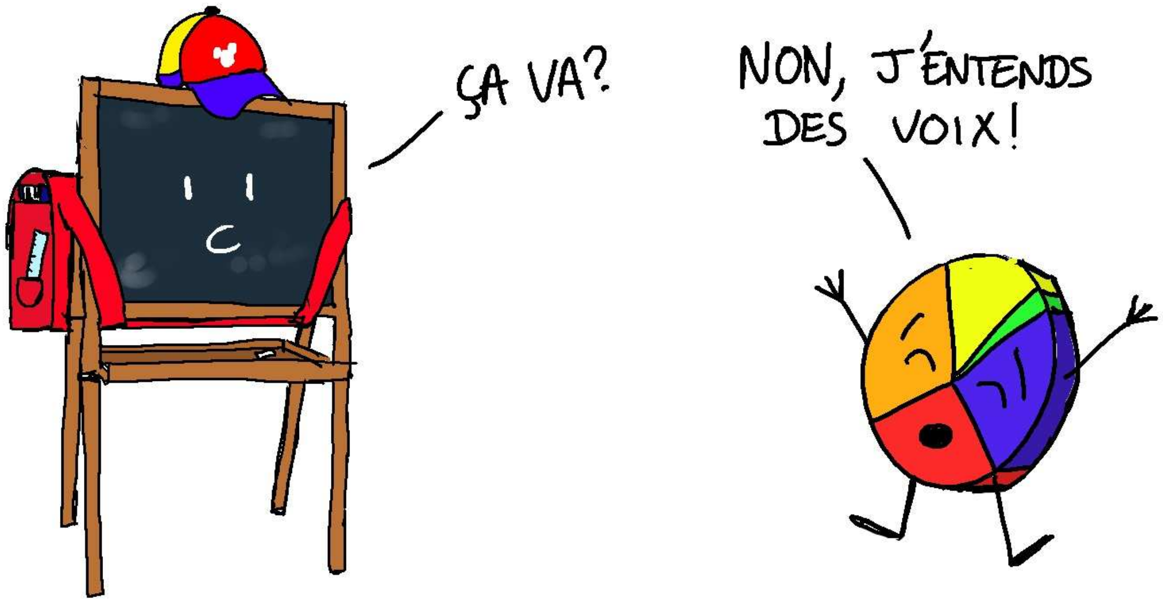
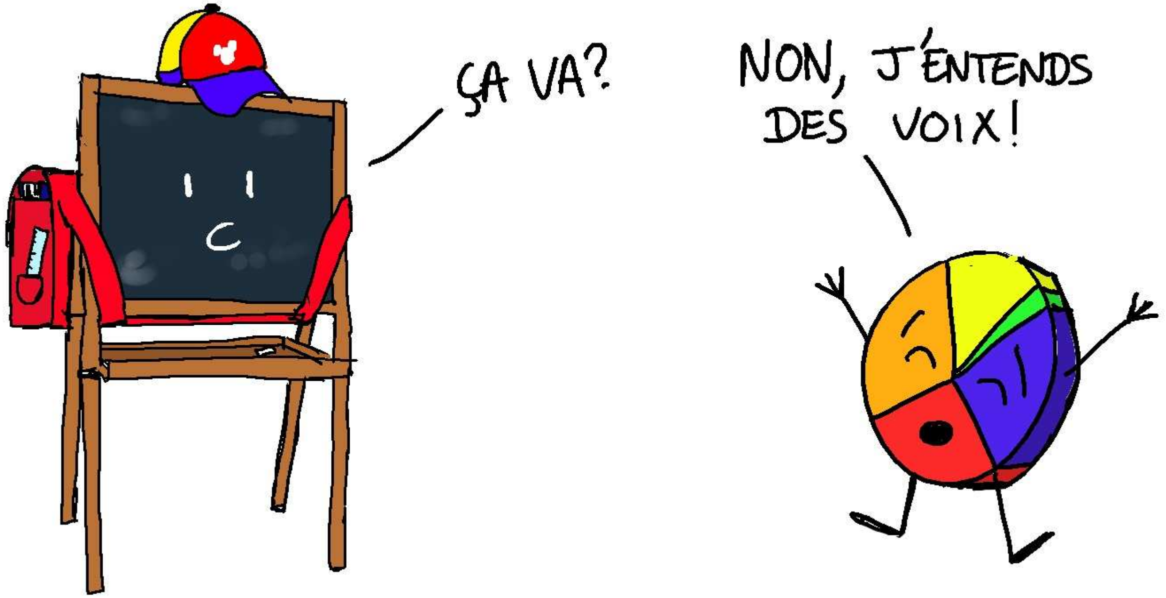
Nouvelles Bijections entre Tableaux de Young, Diagrammes d'arcs et Marches dans le Treillis de Young

Julien COURTIEL
PIMS / Université Simon Fraser (Vancouver)
avec Sophie BURRILL (SFU), Eric FUSY (LIX),
Steven MELCZER (Waterloo) et Marni MISHNA (SFU)



Nouvelles Bijections entre Tableaux de Young, Diagrammes d'arcs et Marches dans le Treillis de Young

Julien COURTIEL
PIMS / Université Simon Fraser (Vancouver)
avec Sophie BURRILL (SFU), Eric FUSY (LIX),
Steven MELCZER (Waterloo) et Marni MISHNA (SFU)



SI LA COMBINATOIRE ÉTAIT LE PARADIS...

Tableaux de Young

Permutations

Arbres

Suites de tableaux

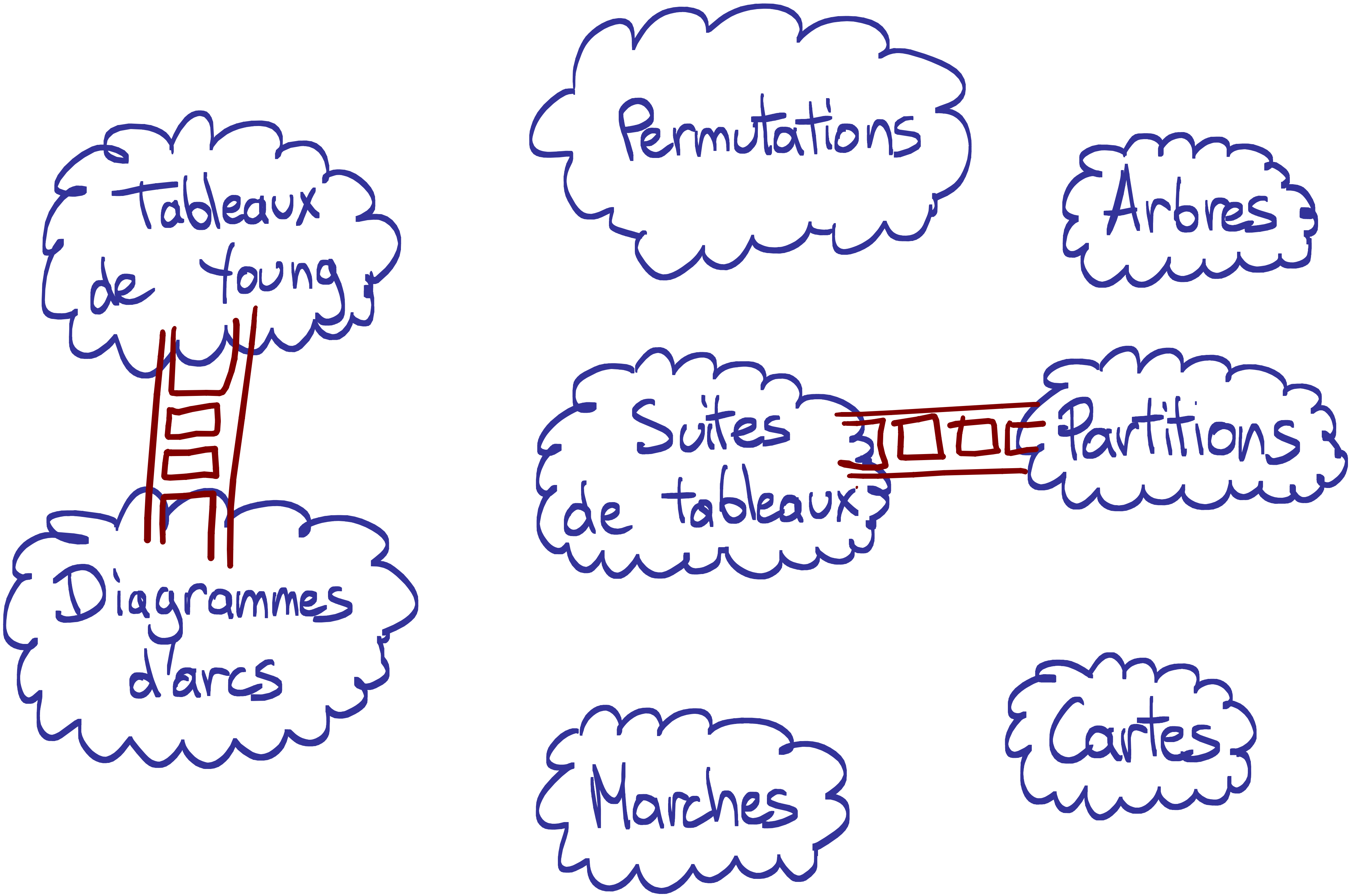
Partitions

Diagrammes d'arcs

Marches

Cartes

SI LA COMBINATOIRE ÉTAIT LE PARADIS...

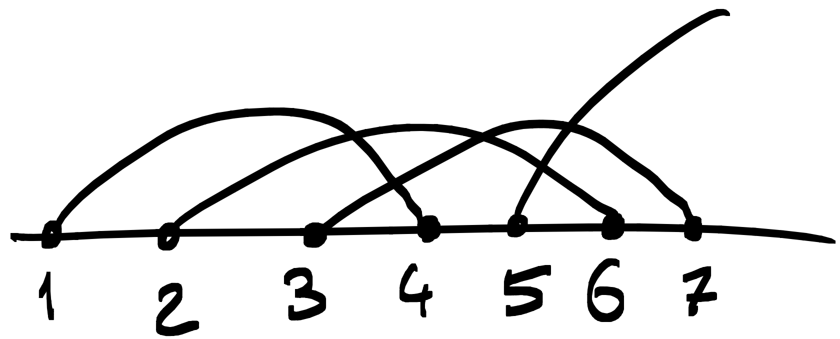


CONJECTURE DE BURRILL

Conjecture L'ensemble des tableaux de Young standards de taille n et de hauteur bornée par $2k$ est en bijection avec l'ensemble des diagrammes d'appariements ouverts de taille n sans emboîtement d'ordre $(k+1)$.

7	6	5	3
4	2	1	

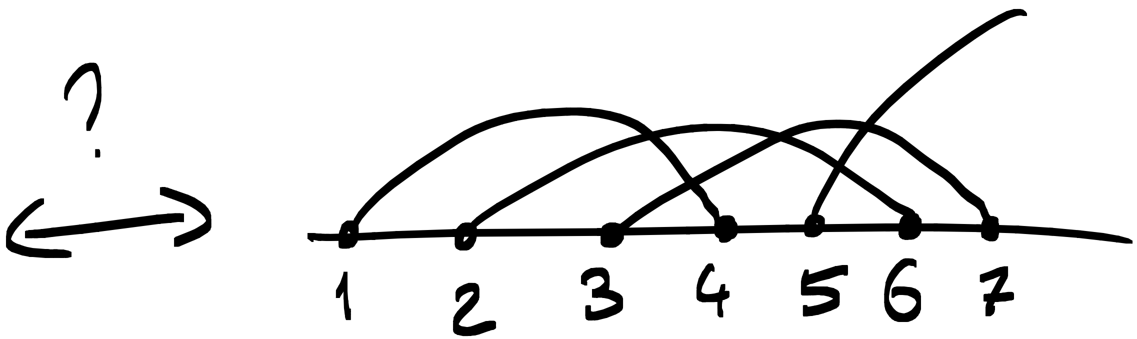
$\overset{?}{\longleftrightarrow}$



CONJECTURE DE BURRILL

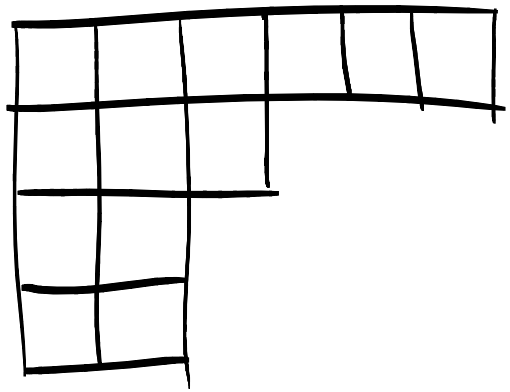
Conjecture L'ensemble des tableaux de Young standards de taille n et de hauteur bornée par $2k$ est en bijection avec l'ensemble des diagrammes d'appariements ouverts de taille n sans emboîtement d'ordre $(k+1)$.

7	6	5	3
4	2	1	



TABLEAUX DE YOUNG STANDARDS

Diagramme de Ferrers = "tableau" avec des lignes aux longueurs décroissantes
(= partition d'entier)



TABLEAUX DE YOUNG STANDARDS

Diagramme de Ferrers = "tableau" avec des lignes aux longueurs décroissantes (= partition d'entier)

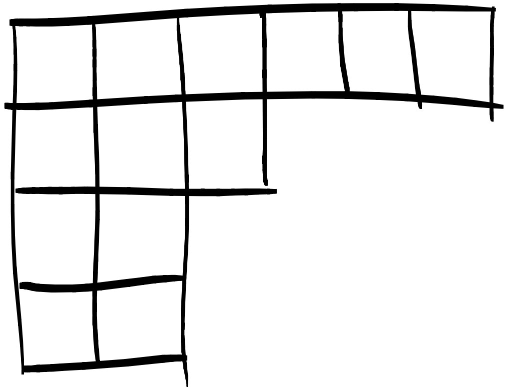
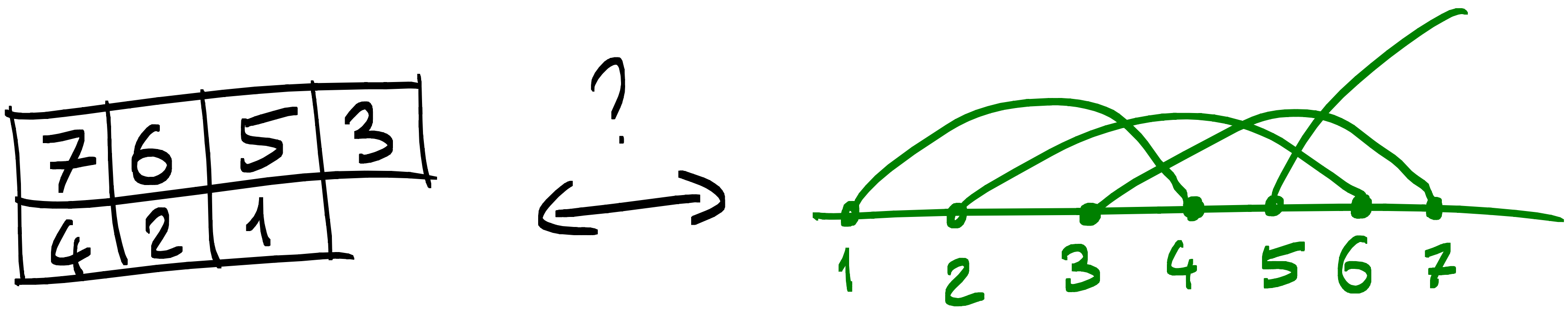


Tableau de Young standard = diagramme de Ferrers dans lequel les cases sont remplies par 1, …, n (où n est le nombre de cases) de sorte que les lignes et les colonnes soient remplies en ordre strictement décroissant.

13	12	10	9	6	4
11	8	2			
7	3				
5	1				

CONJECTURE DE BURRILL

Conjecture L'ensemble des tableaux de Young standards de taille n et de hauteur bornée par $2k$ est en bijection avec l'ensemble des diagrammes d'appariements ouverts de taille n sans emboîtement d'ordre $(k+1)$.



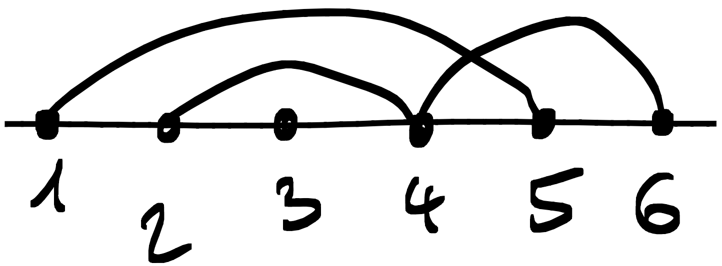
DIAGRAMMES D'ARCS

Partitions d'ensemble

(partitions de $\{1, \dots, n\}$)

$\{\{1,5\},\{2,4,6\},\{3\}\}$

$\downarrow$

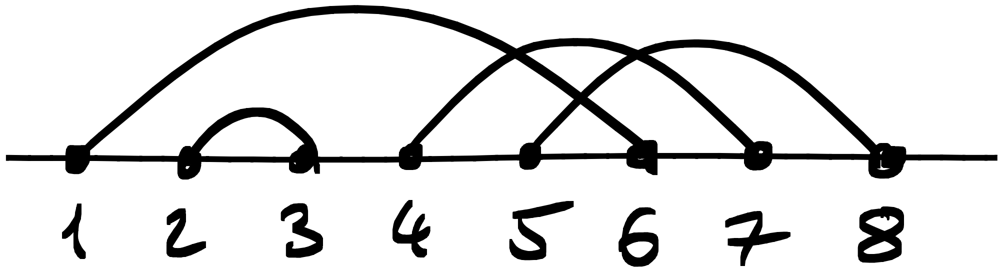


Appariements

(appariements de $\{1, \dots, n\}$)

$\{\{1,6\},\{2,3\},\{4,7\},\{5,8\}\}$

$\downarrow$



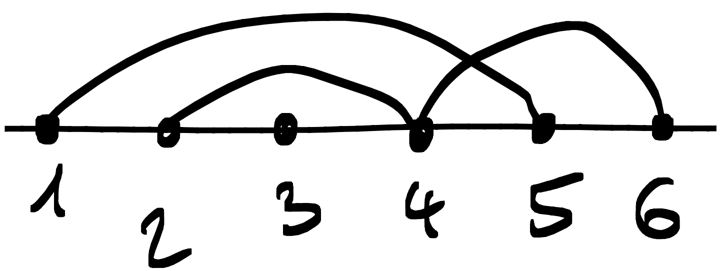
DIAGRAMMES D'ARCS

Partitions d'ensemble

(partitions de $\{1, \dots, n\}$)

$\{\{1,5\},\{2,4,6\},\{3\}\}$

$\downarrow$

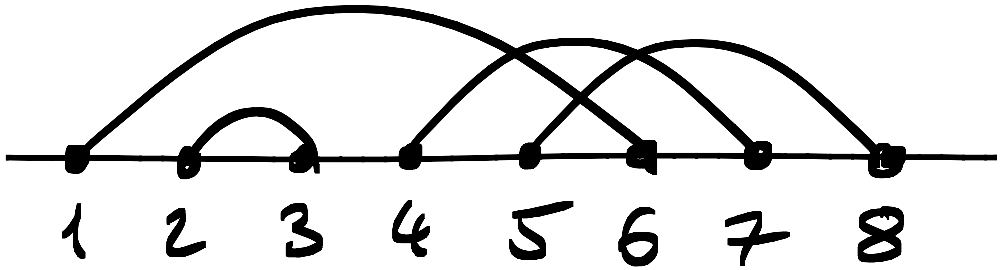


Appariements

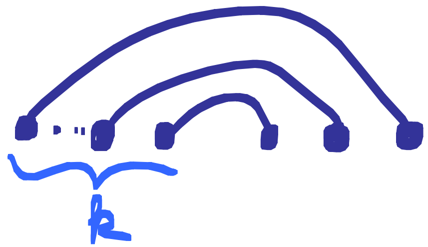
(appariements de $\{1, \dots, n\}$)

$\{\{1,6\},\{2,3\},\{4,7\},\{5,8\}\}$

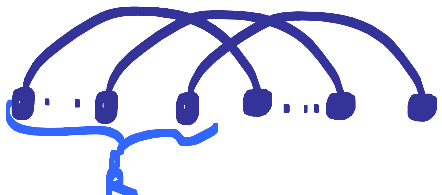
$\downarrow$



embôitement d'ordre k = sous-diagramme de la forme



croisement d'ordre k = sous-diagramme de la forme

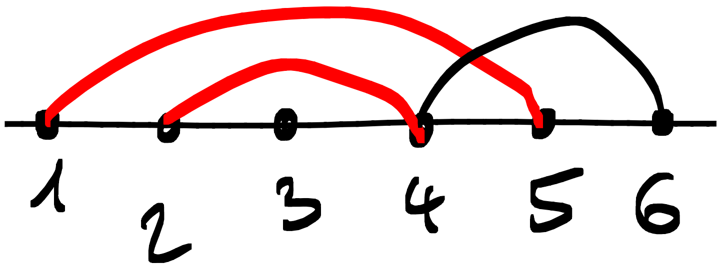


Diagrammes d'arcs

Partitions d'ensemble

(partitions de $\{1, \dots, n\}$)

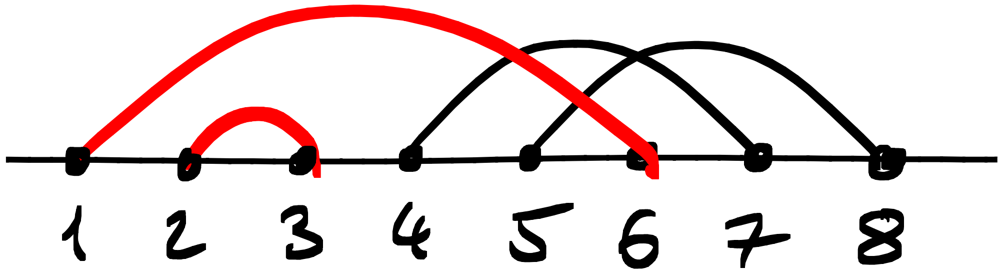
$\{\{1,5\},\{2,4,6\},\{3\}\}$



Appariements

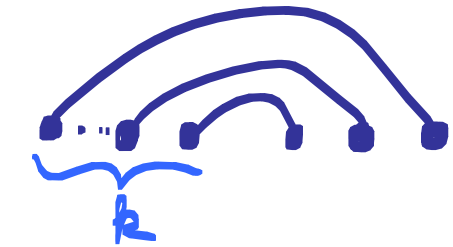
(appariements de $\{1, \dots, n\}$)

$\{\{1,6\},\{2,3\},\{4,7\},\{5,8\}\}$

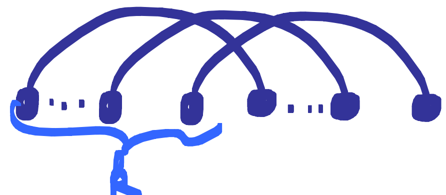


emboîtements d'ordre 2

emboîtement d'ordre k = sous-diagramme de la forme



croisement d'ordre k = sous-diagramme de la forme

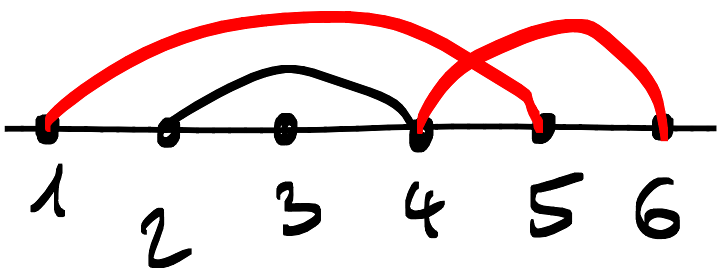


DIAGRAMMES D'ARCS

Partitions d'ensemble

(partitions de $\{1, \dots, n\}$)

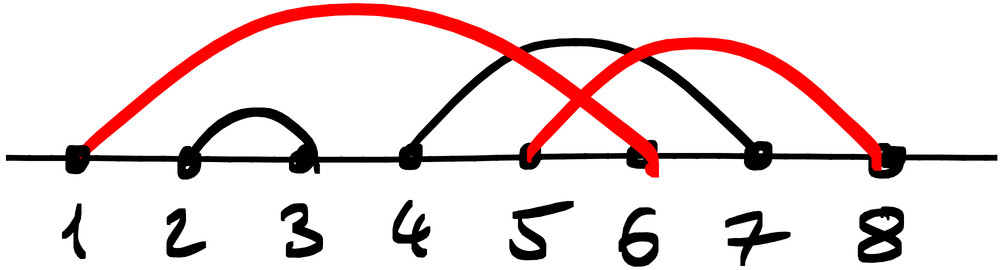
$\{\{1,5\},\{2,4,6\},\{3\}\}$



Appariements

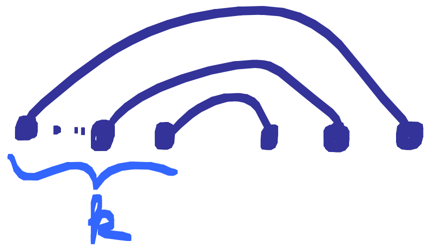
(appariements de $\{1, \dots, n\}$)

$\{\{1,6\},\{2,3\},\{4,7\},\{5,8\}\}$

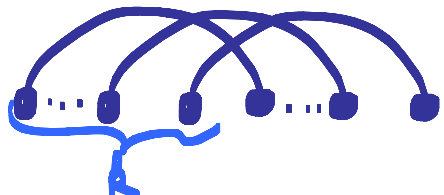


croisements d'ordre 2

emboîtement d'ordre k =
sous-diagramme de la forme



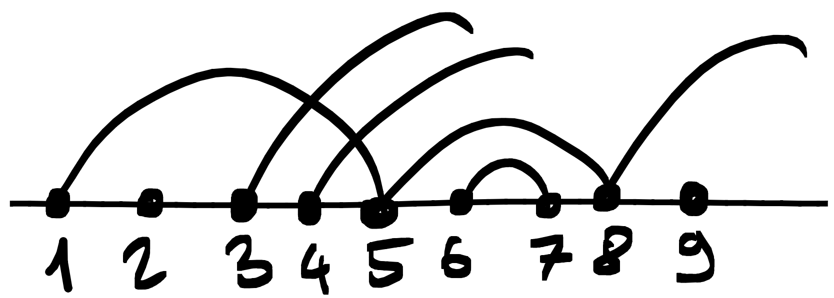
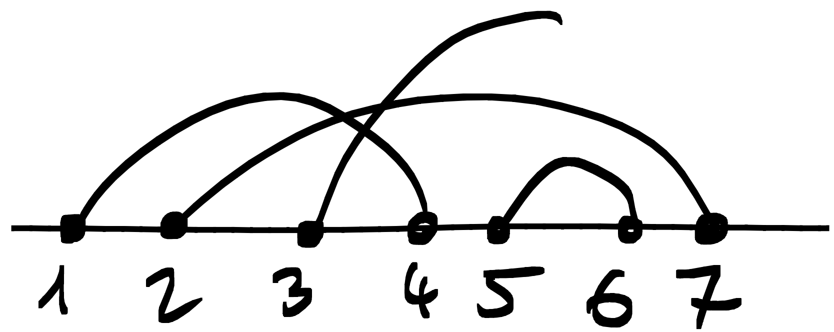
croisement d'ordre k =
sous-diagramme de la forme



DIAGRAMMES D'ARCS OUVERTS

diagramme d'arcs ouverts = diagramme d'arcs dont la fin est tronquée

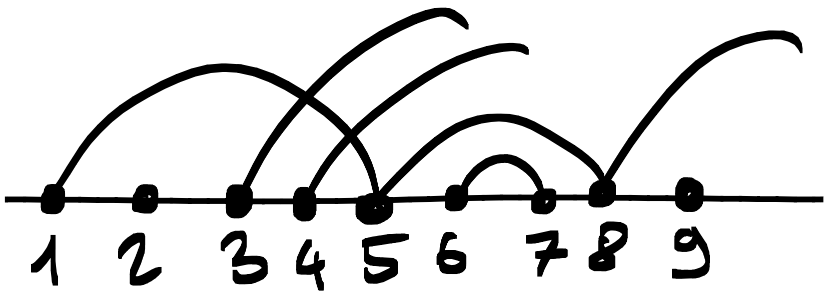
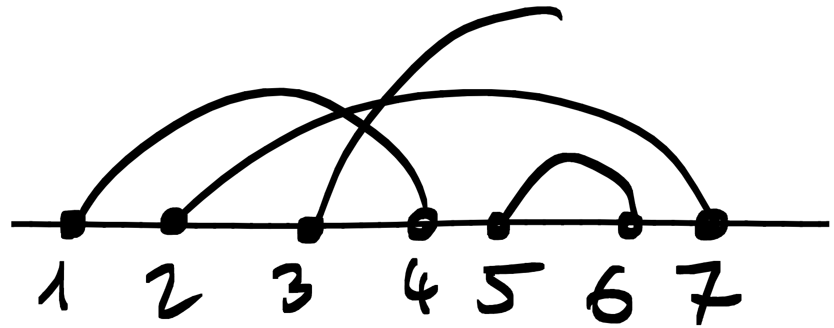
Certains arcs peuvent être ouverts.

Partitions d'ensemble	Appariements
	

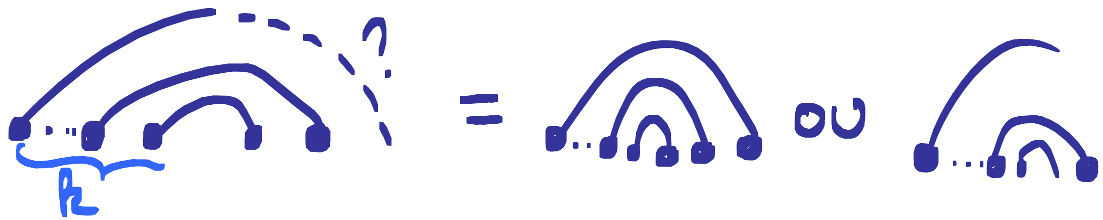
DIAGRAMMES D'ARCS OUVERTS

diagramme d'arcs ouverts = diagramme d'arcs dont la fin est tronquée

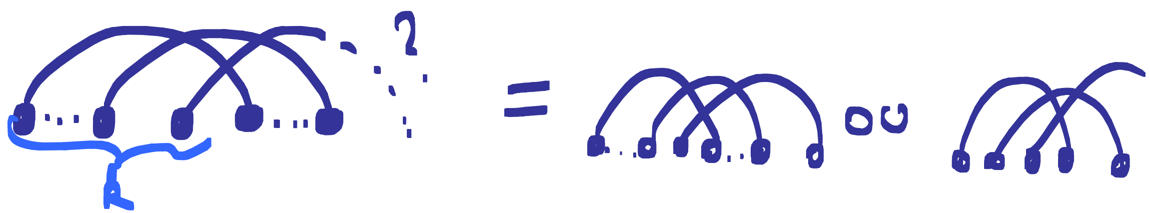
Certains arcs peuvent être ouverts.

Partitions d'ensemble	Appariements
	

emboîtement d'ordre k = sous-diagramme de la forme



croisement d'ordre k = sous-diagramme de la forme



DIAGRAMMES D'ARCS OUVERTS

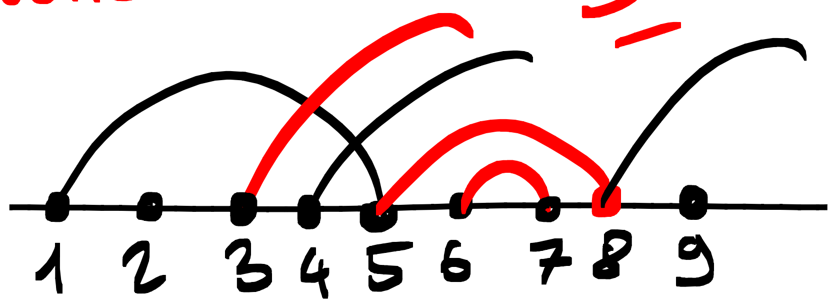
diagramme d'arcs ouverts = diagramme d'arcs dont la fin est tronquée

Certains arcs peuvent être ouverts.

Partitions d'ensemble

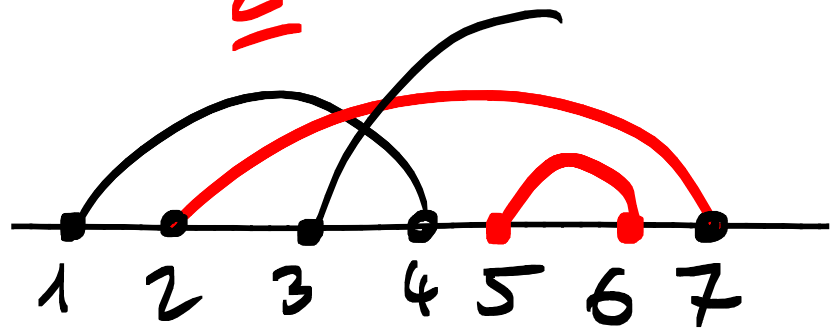
embôitement

3

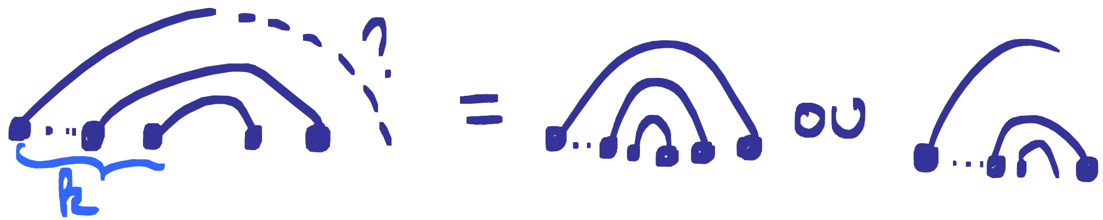


Appariements

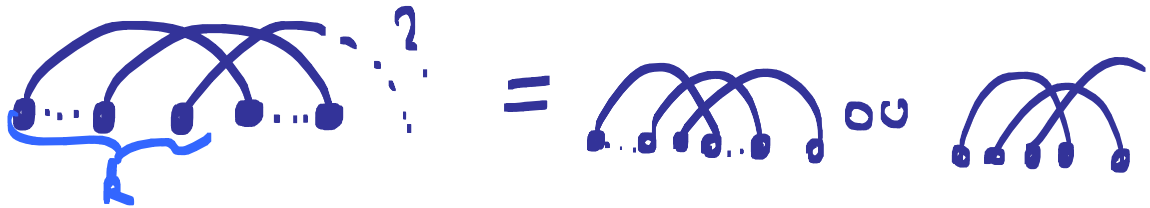
2



embôitement d'ordre k = sous-diagramme de la forme



croisement d'ordre k = sous-diagramme de la forme



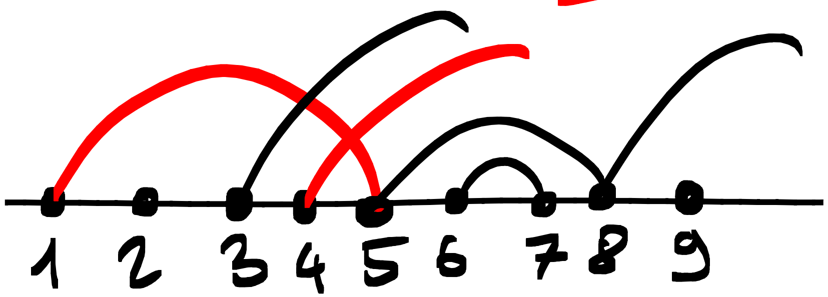
DIAGRAMMES D'ARCS OUVERTS

diagramme d'arcs ouverts = diagramme d'arcs dont la fin est tronquée

Certains arcs peuvent être ouverts.

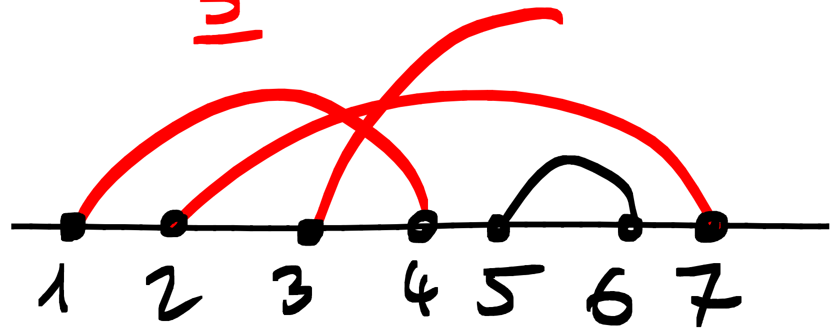
Partitions d'ensemble

croisement 2

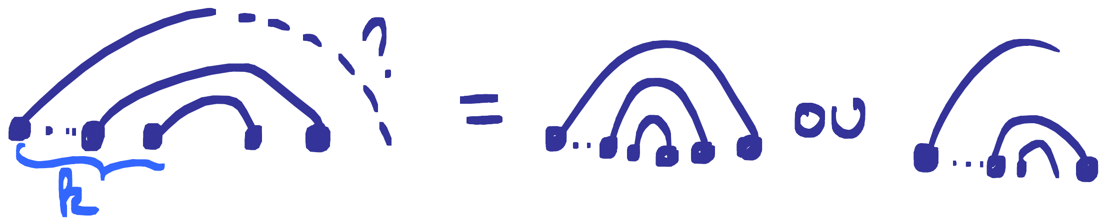


Appariements

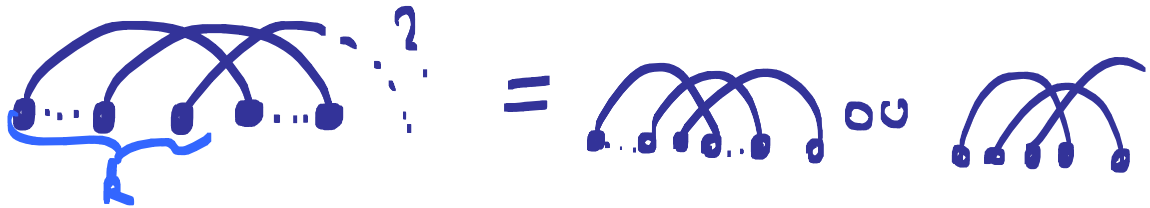
3



embôtement d'ordre k = sous-diagramme de la forme



croisement d'ordre k = sous-diagramme de la forme

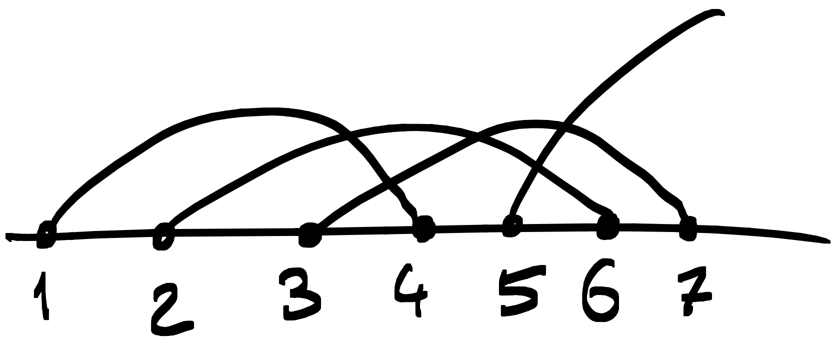


CONJECTURE DE BURRILL

Conjecture L'ensemble des tableaux de Young standards de taille n et de hauteur bornée par $2k$ est en bijection avec l'ensemble des diagrammes d'appariements ouverts de taille n sans emboîtement d'ordre $(k+1)$.

7	6	5	3
4	2	1	

$\overset{?}{\longleftrightarrow}$

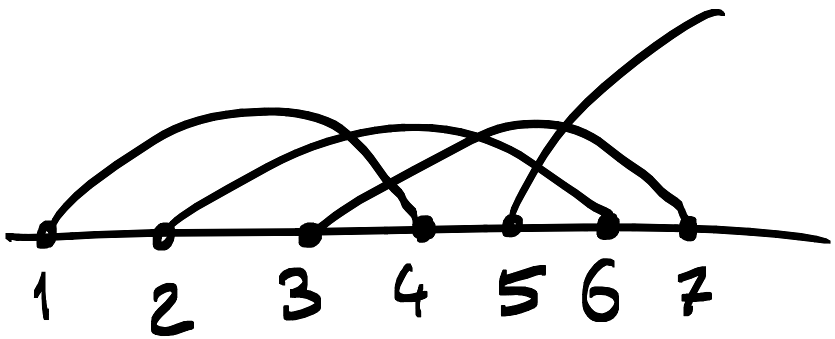


CONJECTURE DE BURRILL

Conjecture L'ensemble des tableaux de Young standards de taille n et de hauteur bornée par $2k$ est en bijection avec l'ensemble des diagrammes d'appariements ouverts de taille n sans ~~emboîtement~~ d'ordre $(k+1)$.
croisement ?

7	6	5	3
4	2	1	

$\overset{?}{\longleftrightarrow}$



1 BIJECTION

DE CHEN, DENG,

DU, STANLEY, YAN

MARCHES DANS LE TREILLIS DE YOUNG

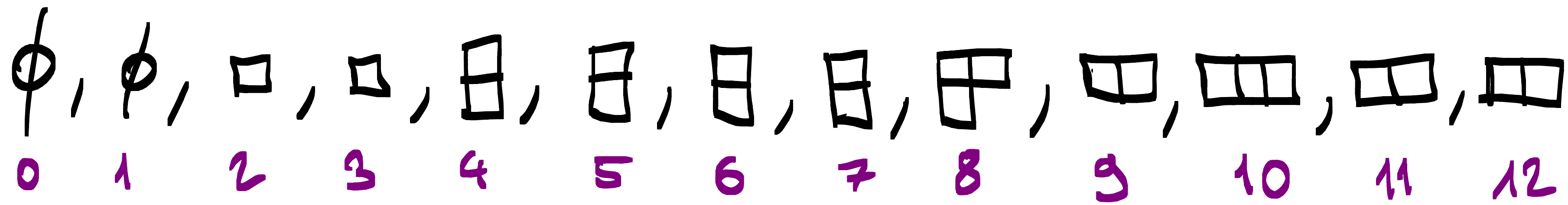
tableau = suite (finie) de diagrammes de Ferrer telle qu'entre deux diagrammes consécutifs, une case a été ajoutée ou supprimée ou rien.

Un tableau commence par le diagramme vide.

tableau vacillant = tableau $(\lambda_0, \dots, \lambda_{2n})$ où

$$\lambda_0 \geq \lambda_1 \leq \lambda_2 \geq \lambda_3 \leq \dots \geq \lambda_{2n-1} \leq \lambda_{2n}$$

Ex :



MARCHES DANS LE TREILLIS DE YOUNG

tableau = suite (finie) de diagrammes de Ferrer telle qu'entre deux diagrammes consécutifs, une case a été ajoutée ou supprimée ou rien.

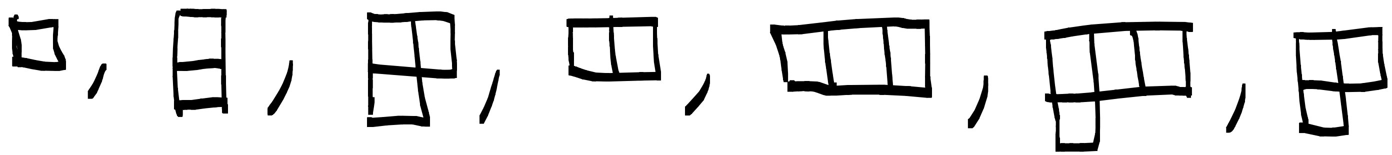
Un tableau commence par le diagramme vide.

tableau vacillant = tableau $(\lambda_0, \dots, \lambda_{2n})$ où

$$\lambda_0 \geq \lambda_1 \leq \lambda_2 \geq \lambda_3 \leq \dots \geq \lambda_{2n-1} \leq \lambda_{2n}$$

tableau oscillant = tableau $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ où

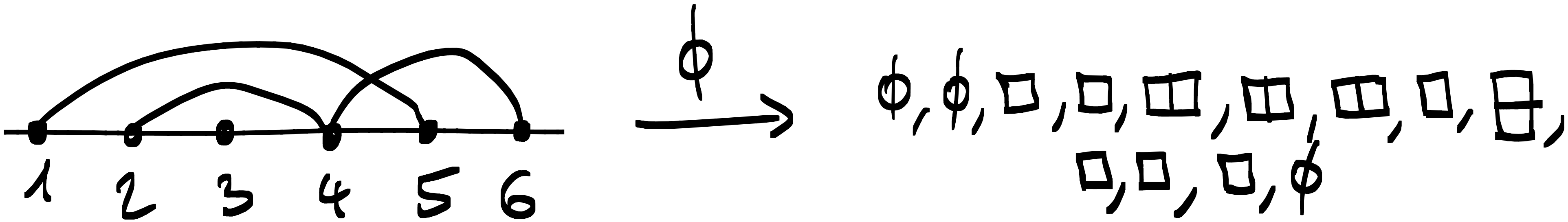
$$\lambda_i \neq \lambda_{i+1} .$$

Ex: $\emptyset$, 

CHEN, DENG, DU, STANLEY, YAN

<u>Théorème</u> : Il existe une bijection ϕ entre diagrammes d'arcs (de partition d'ensemble) et tableaux vacillants terminant par le diagramme vide.

- ordre maximal d'emboîtement d'un diagramme π = largeur maximale dans $\phi(\pi)$
- ordre maximal de croisement d'un diagramme π = hauteur maximale dans $\phi(\pi)$.

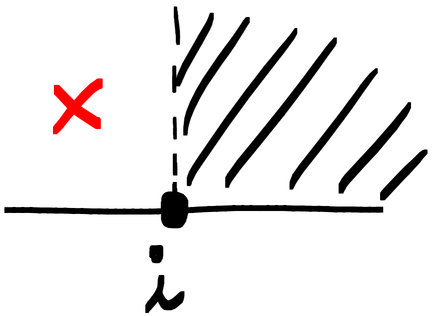


RÈGLES DU JEU

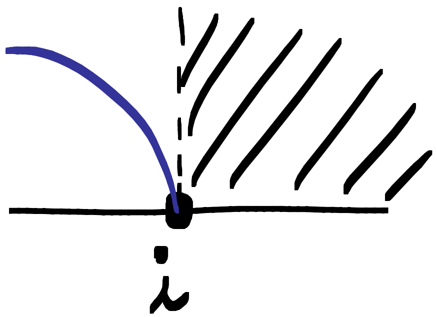
diagramme $\longrightarrow$ suite de tableaux de Young

On lit le diagramme de gauche à droite.

1. Extrémité droite ou non?

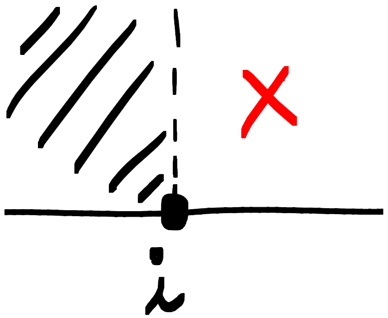


On ne fait rien.

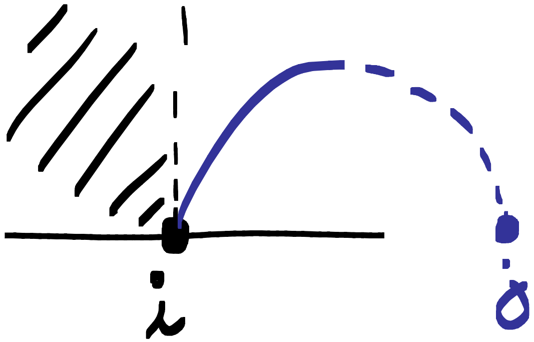


On supprime i du précédent tableau
(c'est forcément un coin)

2. Extrémité gauche ou non?



On ne fait rien.



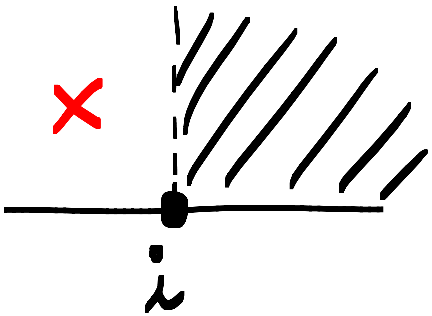
On insère j dans le tableau précédent comme dans RSK.
(pour l'ordre décroisant)

RÈGLES DU JEU

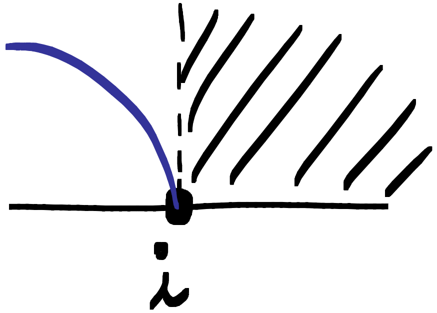
diagramme $\longrightarrow$ suite de tableaux de Young

On lit le diagramme de gauche à droite.

1. Extrémité droite ou non ?

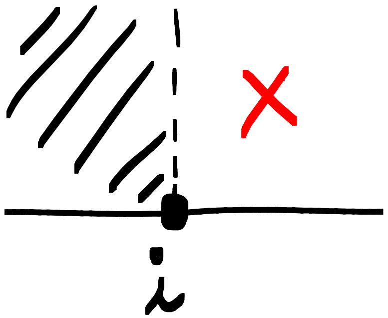


On ne fait rien.

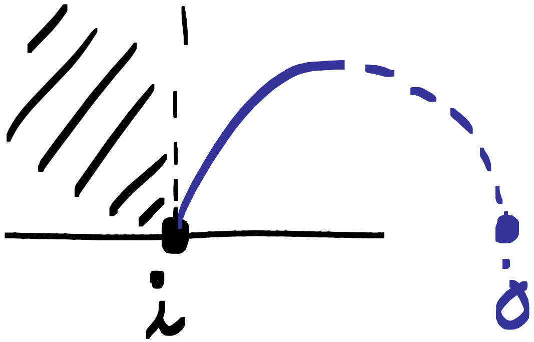


On supprime i du précédent tableau (c'est forcément un coin)

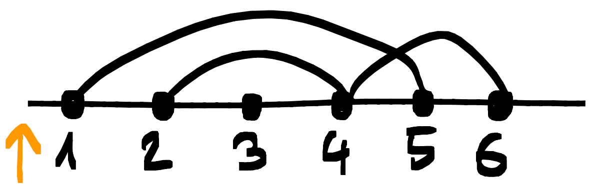
2. Extrémité gauche ou non ?



On ne fait rien.



On insère j dans le tableau précédent comme dans RSK. (pour l'ordre décroissant)



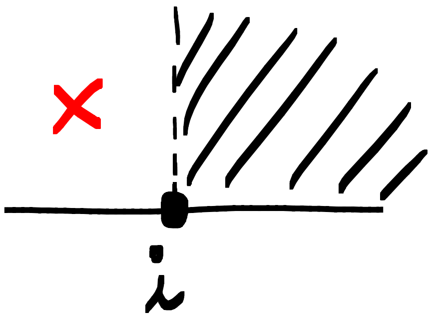
$\emptyset$,

RÈGLES DU JEU

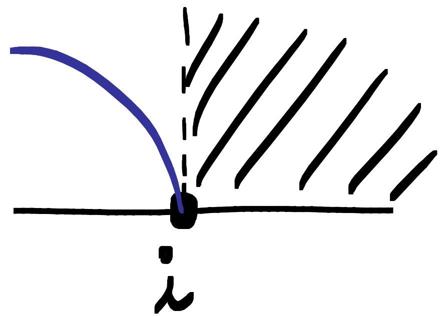
diagramme $\longrightarrow$ suite de tableaux de Young

On lit le diagramme de gauche à droite.

1. Extrémité droite ou non?

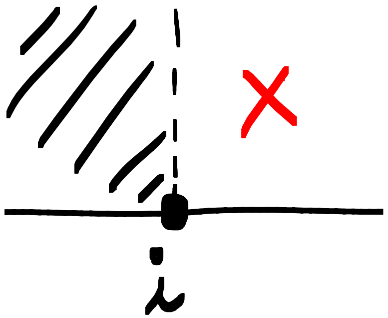


On ne fait rien.

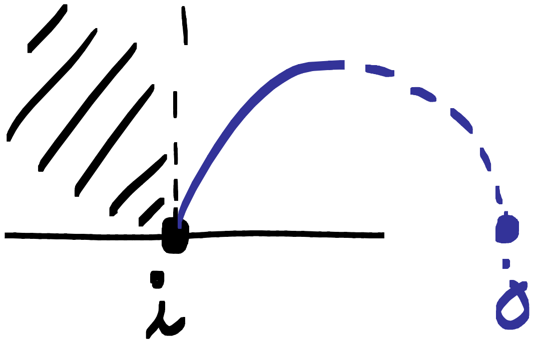


On supprime i du précédent tableau (c'est forcément un coin)

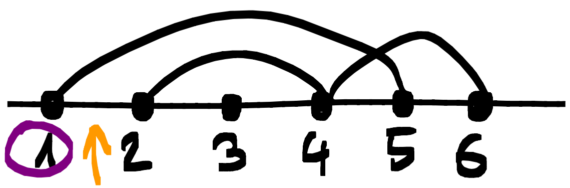
2. Extrémité gauche ou non?



On ne fait rien.



On insère j dans le tableau précédent comme dans RSK. (pour l'ordre décroissant)



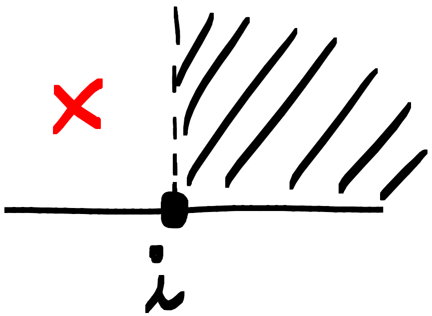
$\emptyset$, $\emptyset$, $\boxed{5}$

RÈGLES DU JEU

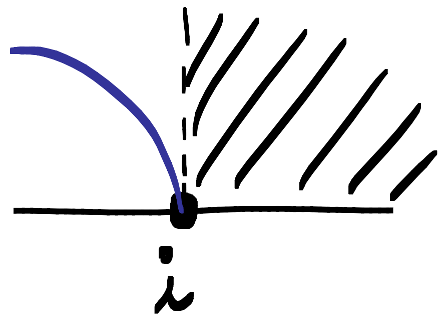
diagramme $\longrightarrow$ suite de tableaux de Young

On lit le diagramme de gauche à droite.

1. Extrémité droite ou non?

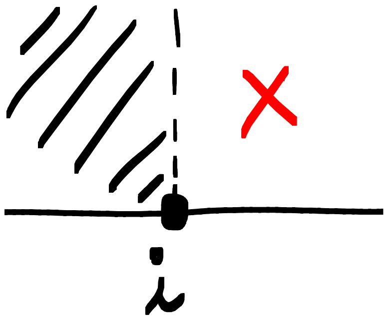


On ne fait rien.

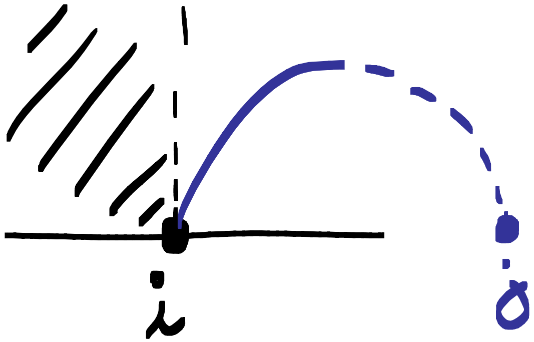


On supprime i du précédent tableau
(c'est forcément un coin)

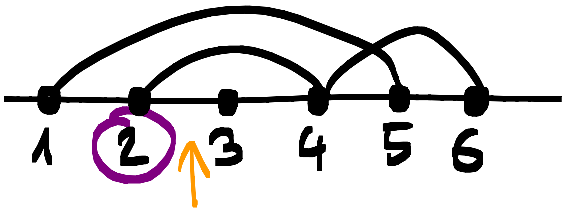
2. Extrémité gauche ou non?



On ne fait rien.



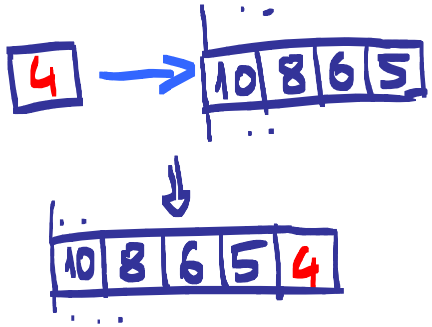
On insère j dans le tableau précédent comme dans RSK.
(pour l'ordre décroissant)



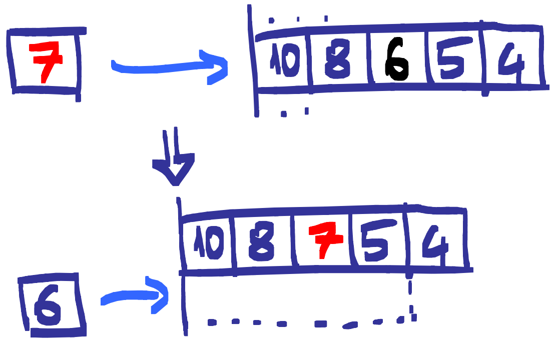
$\emptyset, \emptyset, \boxed{5}, \boxed{5}, ?$

Insertion RSK

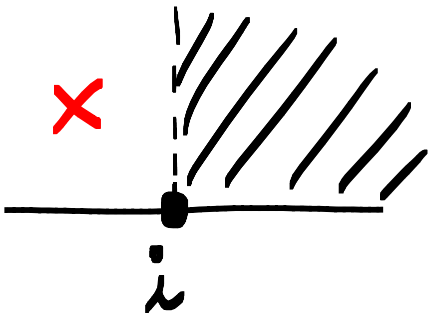
* Si + petit de la ligne,



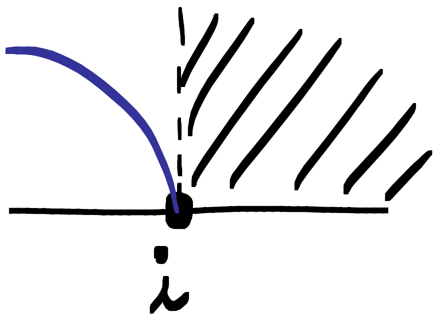
* Sinon,



1. Extrémité droite ou non?

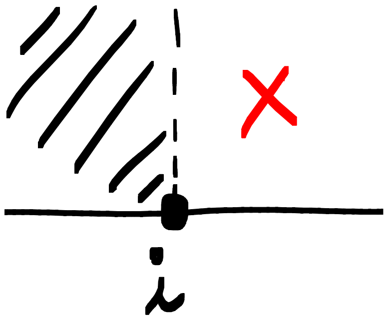


On ne fait rien.

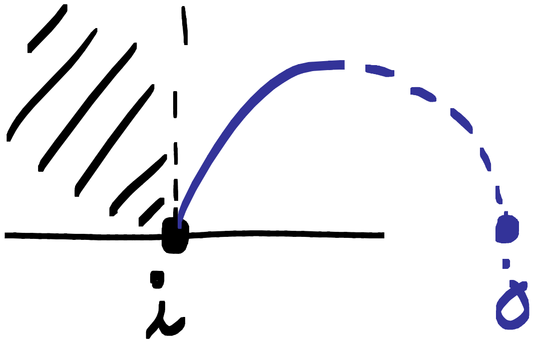


On supprime i du précédent tableau
(c'est forcément un coin)

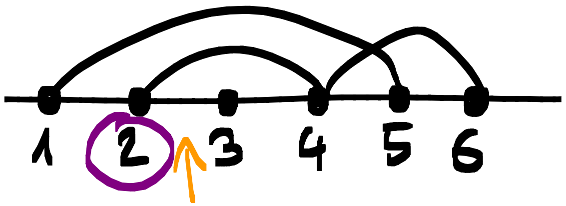
2. Extrémité gauche ou non?



On ne fait rien.



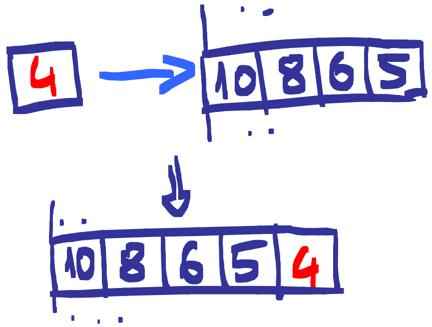
On insère j dans le tableau précédent comme dans RSK.
(pour l'ordre décroissant)



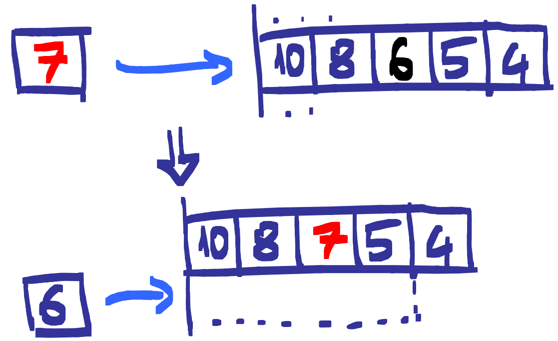
$\emptyset, \emptyset, \boxed{5}, \boxed{5}, \boxed{5 \mid 4}$

Insertion RSK

* Si + petit de la ligne,

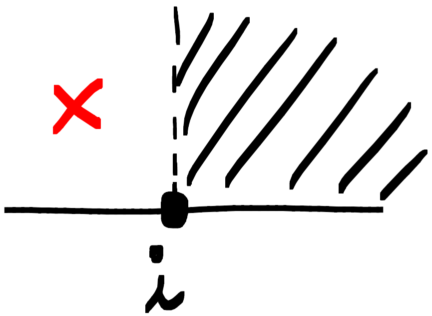


* Sinon,

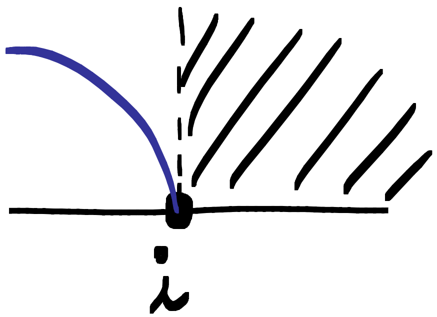


---

1. Extrémité droite ou non?

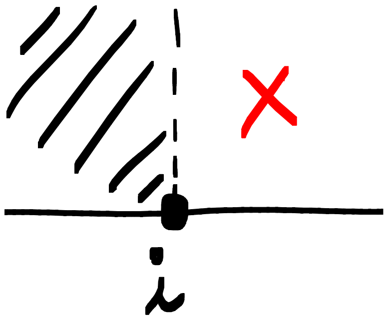


On ne fait rien.

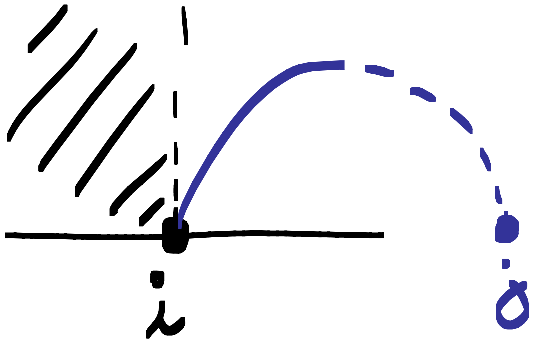


On supprime i du précédent tableau (c'est forcément un coin)

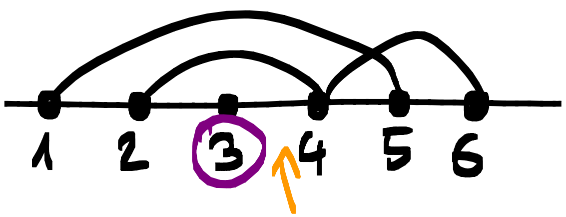
2. Extrémité gauche ou non?



On ne fait rien.



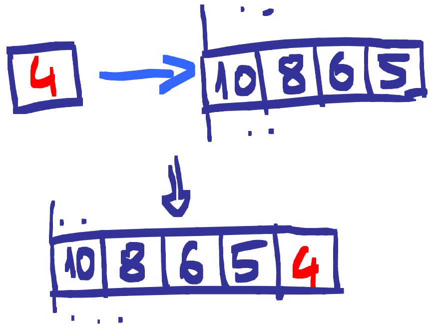
On insère j dans le tableau précédent comme dans RSK. (pour l'ordre décroissant)



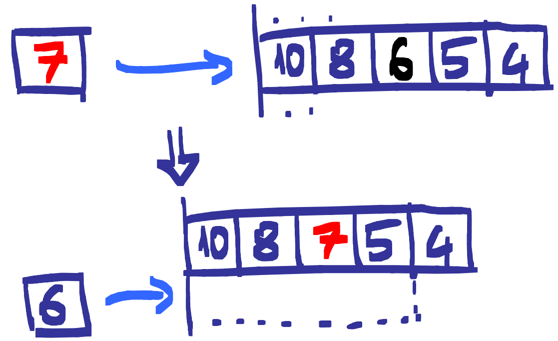
$\emptyset, \emptyset, \boxed{5}, \boxed{5}, \boxed{5\,|\,4}, \boxed{5\,|\,4}, \boxed{5\,|\,4}$

Insertion RSK

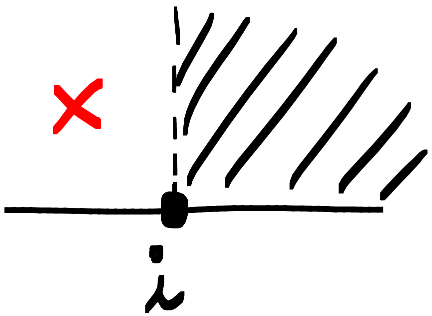
* Si + petit de la ligne,



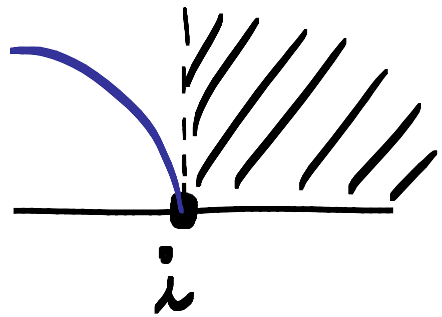
* Sinon,



1. Extrémité droite ou non?

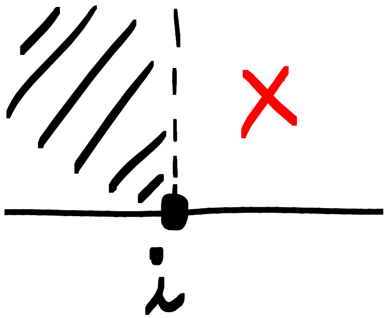


On ne fait rien.

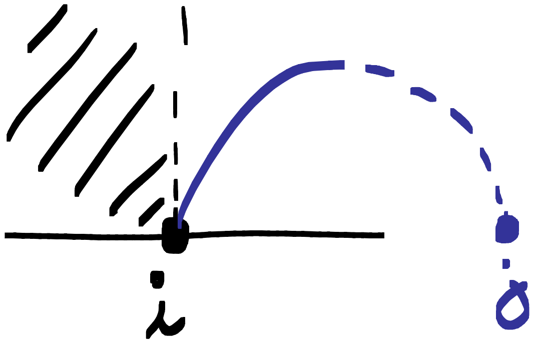


On supprime i du précédent tableau (c'est forcément un coin)

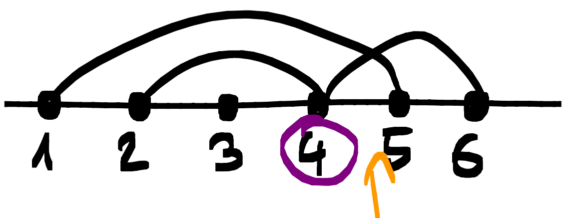
2. Extrémité gauche ou non?



On ne fait rien.



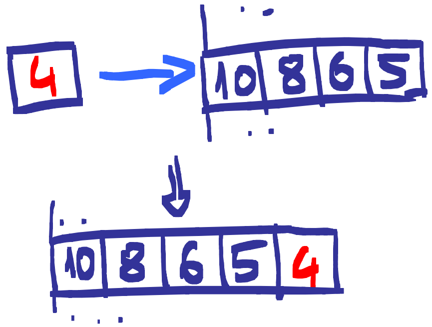
On insère j dans le tableau précédent comme dans RSK. (pour l'ordre décroissant)



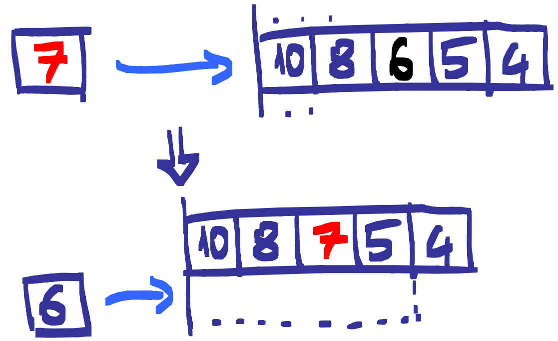
$\emptyset, \emptyset, \boxed{5}, \boxed{5}, \boxed{5\,|\,4}, \boxed{5\,|\,4}, \boxed{5\,|\,4}, \boxed{5}, \begin{array}{|c|}\hline 6 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}$

Insertion RSK

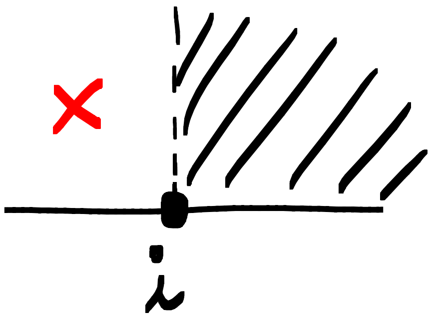
* Si + petit de la ligne,



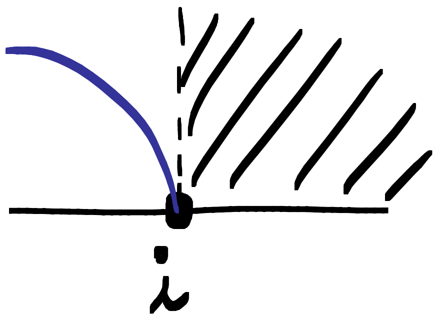
* Sinon,



1. Extrémité droite ou non?

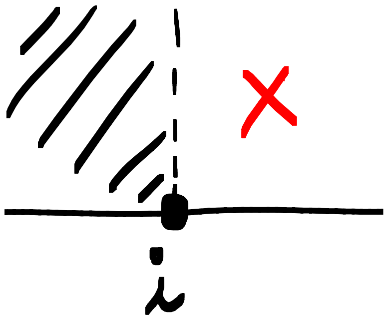


On ne fait rien.

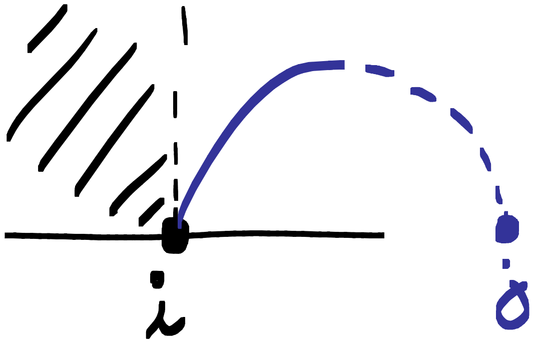


On supprime i du précédent tableau (c'est forcément un coin)

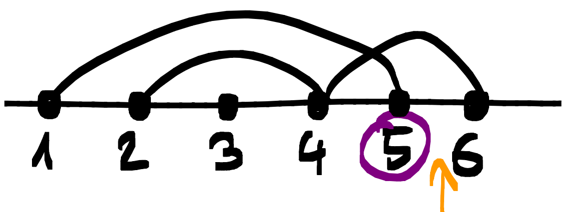
2. Extrémité gauche ou non?



On ne fait rien.



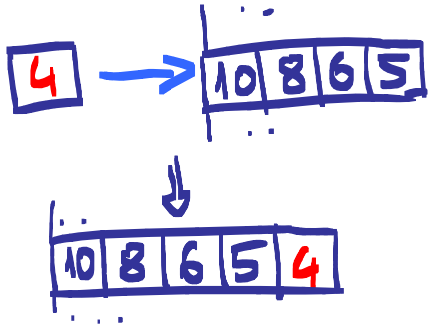
On insère j dans le tableau précédent comme dans RSK. (pour l'ordre décroissant)



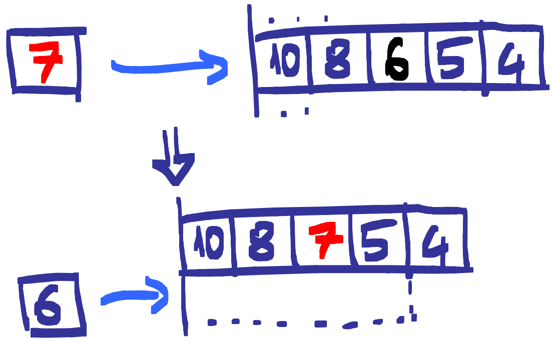
$\emptyset, \emptyset, \boxed{5}, \boxed{5}, \begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 4\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 4\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 4\\ \hline\end{array}, \boxed{5}, \begin{array}{|c|}\hline 6\\ \hline 5\\ \hline\end{array}, \boxed{6}, \boxed{6}$

Insertion RSK

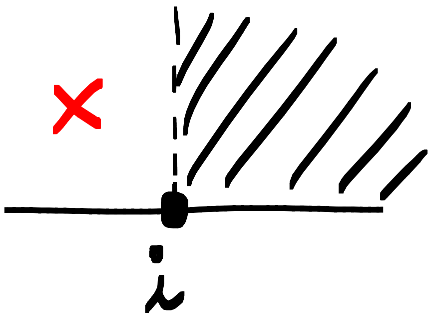
* Si + petit de la ligne,



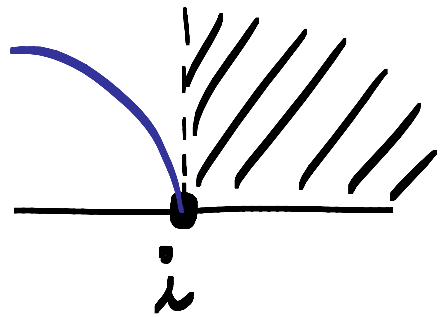
* Sinon,



1. Extrémité droite ou non?

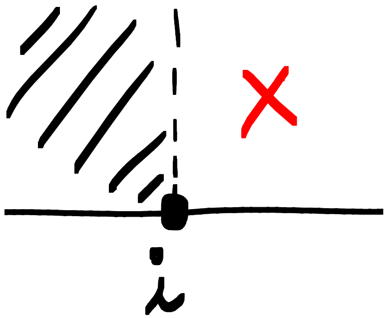


On ne fait rien.

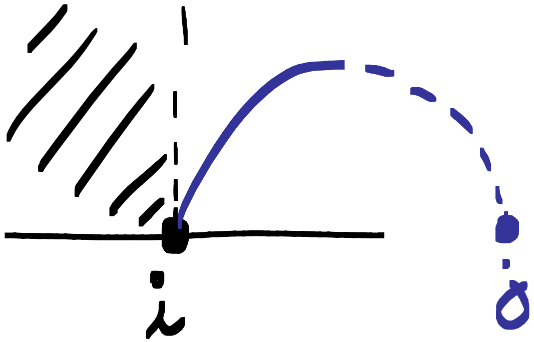


On supprime i du précédent tableau (c'est forcément un coin)

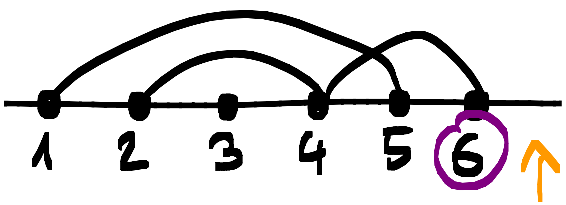
2. Extrémité gauche ou non?



On ne fait rien.

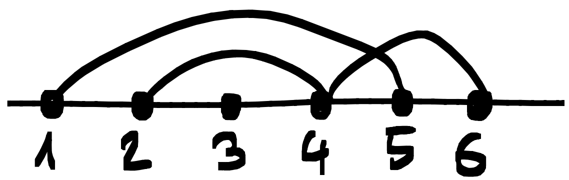


On insère j dans le tableau précédent comme dans RSK. (pour l'ordre décroissant)



$\emptyset, \emptyset, \boxed{5}, \boxed{5}, \boxed{5|4}, \boxed{5|4}, \boxed{5|4}, \boxed{5}, \begin{array}{|c|}\hline 6 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}, \boxed{6}, \boxed{6}, \emptyset, \emptyset$

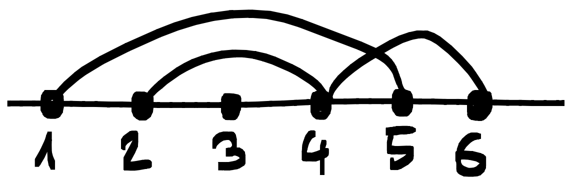
BIJECTION, SUITE ET FIN.



ce qu'on a fait

$$\emptyset,\ \emptyset,\ \boxed{5},\ \boxed{5},\ \boxed{5}\!\boxed{4},\ \boxed{5}\!\boxed{4},\ \boxed{5}\!\boxed{4},\ \boxed{5},\ \begin{array}{|c|}\hline 6\\\hline 5\\\hline\end{array},\ \boxed{6},\ \boxed{6},\ \emptyset,\ \emptyset$$

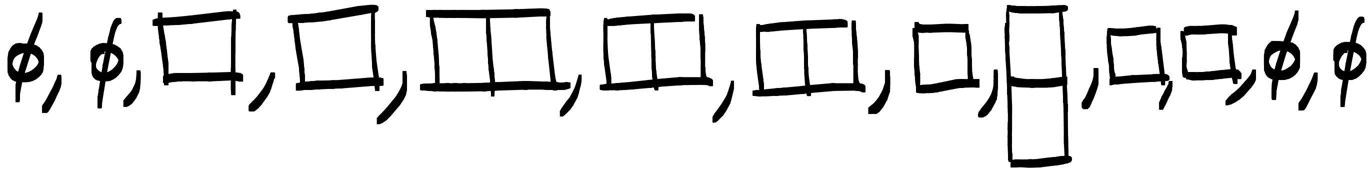
BIJECTION, SUITE ET FIN.



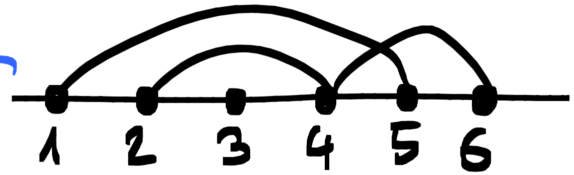
ce qu'on a fait

$$\emptyset,\ \emptyset,\ \boxed{5},\ \boxed{5},\ \boxed{5\,|\,4},\ \boxed{5\,|\,4},\ \boxed{5\,|\,4},\ \boxed{5},\ \boxed{\begin{matrix}6\\ \hline 5\end{matrix}},\ \boxed{6},\ \boxed{6},\ \emptyset,\ \emptyset$$

On oublie les nombres.



BIJECTION, SUITE ET FIN.



ce qu'on a fait

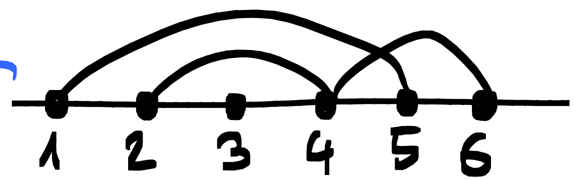
$$\emptyset, \emptyset, \boxed{5}, \boxed{5}, \boxed{5\,|\,4}, \boxed{5\,|\,4}, \boxed{5\,|\,4}, \boxed{5}, \begin{array}{|c|}\hline 6\\\hline 5\\\hline\end{array}, \boxed{6}, \boxed{6}, \emptyset, \emptyset$$

ϕ

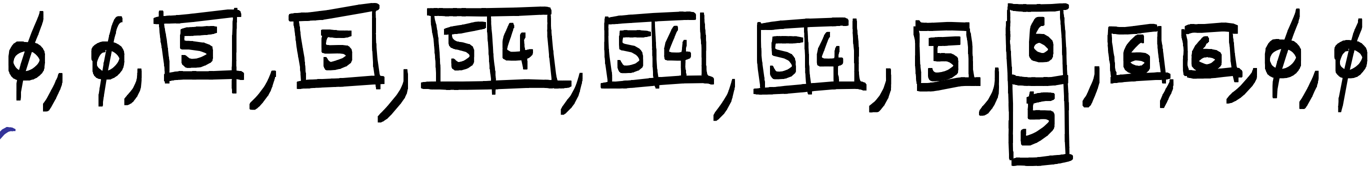
On oublie les nombres.

$$\emptyset, \emptyset, \square, \square, \square\square, \square\square, \square\square, \square, \begin{array}{|c|}\hline \ \\\hline \ \\\hline\end{array}, \square, \square, \emptyset, \emptyset$$

BIJECTION, SUITE ET FIN.

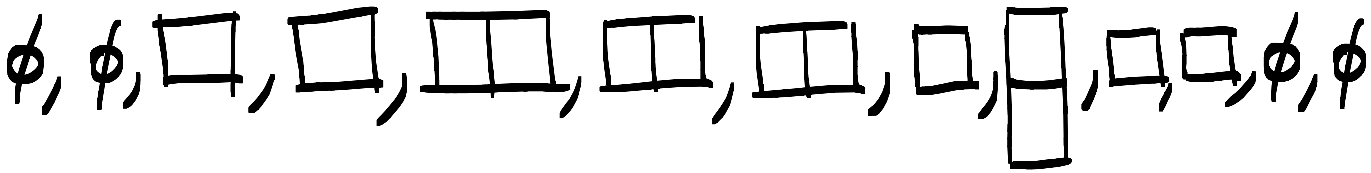


ce qu'on a fait



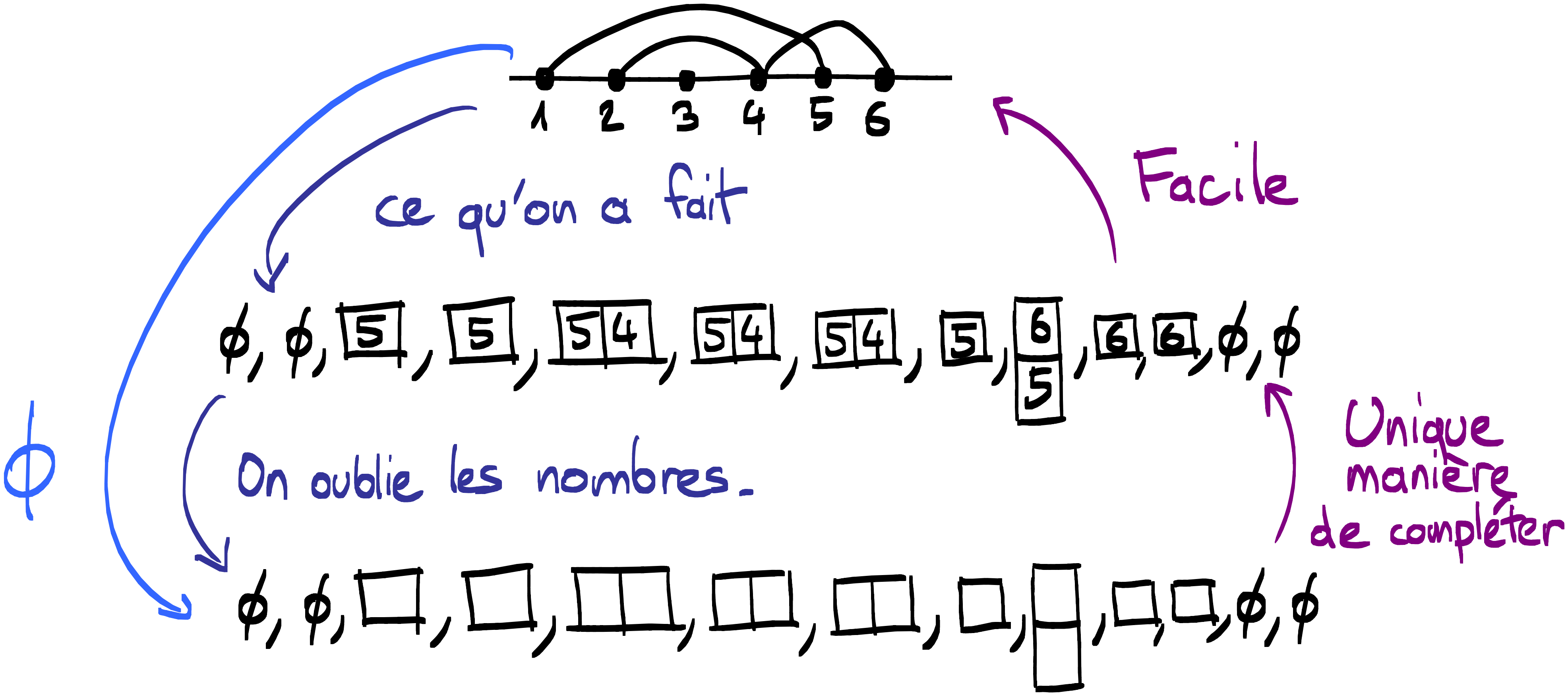
ϕ

On oublie les nombres.



ϕ bijective ?

BIJECTION, SUITE ET FIN.

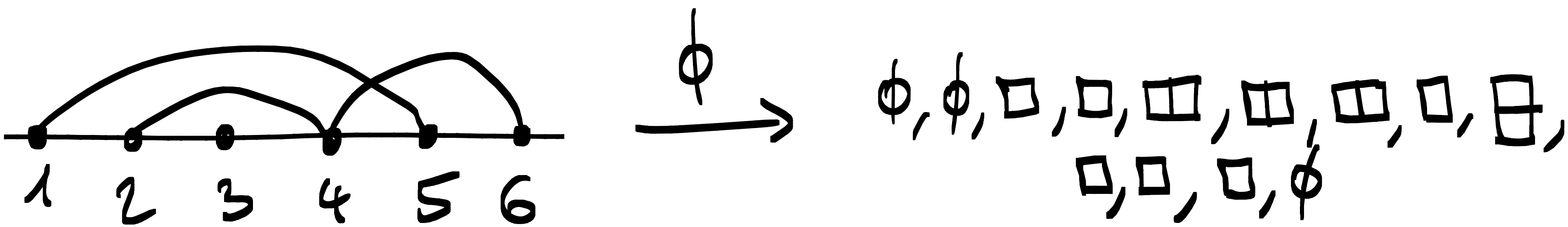


Φ bijective ? OUI.

CHEN, DENG, DU, STANLEY, YAN

Théorème : Il existe une bijection ϕ entre diagrammes d'arcs (de partition d'ensemble) et tableaux vacillants terminant par le diagramme vide.

- ordre maximal d'emboîtement d'un diagramme π $=$ largeur maximale dans $\phi(\pi)$
- ordre maximal de croisement d'un diagramme π $=$ hauteur maximale dans $\phi(\pi)$.



APPARIEMENTS ÇA MARCHE

<u>Corollaire 1</u> : ϕ induit une bijection entre les appariements et les tableaux oscillants.

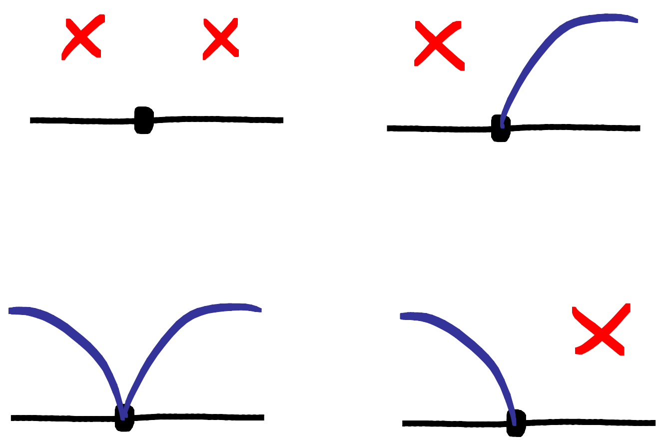
APPARIEMENTS ÇA MARCHE

<u>Corollaire 1</u> : ϕ induit une bijection entre les appariements et les tableaux oscillants.
(terminant sur le diagramme vide)

APPARIEMENTS ÇA MARCHE

Corollaire 1 : ϕ induit une bijection entre les appariements et les tableaux oscillants.

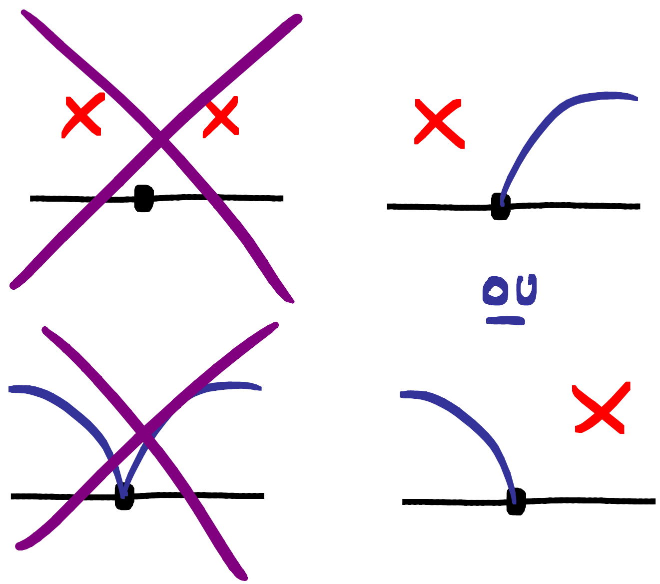
Dans les partitions d'ensemble



APPARIEMENTS CA MARCHE

<u>Corollaire 1</u> : ϕ induit une bijection entre les appariements et les tableaux oscillants.

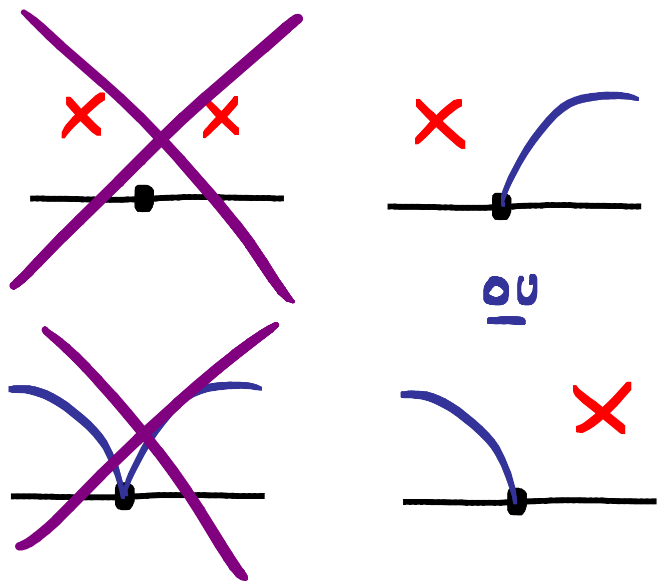
dans les appariements



APPARIEMENTS ÇA MARCHE

<u>Corollaire 1</u> : ϕ induit une bijection entre les appariements et les tableaux oscillants.

dans les appariements

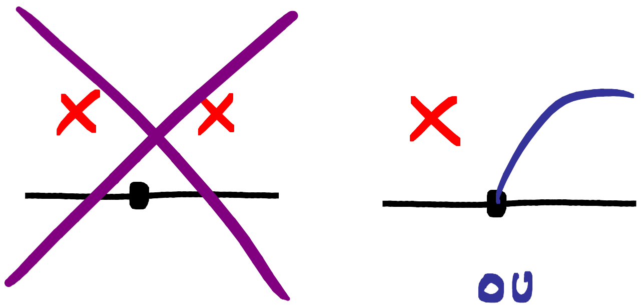
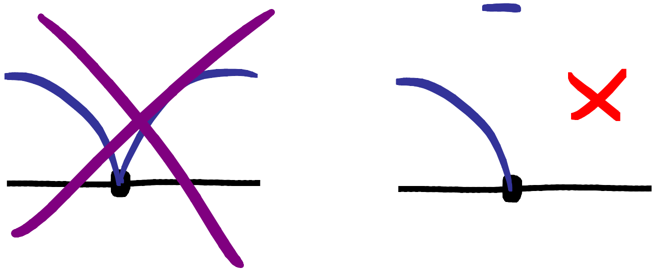


$\xrightarrow{\phi}$ $0, +1$

$\xrightarrow{\phi}$ $-1, 0$

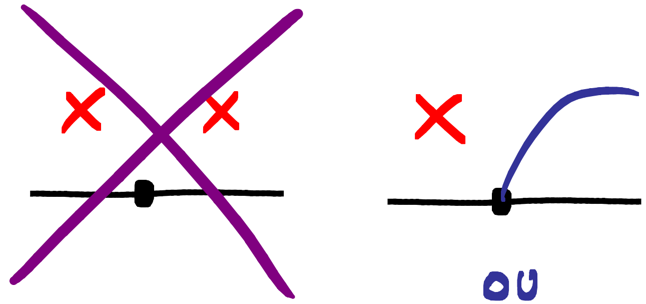
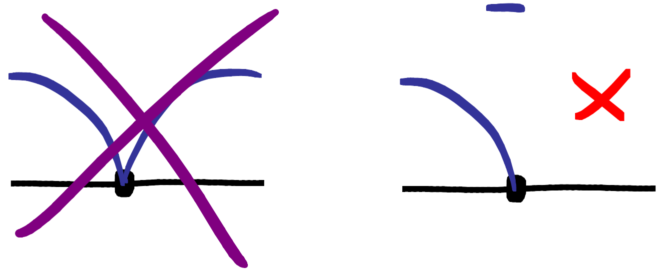
APPARIEMENTS CA MARCHE

Corollaire 1 : ϕ induit une bijection entre les appariements et les tableaux oscillants.

dans les appariements		dans les tableaux oscillants
	$\xrightarrow{\phi}$ 0, +1	+1
ou		ou
	$\xrightarrow{\phi}$ −1, 0	−1

APPARIEMENTS ÇA MARCHE

<u>Corollaire 1</u> : ϕ induit une bijection entre les appariements et les tableaux oscillants.

dans les appariements	dans les tableaux oscillants
 $\xrightarrow{\phi}$ $0, +1$ $\longleftrightarrow$	$+1$
<u>ou</u>	ou
 $\xrightarrow{\phi}$ $-1, 0$ $\longleftrightarrow$	-1

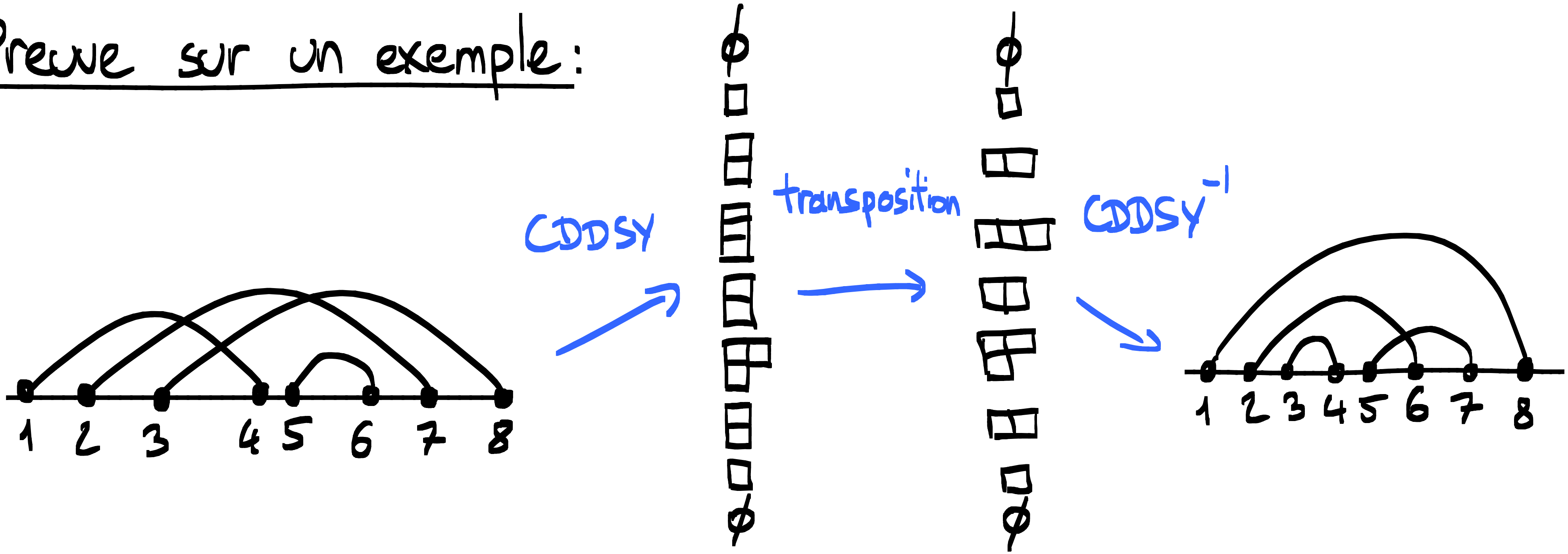
DISTRIBUTION SYMÉTRIQUE

<u>Corollaire 2</u>. Les statistiques "ordre maximal de croisement" et "ordre maximal d'emboîtement" ont des distributions symétriques.
(pour les partitions <u>et</u> les appariements)

DISTRIBUTION SYMÉTRIQUE

Corollaire 2. Les statistiques "ordre maximal de croisement" et "ordre maximal d'emboîtement" ont des distributions symétriques. (pour les partitions et les appariements)

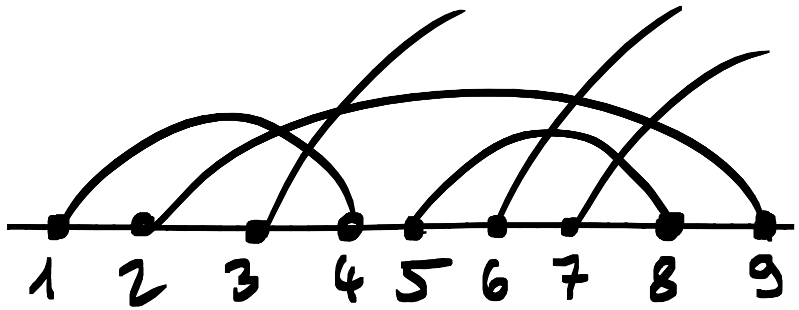
Preuve sur un exemple :



② CLASSES EN BIJECTION AVEC LES APPARIEMENTS OUVERTS

② CLASSE~~S~~ EN BIJECTION AVEC LES APPARIEMENTS OUVERTS

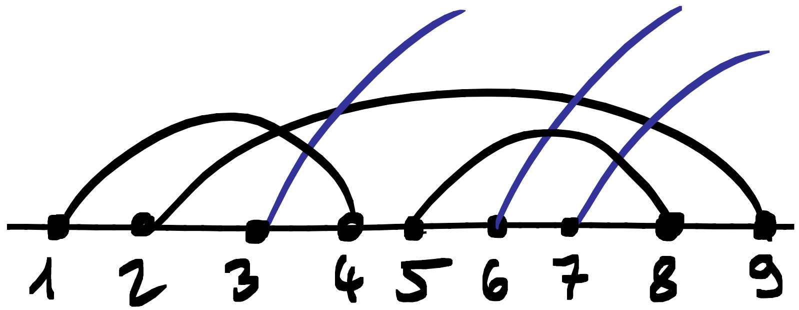
APPARIEMENTS OUVERTS $\longleftrightarrow$ TABLEAUX ?



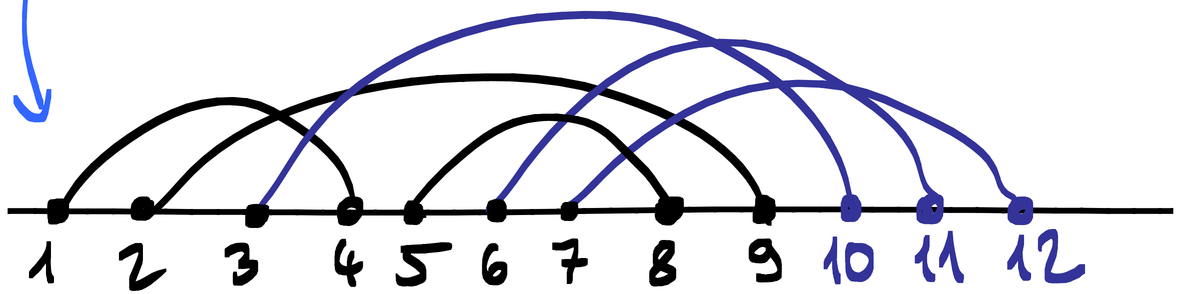
appariement ouvert sans emboîtement d'ordre 2

APPARIEMENTS OUVERTS ⟷ TABLEAUX ?

appariement
ouvert
sans emboîtement
d'ordre 2

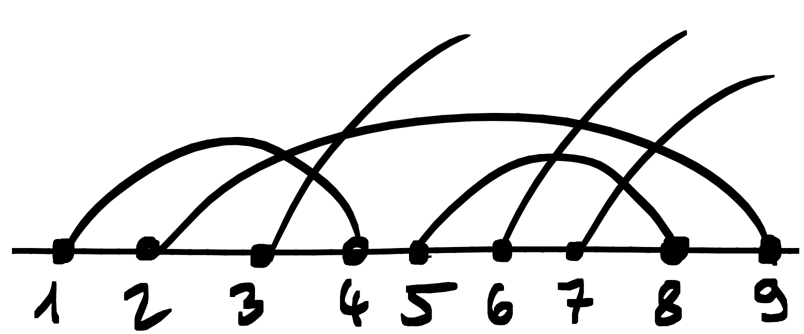


refermer
les arcs
ouverts
comme
un
croisement

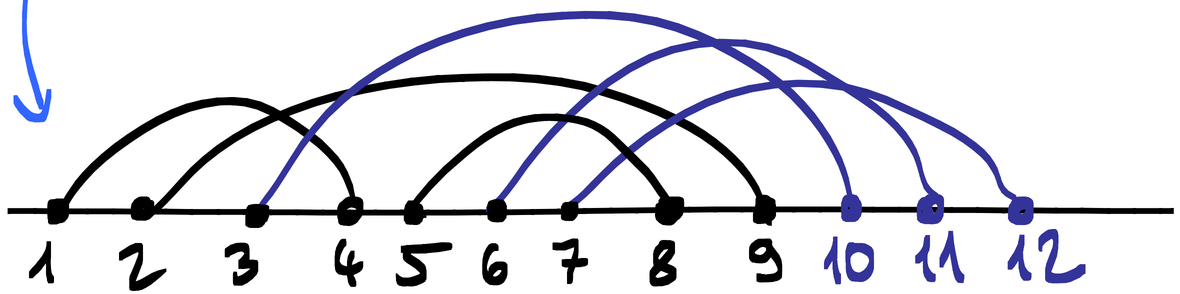


APPARIEMENTS OUVERTS ⟷ TABLEAUX ?

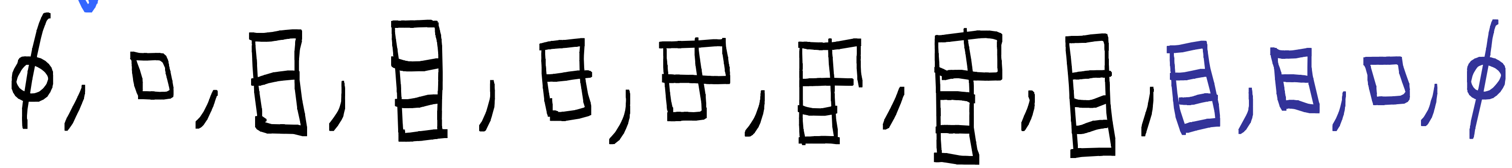
appariement ouvert sans emboîtement d'ordre 2



refermer les arcs ouverts comme un croisement

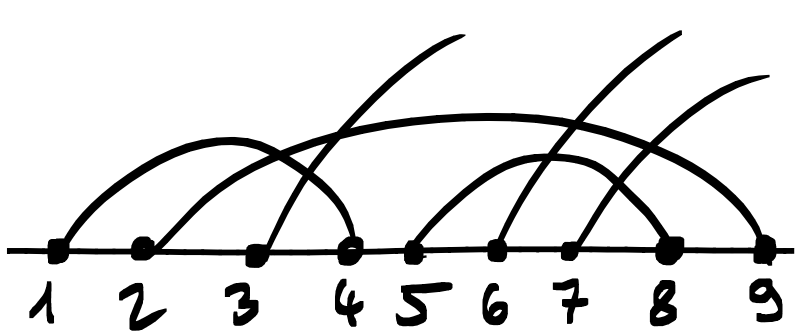


CDDSY

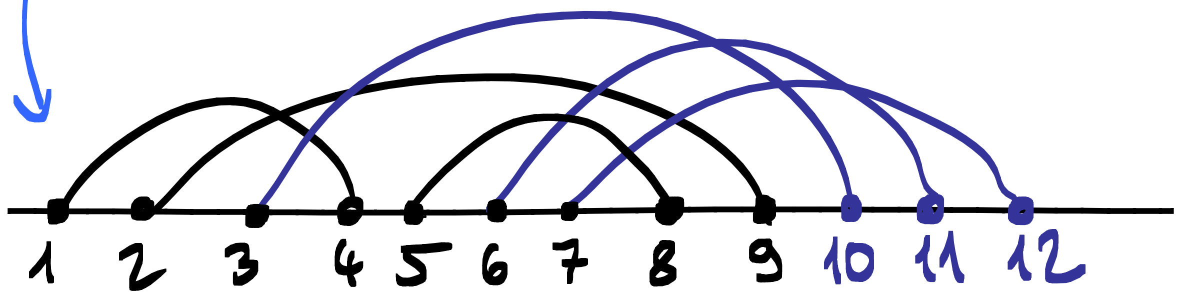


APPARIEMENTS OUVERTS ⟷ TABLEAUX ?

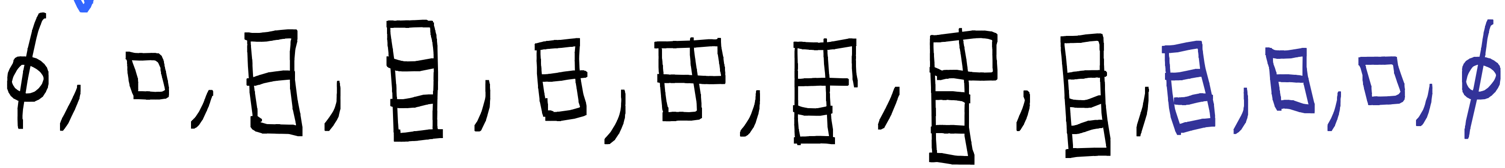
appariement ouvert sans emboîtement d'ordre 2



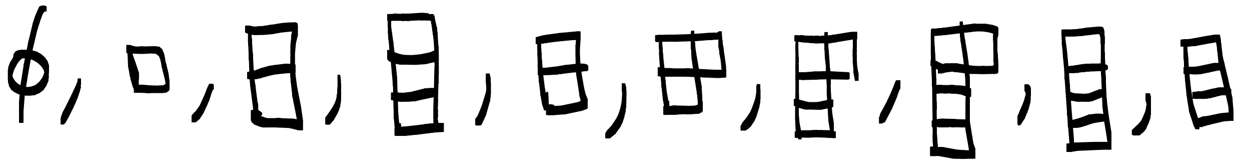
refermer les arcs ouverts comme un croisement



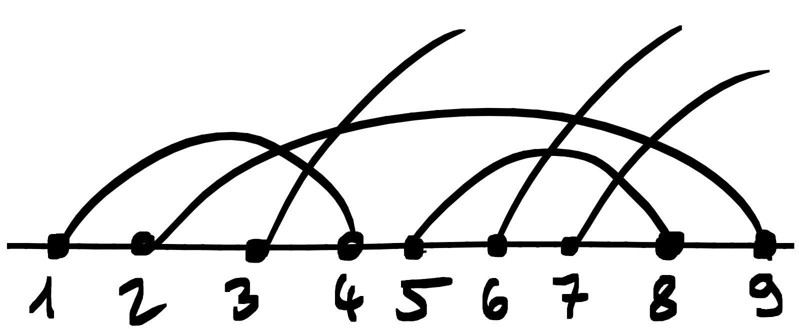
CDDSY



On oublie la fin.

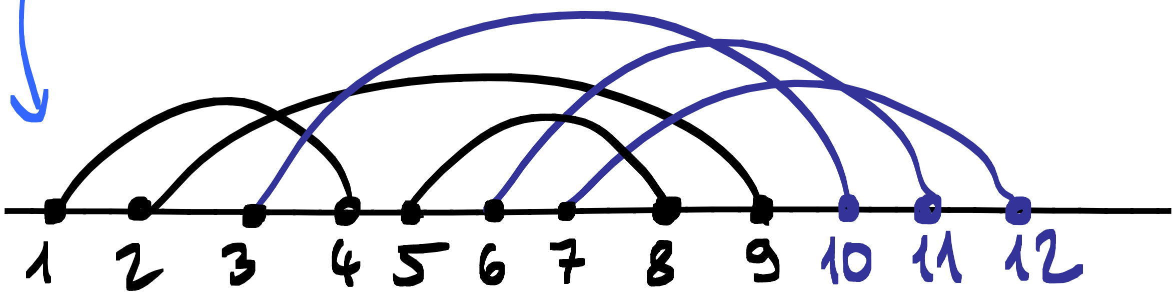


APPARIEMENTS OUVERTS ⟷ TABLEAUX ?

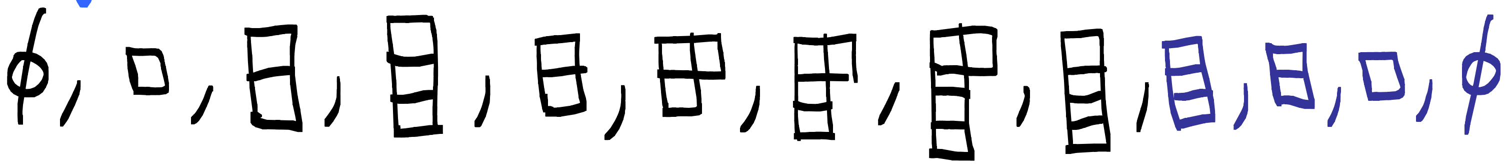


appariement ouvert sans emboîtement d'ordre 2

refermer les arcs ouverts comme un croisement



CDDSY



On oublie la fin.

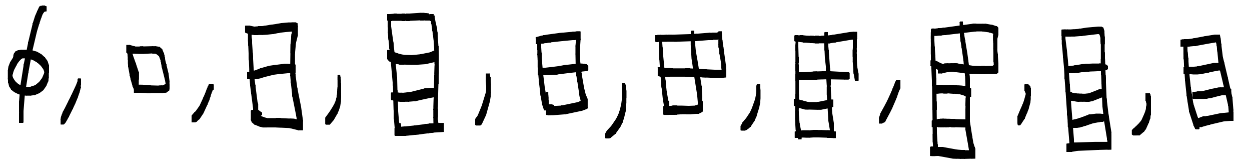
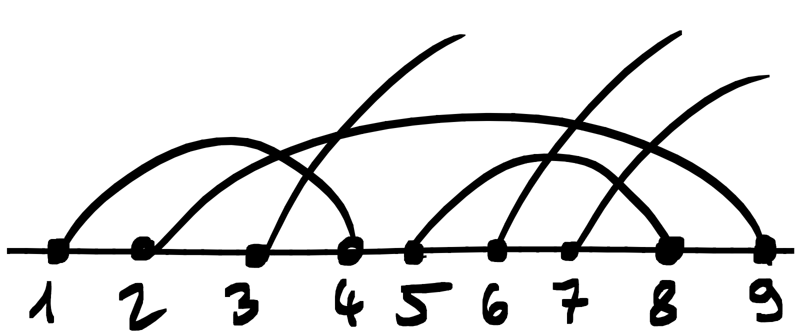


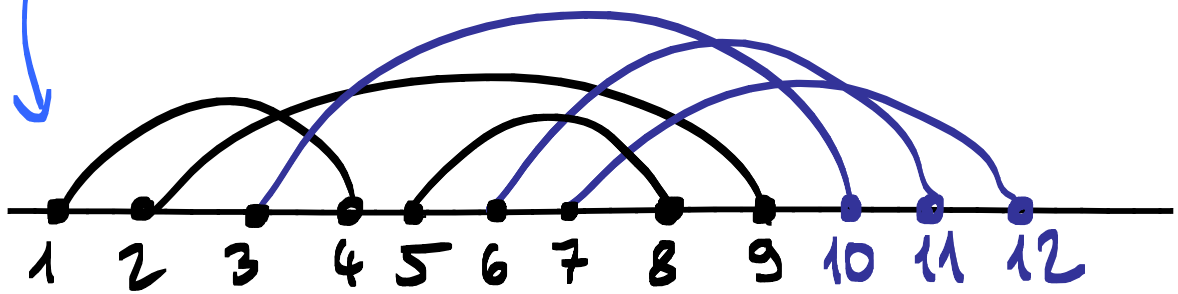
tableau oscillant de largeur ≤ 2 finissant sur une colonne

APPARIEMENTS OUVERTS $\hookrightarrow$ TABLEAUX ?

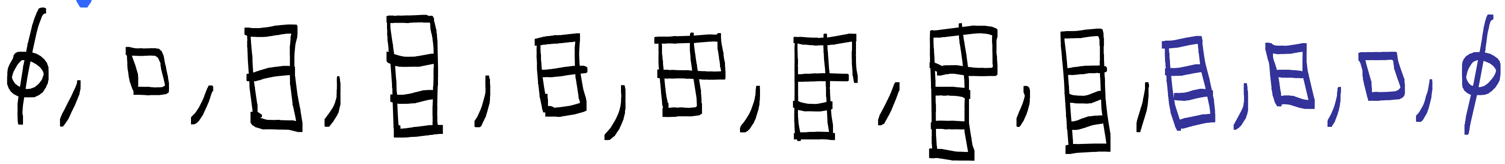


appariement ouvert sans emboîtement d'ordre 3 avec 3 arcs ouverts

refermer les arcs ouverts comme un croisement



CDDSY



On oublie la fin.

tableau oscillant de largeur ≤ 2 finissant sur

EMBOÎTEMENT $\leftrightarrow$ CROISEMENT ?

Proposition: Les classes suivantes sont en bijection :

(i) les appariements ouverts de taille n avec m arcs ouverts sans emboîtement d'ordre $k+1$

(ii) les tableaux oscillants de taille n terminant sur une colonne à m cases de largeur bornée par k.

EMBOÎTEMENT $\leftrightarrow$ CROISEMENT ?

Proposition: Les classes suivantes sont en bijection :

(i) les appariements ouverts de taille n avec m arcs ouverts sans emboîtement d'ordre $k+1$

(ii) les tableaux oscillants de taille n terminant sur une colonne à m cases de largeur bornée par k.

transpo $\updownarrow$

(ii) les tableaux oscillants de taille n terminant sur une ligne à m cases de hauteur bornée par k.

EMBOÎTEMENT ↔ CROISEMENT ?

Proposition: Les classes suivantes sont en bijection :

(i) les appariements ouverts de taille n avec m arcs ouverts sans emboîtement d'ordre k+1

(ii) les tableaux oscillants de taille n terminant sur une colonne à m cases de largeur bornée par k.

transpo ↕

(ii') les tableaux oscillants de taille n terminant sur une ligne à m cases de hauteur bornée par k.

ce qui précède adapté ↕

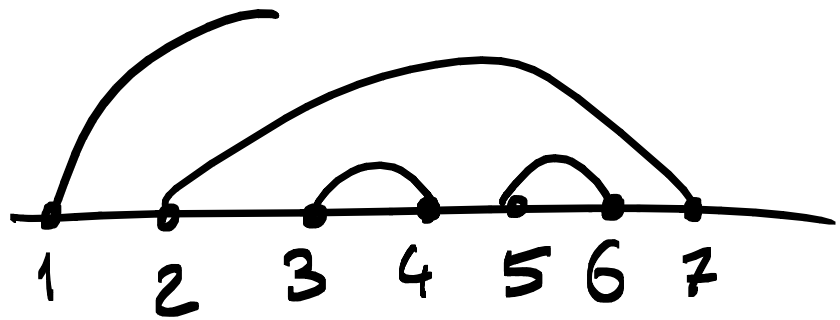
(iii) les appariements ouverts de taille n avec m arcs ouverts sans croisement d'ordre k+1

CONJECTURE DE BURRILL 2.0.

Conjecture L'ensemble des tableaux de Young standards de taille n et de hauteur bornée par $2k$ est en bijection avec l'ensemble des diagrammes d'appariements ouverts de taille n sans croisement d'ordre $(k+1)$.

7	6	5	3
4	2	1	

$\overset{?}{\longleftrightarrow}$



3 PREUVE DE LA CONJECTURE

RETOUR AU PARADIS

Tableaux de Young standards ;

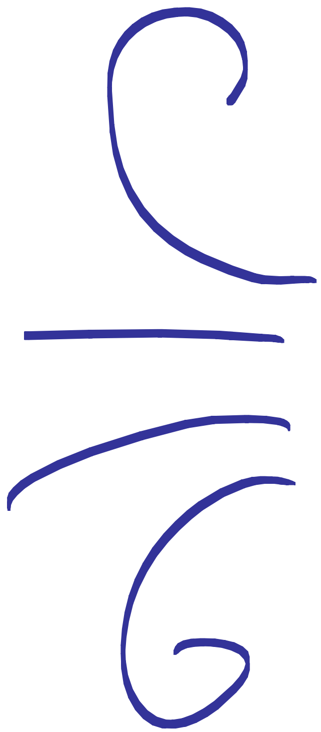
Appariements ouverts

RETOUR AU PARADIS

Tableaux de Young standards ;

Involutions

Appariements ouverts



RSK

ET RSK A DIT

Lemme [Correspondance de Robinson-Schendset-Knuth]

Les tableaux de Young standards de taille n de hauteur k et avec m colonnes de longueur impaires sont en bijection avec les involutions avec m points fixes telles que la plus longue sous-suite décroissante est de longueur k.

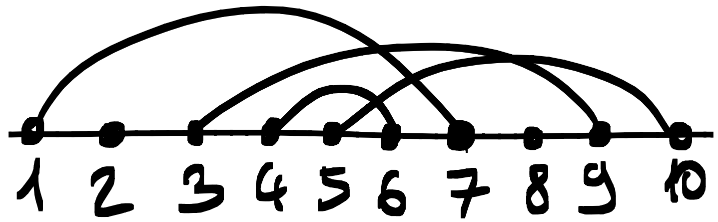
Si $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 8 \\ \hline 6 & 9 & 10 \\ \hline 7 & & \\ \cline{1-1} \end{array}$ alors $(T,T) \xrightarrow{RSK} (1\,7)(3\,9)(4\,6)(5\,10)$

soit

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 2 & 9 & 6 & 10 & 4 & 1 & 8 & 3 & 5 \end{matrix}$$

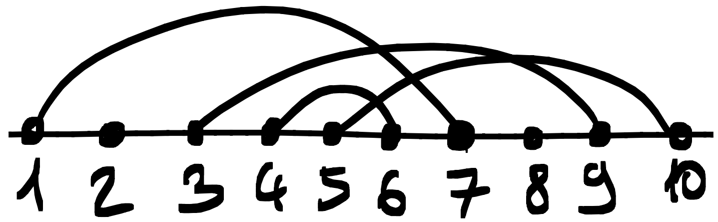
DIAGRAMMES D'INVOLUTION

$(1\,7)(3\,9)(4\,6)(5\,10) \longrightarrow$



DIAGRAMMES D'INVOLUTION

$(1\,7)(3\,9)(4\,6)(5\,10) \longrightarrow$

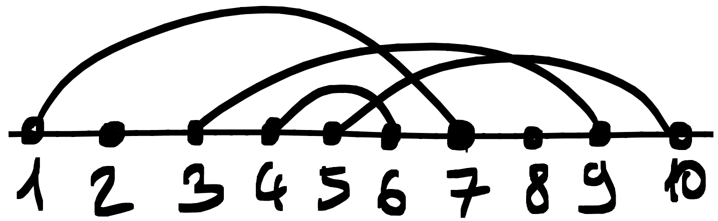


Question :

Longueur ℓ de la plus longue sous-suite décroissante $\rightarrow$?

DIAGRAMMES D'INVOLUTION

$(1\,7)(3\,9)(4\,6)(5\,10) \longrightarrow$

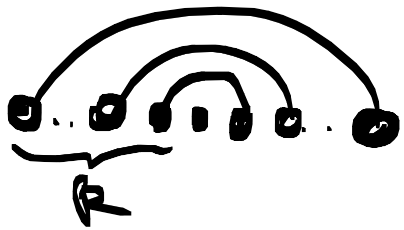


Question :

Longueur ℓ de la plus longue sous-suite décroissante $\rightarrow$?

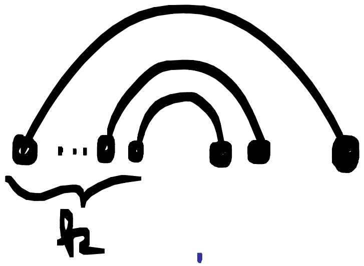
Rep : Si $\ell = 2k$, il existe un sous-diagramme de la forme

Si $\ell = 2k+1$, il existe un sous-diagramme de la forme

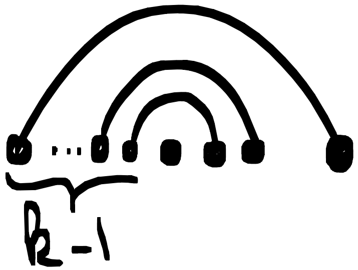


CONJECTURE 3.0

Involutions de taille n sans

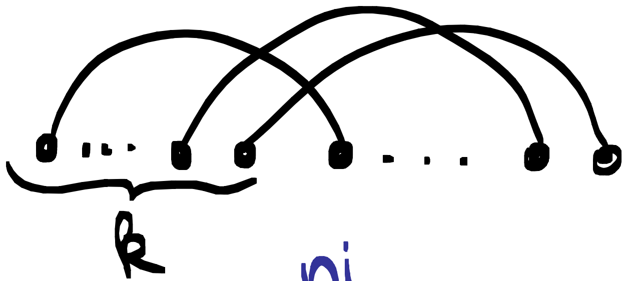


ni

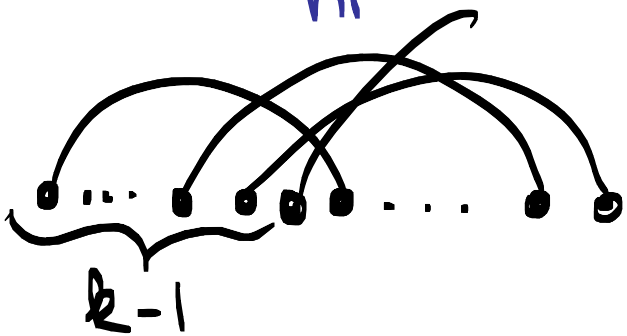


$\xleftrightarrow{\text{bijection?}}$

Appariements ouverts de taille n sans

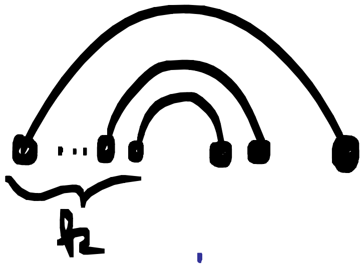


ni

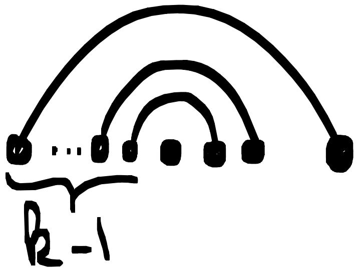


CONJECTURE 3.0

Involutions de taille n sans

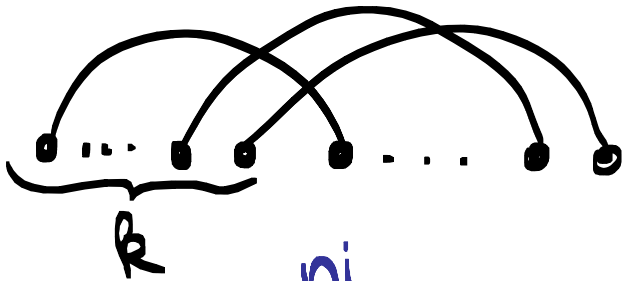


ni

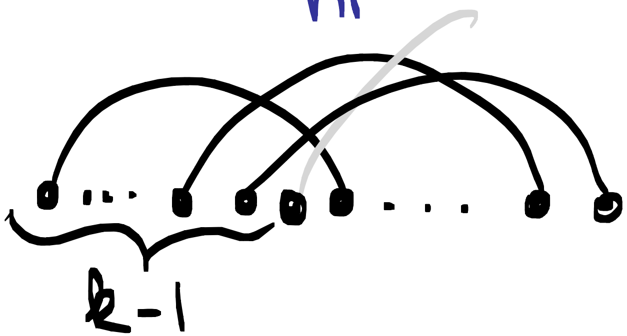


$$\xleftrightarrow{\text{bijection?}}$$

Appariements ouverts de taille n sans

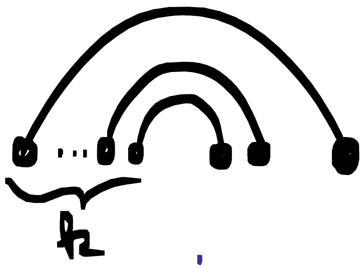


ni

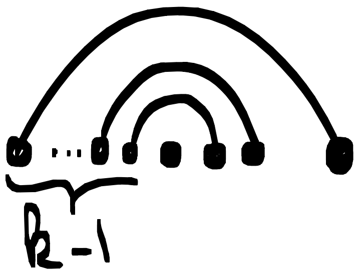


CONJECTURE 3.0

Involutions de taille n sans

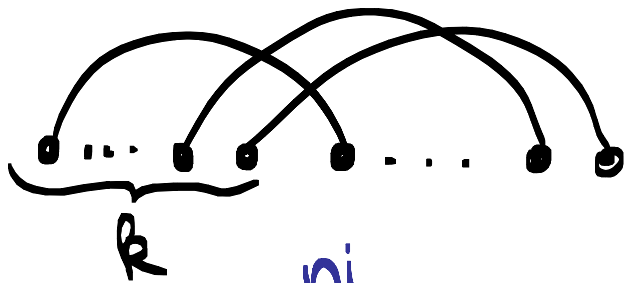


ni

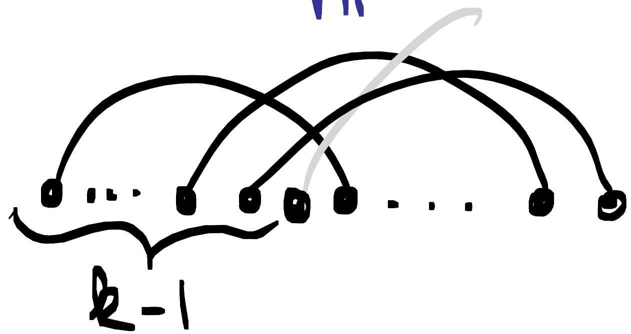


bijection!

Appariements ouverts de taille n sans



ni



CDDSY

transposition

CDDSY

tableaux vacillants

ENONCÉ FINAL

Théorème Les classes suivantes sont en bijection :

(i) les tableaux de Young de taille n, de hauteur inférieure ou égale à $2k$ et avec m colonnes de longueur impaire.

(ii) les involutions de taille n avec m points fixes et sans sous-suite décroissante de longueur $2k+1$

(iii) les appariements ouverts de taille n avec m arcs ouverts sans croisement d'ordre $k+1$

(iv) les tableaux oscillants de taille n de hauteur inférieure à k se terminant sur une ligne à m cases

(v) les appariements ouverts de taille n avec m arcs ouverts sans emboîtement d'ordre $k+1$

CE QUE J'AURAIS VOULU ÉGALEMENT RACONTER

→ Une distribution symétrique surprenante

→ Une conjecture sur les nombres de Baxter

→ Des preuves par séries génératrices.

MERCI ! MERCI ! MERCI !
MERCI !
MERCI ! MERCI !
MERCI ! MERCI ! MERCI !
MERCI ! MERCI ! MERCI ! MERCI !
MERCI ! MERCI ! MERCI !
MERCI ! MERCI ! MERCI !
MERCI !
MERCI ! MERCI ! MERCI ! MERCI ! MERCI !
MERCI ! MERCI !
MERCI ! MERCI ! MERCI ! MERCI ! MERCI !
MERCI ! MERCI ! MERCI ! MERCI ! MERCI !
MERCI ! MERCI !

UNE SYMÉTRIE SURPRENANTE

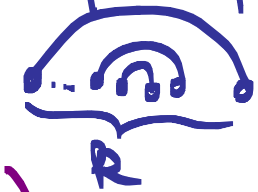
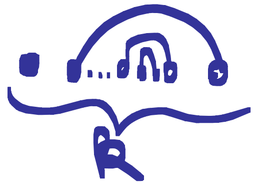
Deux statistiques sur les (diagrammes d') involutions :

→ la longueur de la plus longue sous-suite décroissante

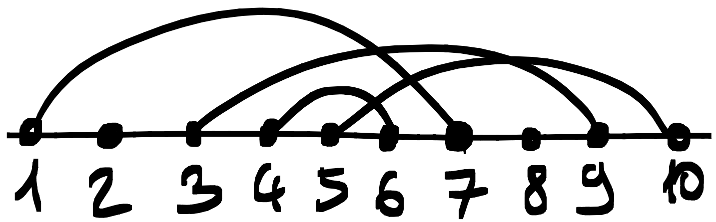
$=$ max $\{k \mid$  ou  sous-diagramme $\}$

$= \mathrm{lplsd}(-)$

→ la taille du plus grand emboîtement si chaque point fixe devient un arc ouvert

$=$ max $\{k \mid$  ou  sous-diagramme $\}$

$= \mathrm{embow}(-)$

Ex : $\pi =$ 

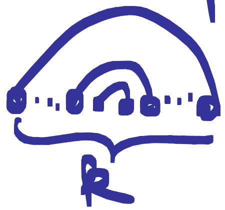
$\mathrm{lplsd}(\pi) = 4$

$\mathrm{embow}(\pi) = 5$

UNE SYMÉTRIE SURPRENANTE

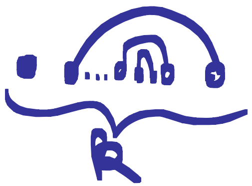
Deux statistiques sur les (diagrammes d') involutions :

→ la longueur de la plus longue sous-suite décroissante

= max { k |  ou  sous-diagramme }

= lplsd(-)

→ la taille du plus grand emboîtement si chaque point fixe devient un arc ouvert

= max { k |  ou  sous-diagramme }

= embouv(-)

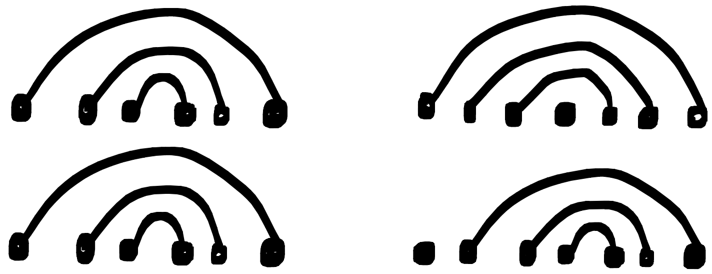
Théorème : lplsd et embouv ont une distribution symétrique sur les involutions.

SURPRENANTE ?

stable par miroir

Motifs associés à lplsd :

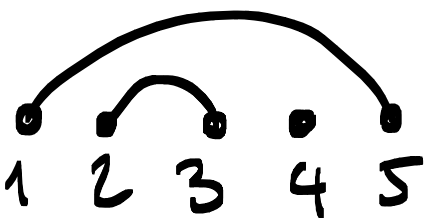
Motifs associés à embow :



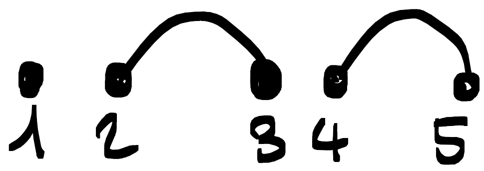
pas stable

Notre bijection Θ des involutions α tq $\mathrm{lplsd}(\alpha) \leq 2k$ vers les appariements ouverts sans emboîtement d'ordre $k+1$ n'inverse pas lplsd et embow.

Ex :



$\overset{\Theta}{\longmapsto}$



lplsd = 4 embow = 4

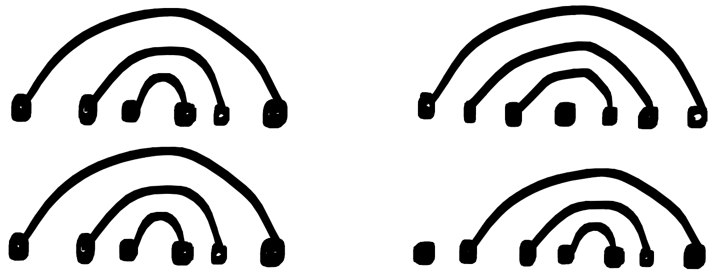
lplsd = 2 embow = 3

SURPRENANTE ?

stable par miroir

Motifs associés à lplsd :

Motifs associés à embow :



pas stable

Notre bijection Θ des involutions α tq $\mathrm{lplsd}(\alpha) \leq 2k$

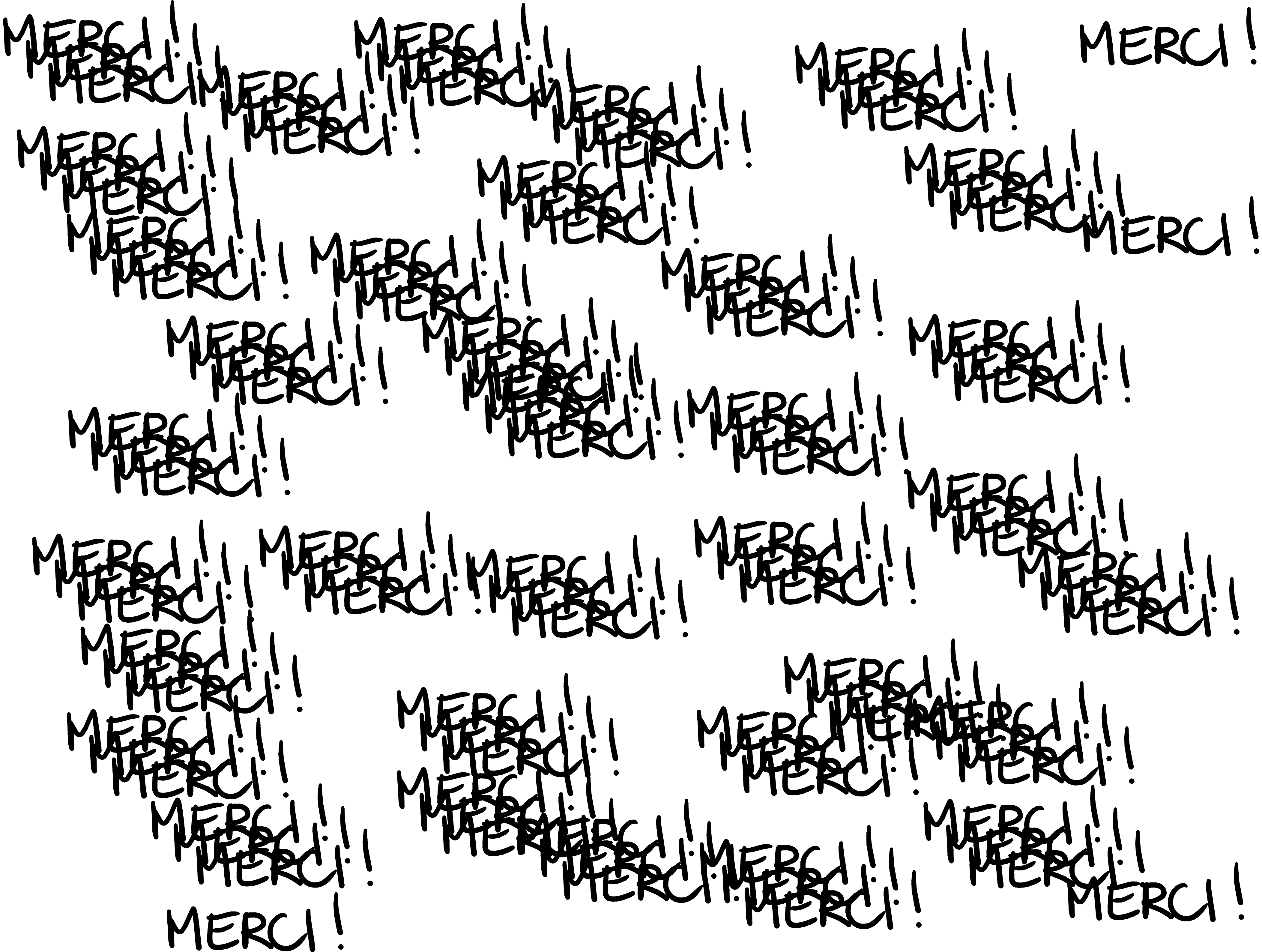
vers les appariements ouverts sans emboîtement d'ordre $k+1$

n'inverse pas lplsd et embow

mais envoie $\{\alpha \mid \mathrm{lplsd}(\alpha) = 2k \text{ ou } 2k-1\}$

sur $\{\alpha \mid \mathrm{embow}(\alpha) = 2k \text{ ou } 2k-1\}$

ET CA SUFFIT!


MERCI !