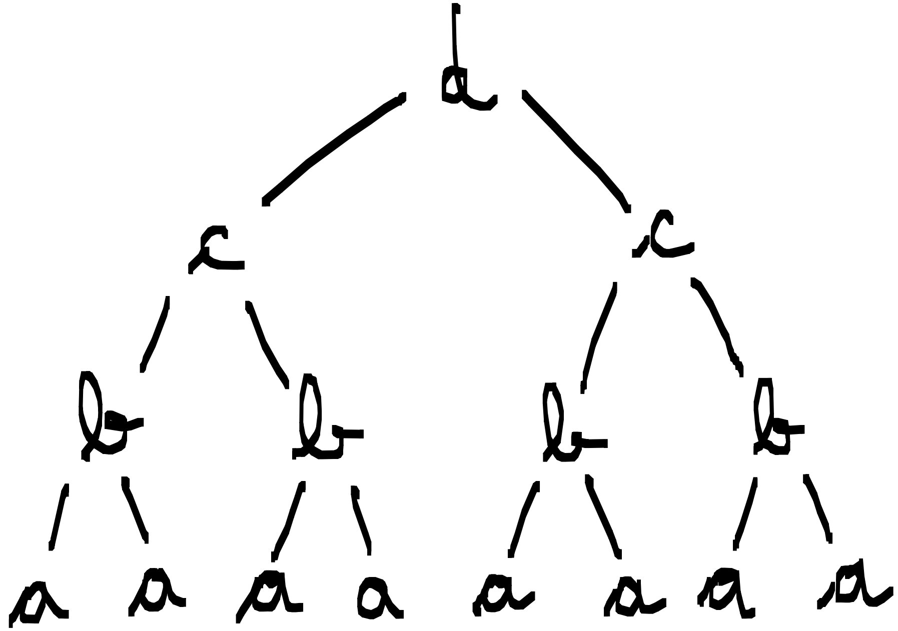
ACTIVITÉ SELON TUTTE

On a fixé un ordre sur E(G).
Chaque noeud de profondeur k est étiqueté par la k-ième plus grande arête.

Ex :



a < b < c < d

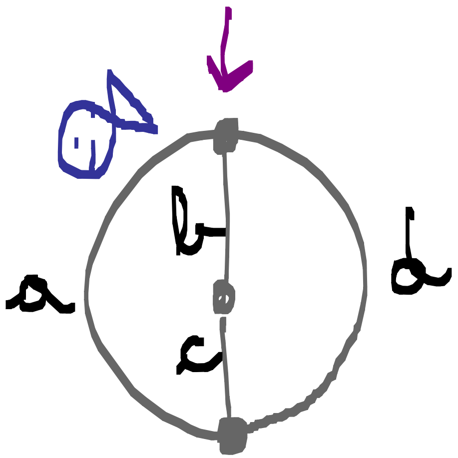


ORDRE DE PARCOURS

ordre de parcours =

application : $\left\{ \begin{array}{c} \text{arbres} \\ \text{couvrants} \\ \text{de } G \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{ordres} \\ \text{totaux} \\ \text{sur } E(G) \end{array} \right\}$

Ex :



$\{a,b\} \mapsto a<d<c<b$

$\{a,c\} \mapsto a<d<c<b$

$\{b,c\} \mapsto a<d<b<c$

$\{b,d\} \mapsto a<d<b<c$

$\{c,d\} \mapsto a<d<b<c$

ORDRE DE PARCOURS

ordre de parcours =

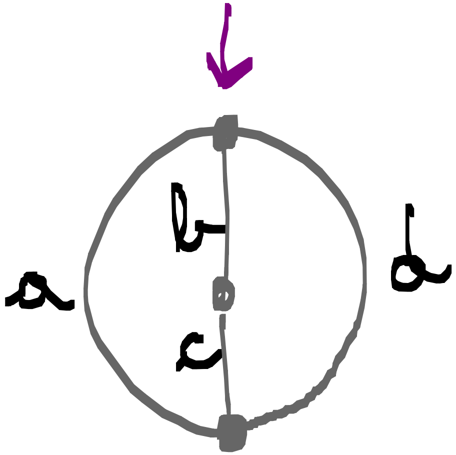
application : $\left\{ \begin{array}{c} \text{arbres} \\ \text{couvrants} \\ \text{de } G \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{ordres} \\ \text{totaux} \\ \text{sur } E(G) \end{array} \right\}$

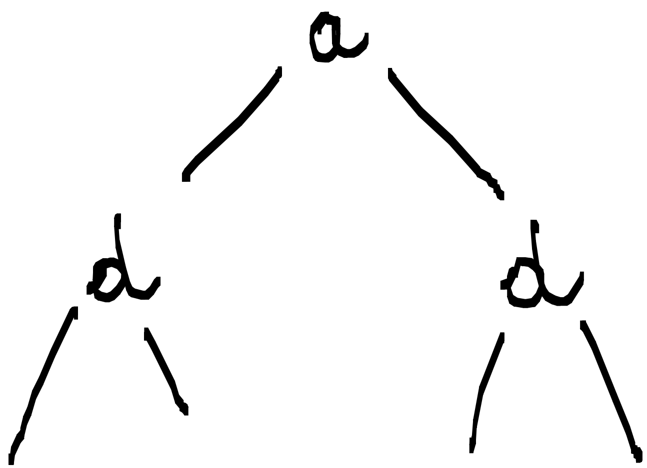
ϕ ordre de parcours est dit Δ-compatible s'il existe un arbre de décision Δ

tq

$$\forall T, \quad \phi(T) = (\Delta, T)\text{-ordre}$$

ACTIVITÉ BOURGEONNANTE





$\{a,b\} \mapsto a<d<c<b$

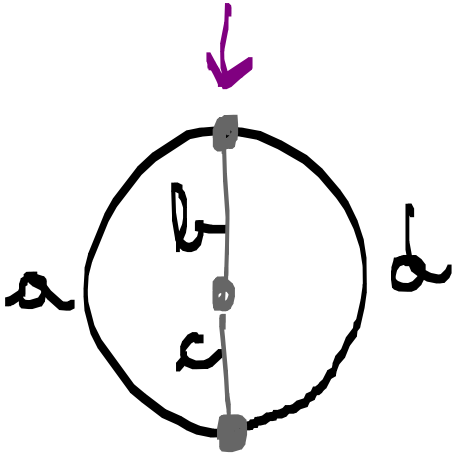
$\{a,c\} \mapsto a<d<c<b$

$\{b,c\} \mapsto a<d<b<c$

$\{b,d\} \mapsto a<d<b<c$

$\{c,d\} \mapsto a<d<b<c$

Activité bourgeonnante



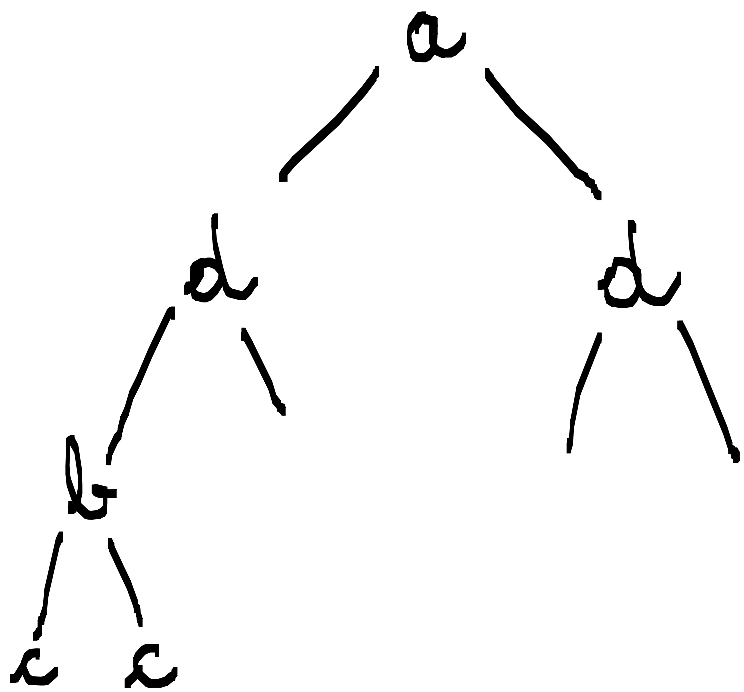
$\{a,b\} \mapsto a<d<c<b$

$\{a,c\} \mapsto a<d<c<b$

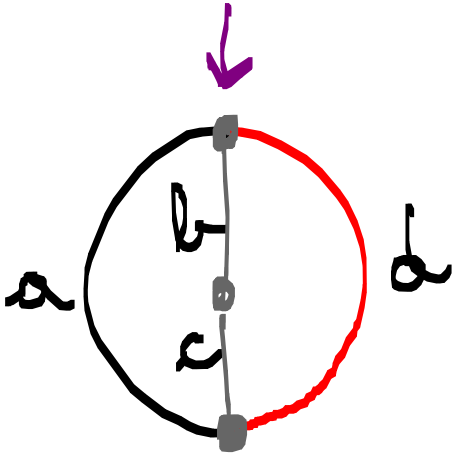
$\{b,c\} \mapsto a<d<b<c$

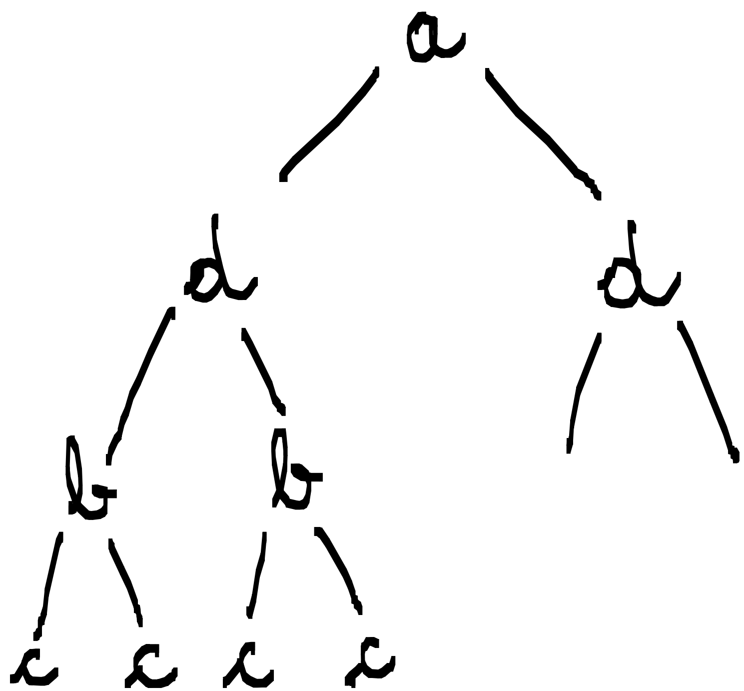
$\{b,d\} \mapsto a<d<b<c$

$\{c,d\} \mapsto a<d<b<c$



ACTIVITÉ BOURGEONNANTE





$\{a,b\} \mapsto a < d < c < b$

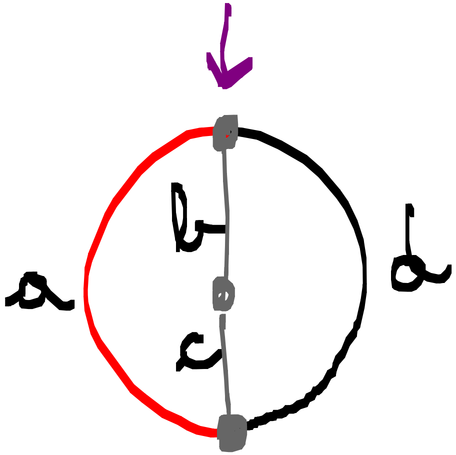
$\{a,c\} \mapsto a < d < c < b$

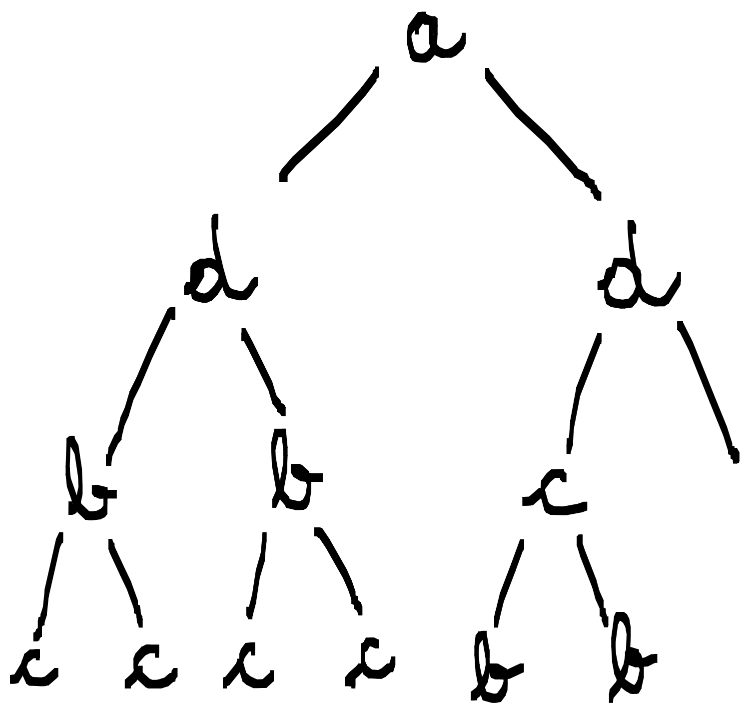
$\{b,c\} \mapsto a < d < b < c$

$\{b,d\} \mapsto a < d < b < c$

$\{c,d\} \mapsto a < d < b < c$

ACTIVITÉ BOURGEONNANTE





$\{a,b\} \mapsto a < d < c < b$

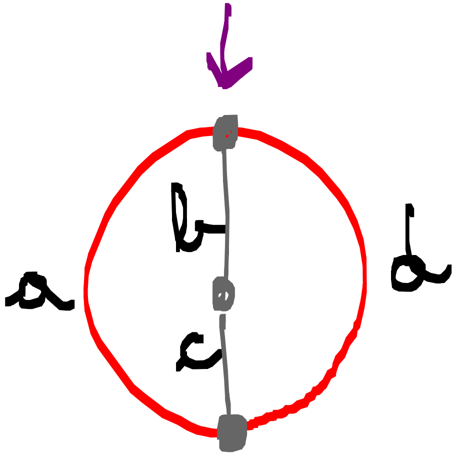
$\{a,c\} \mapsto a < d < c < b$

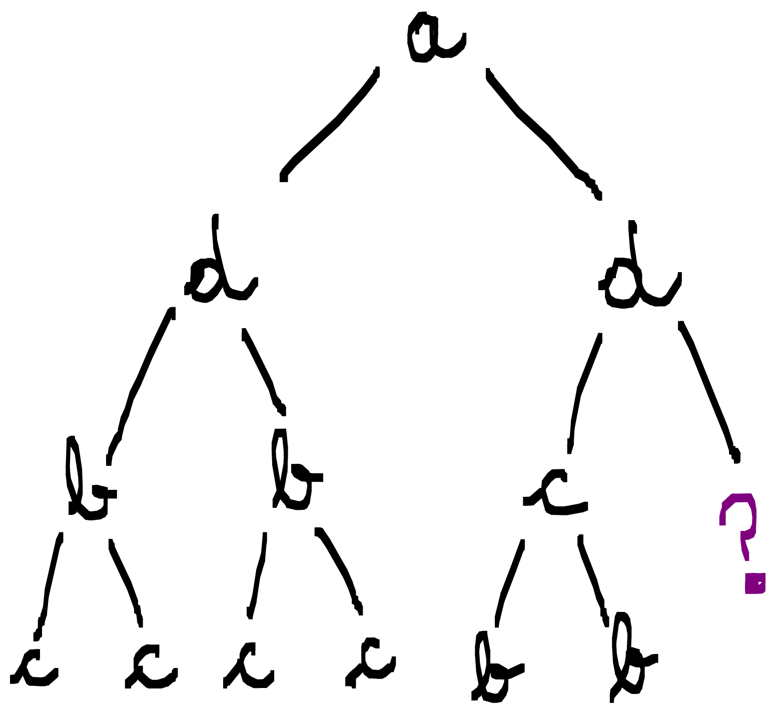
$\{b,c\} \mapsto a < d < b < c$

$\{b,d\} \mapsto a < d < b < c$

$\{c,d\} \mapsto a < d < b < c$

ACTIVITÉ BOURGEONNANTE





$\{a, b\} \mapsto a < d < c < b$

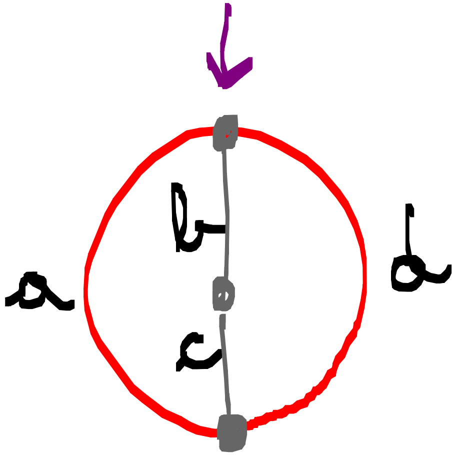
$\{a, c\} \mapsto a < d < c < b$

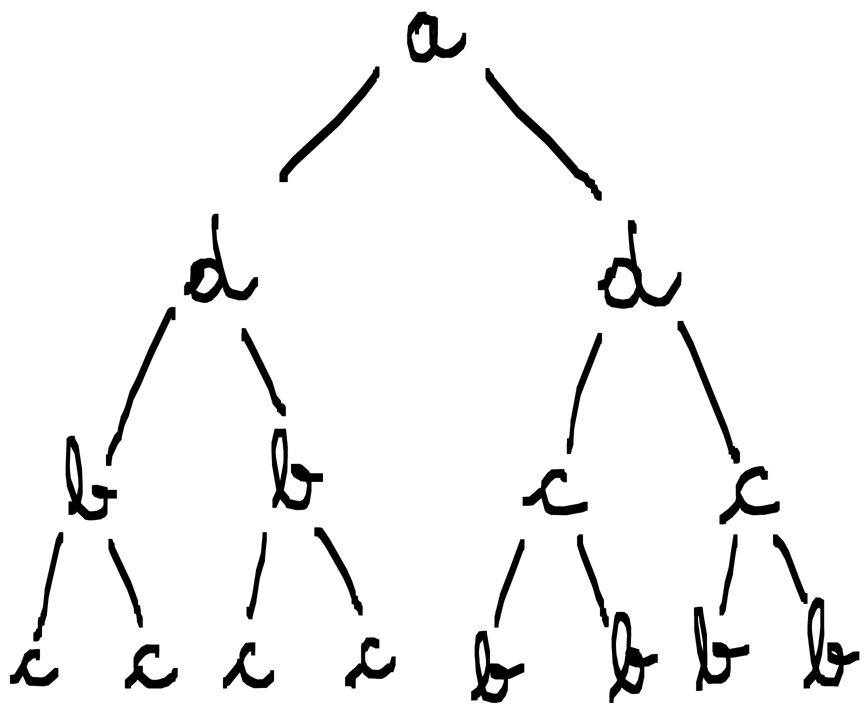
$\{b, c\} \mapsto a < d < b < c$

$\{b, d\} \mapsto a < d < b < c$

$\{c, d\} \mapsto a < d < b < c$

ACTIVITÉ BOURGEONNANTE





$\{a,b\} \mapsto a<d<c<b$

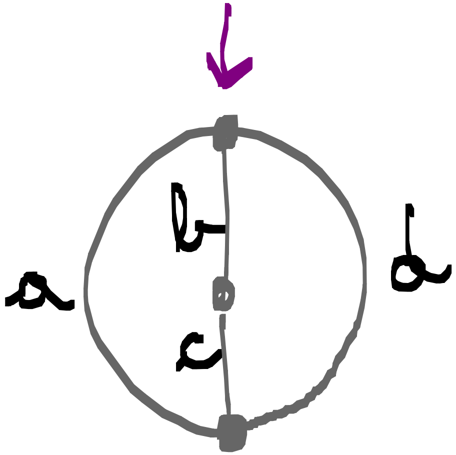
$\{a,c\} \mapsto a<d<c<b$

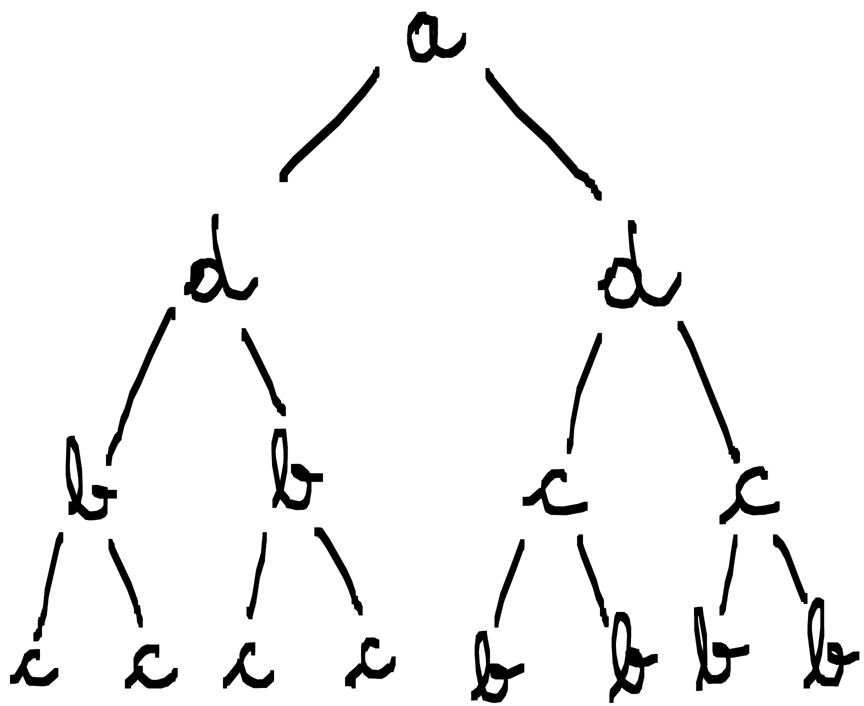
$\{b,c\} \mapsto a<d<b<c$

$\{b,d\} \mapsto a<d<b<c$

$\{c,d\} \mapsto a<d<b<c$

ACTIVITÉ BOURGEONNANTE





$\{a,b\} \mapsto a<d<c<b$

$\{a,c\} \mapsto a<d<c<b$

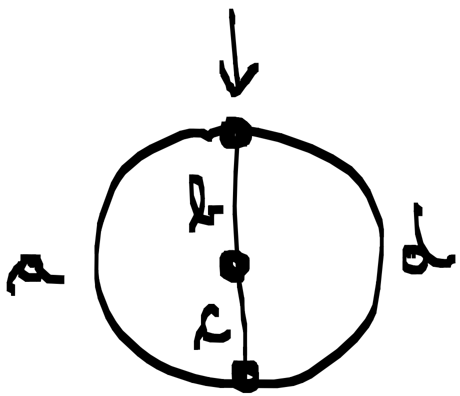
$\{b,c\} \mapsto a<d<b<c$

$\{b,d\} \mapsto a<d<b<c$

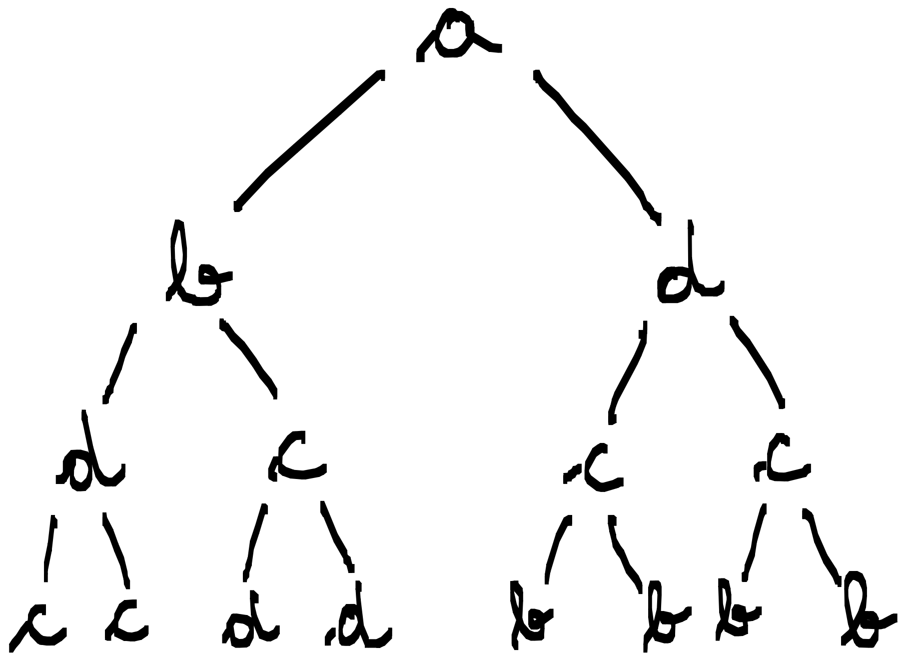
$\{c,d\} \mapsto a<d<b<c$ $\longrightarrow$ Δ-compatible !

ACTIVITÉ SELON BERNARDI.

Première idée : ordre de parcours = ordre de première visite lors du tour de l'arbre.



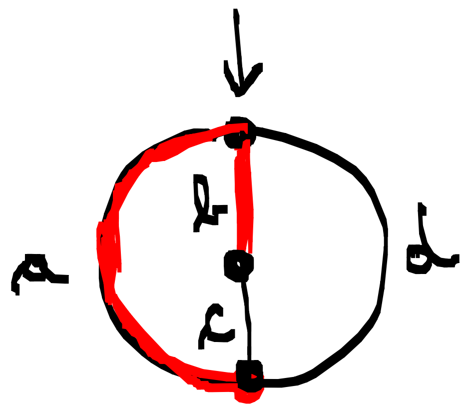
$a<d<c<b$



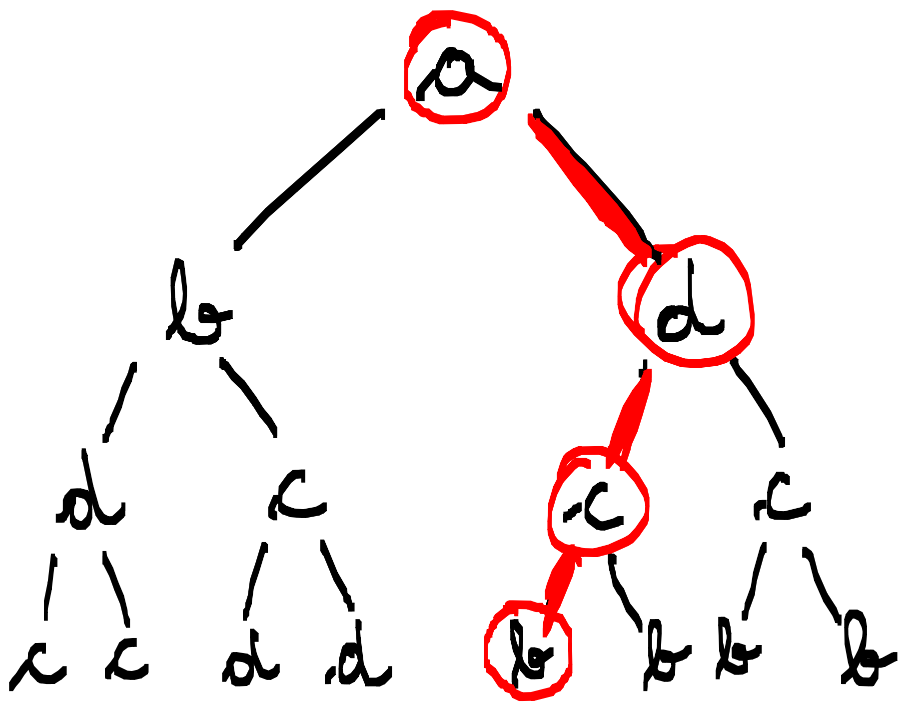
Δ-compatible

ACTIVITÉ SELON BERNARDI.

Première idée : ordre de parcours = ordre de première visite lors du tour de l'arbre.



$a < d < c < b$

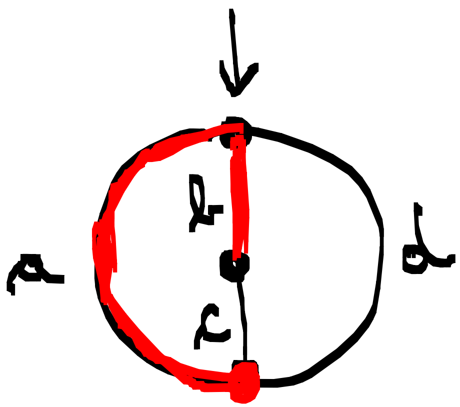


Δ-compatible

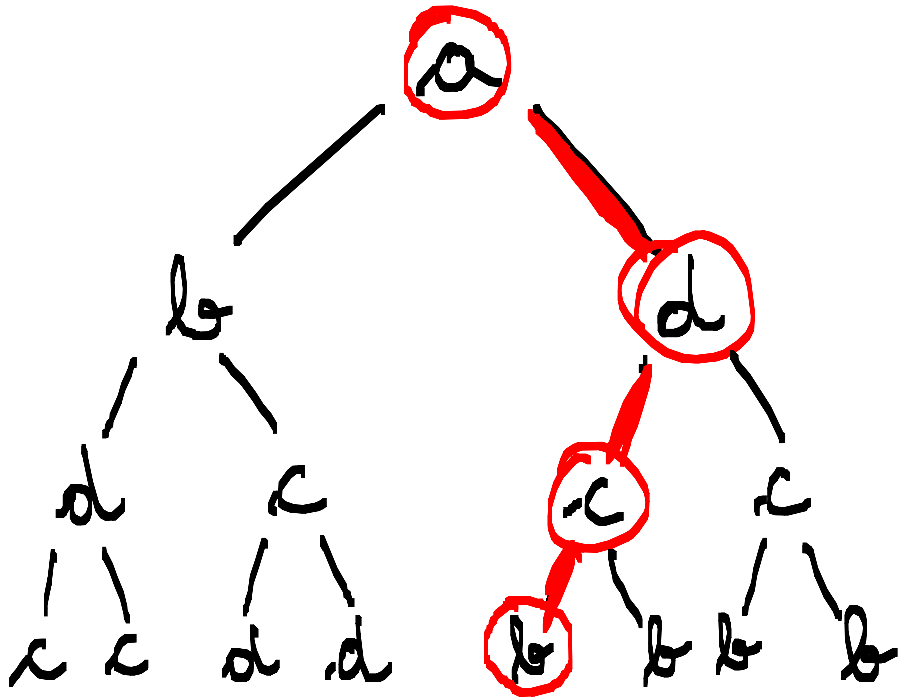
ACTIVITÉ SELON BERNARDI.

<u>Première idée :</u> ordre de parcours = ordre de première visite lors du tour de l'arbre.

mais ça ne marche pas !



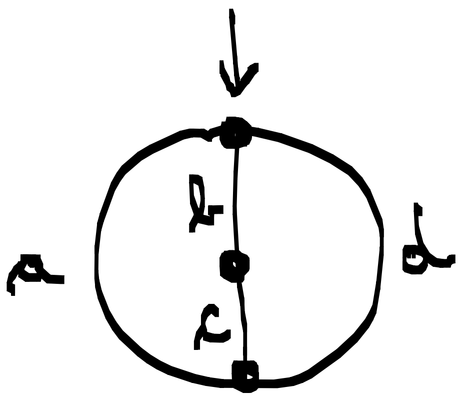
$a < d < c < b$



Δ-compatible

ACTIVITÉ SELON BERNARDI.

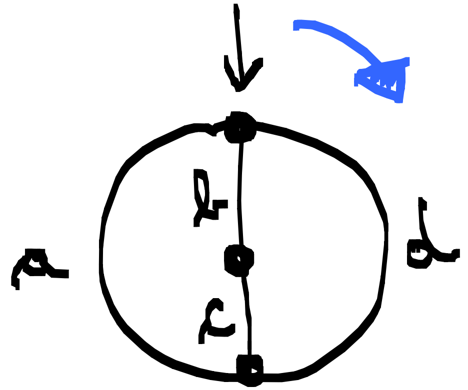
Deuxième idée : ordre de parcours = inverse de l'ordre de première visite lors du tour de l'arbre.

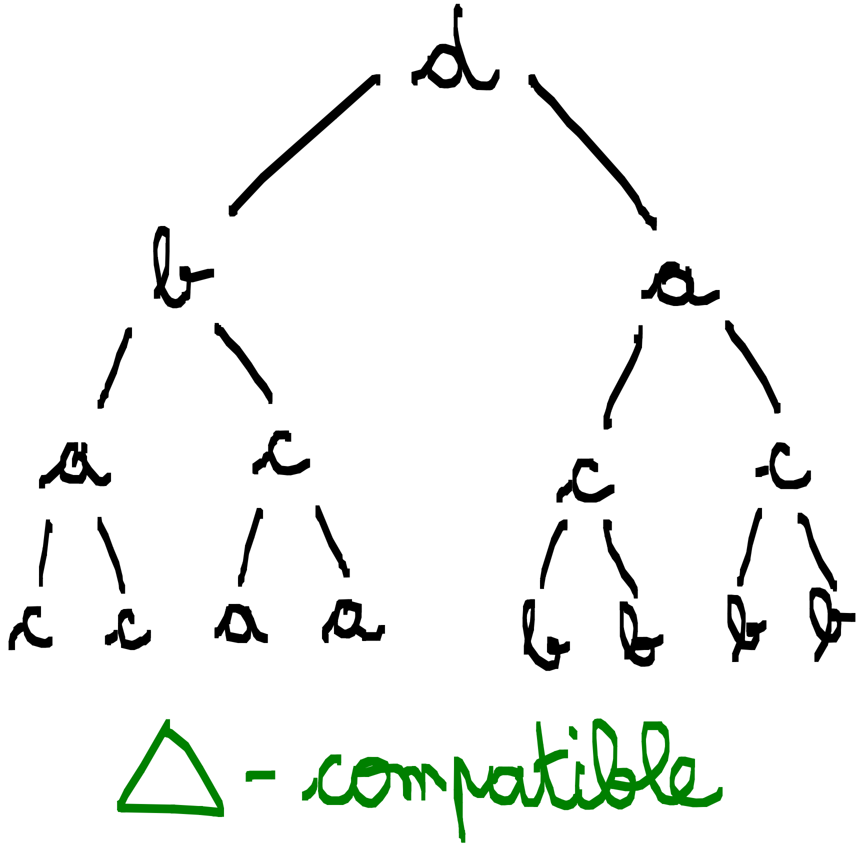


pas Δ-compatible !

ACTIVITÉ SELON BERNARDI.

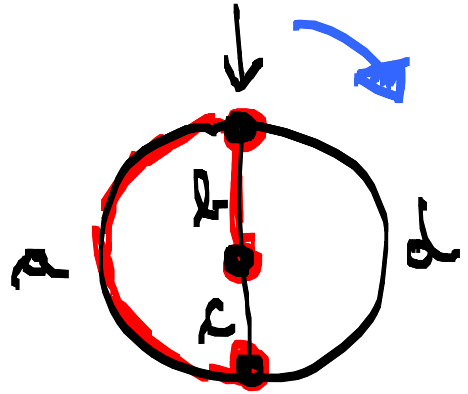
Troisième idée : ordre de parcours = ordre de première visite lors du tour *inverse* de l'arbre.





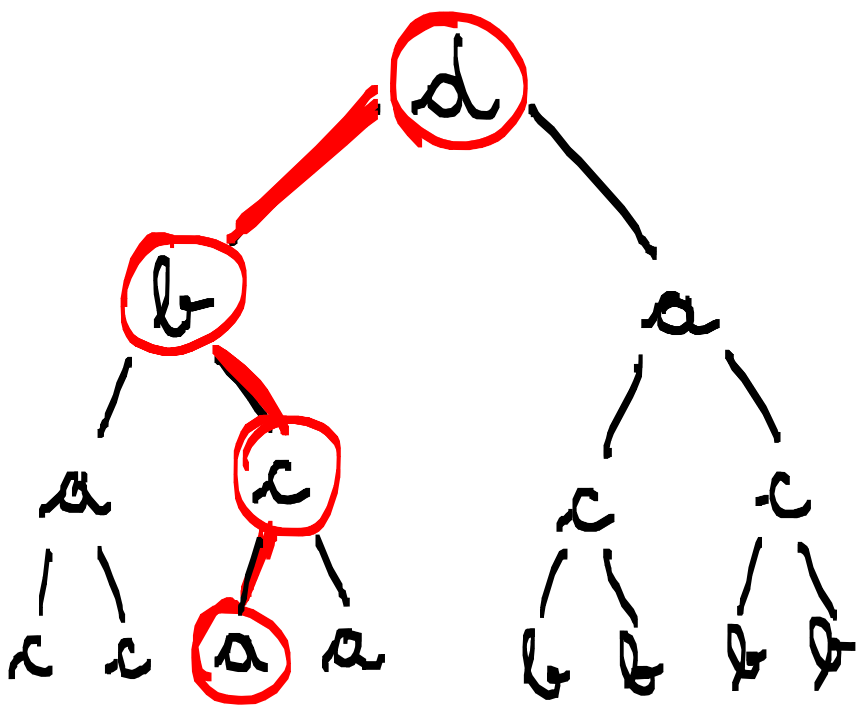
ACTIVITÉ SELON BERNARDI.

Troisième idée : ordre de parcours = ordre de première visite lors du tour inverse de l'arbre.



$d <_i b <_i c <_i a$

(à comparer avec $a < d < c < b$)

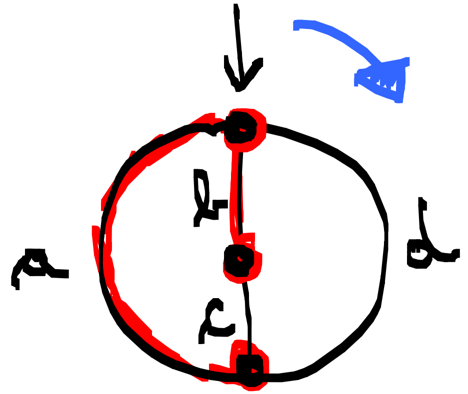


Δ-compatible

ACTIVITÉ SELON BERNARDI.

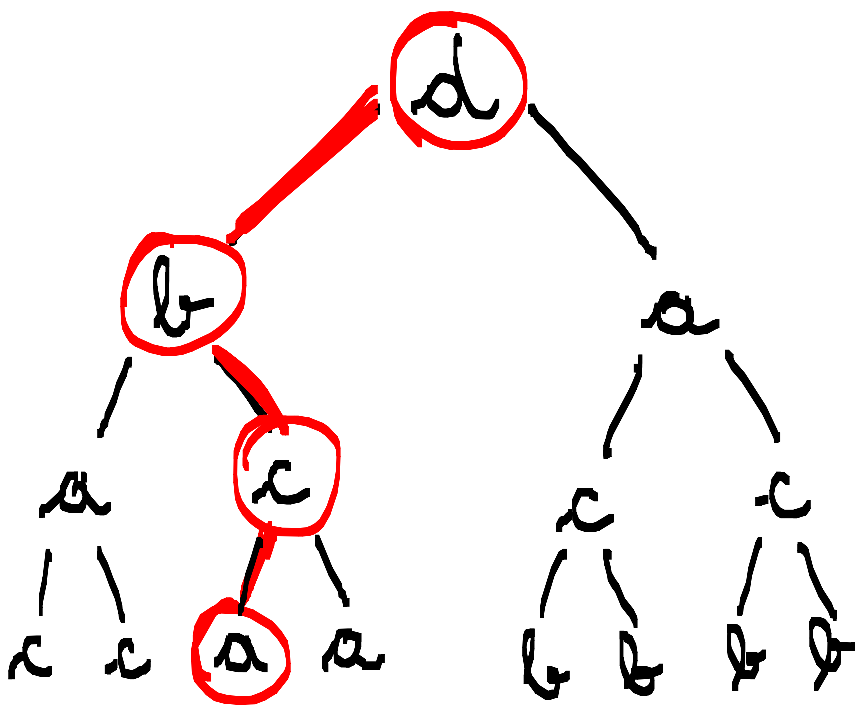
Troisième idée : ordre de parcours = ordre de première visite lors du tour inverse de l'arbre.

Théorème : ça marche !



$d <_i b <_i c <_i a$

(à comparer avec $a < d < c < b$)



$\triangle$-compatible

QUELQUES QUESTIONS SANS RÉPONSES.

1. Calcul des arêtes actives d'un arbre couvrant donné en temps <u>linéaire</u> ?

2. Est-ce que

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{IntAct}(T_1) = \mathrm{IntAct}(T_2) \\ \mathrm{ExtAct}(T_1) = \mathrm{ExtAct}(T_2) \end{array}\right\} \Rightarrow T_1 = T_2 \ ?$$

3. Trouver d'autres applications ...


MERCI!