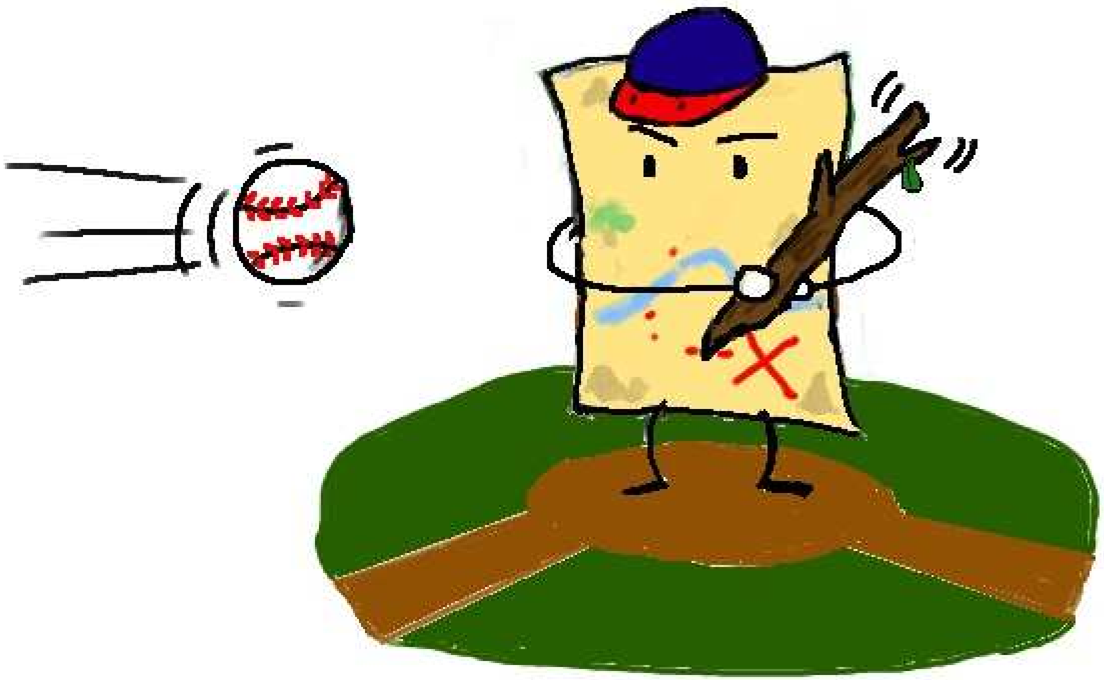
ARBRES ET CARTES MUNIS DE FORÊT COUVRANTE

J. COURTIEL (LaBRI)
travaux joints avec M. BOUSQUET-MÉLOU

1. PRÉSENTATION DES OBJETS DE BASE



DEUX GRANDES FAMILLES DE BIJECTION

Gilles SCHAEFFER

CARTES	QUADRANGULATIONS	CARTES TÉTRAVALENTES
ARBRES	ARBRES BIEN ÉTIQUETÉS	ARBRES BOURGEONNANTS

DEUX GRANDES FAMILLES DE BIJECTION

Gilles SCHAEFFER

CARTES

QUADRANGULATIONS $\xleftrightarrow{\text{DUALITÉ}}$ CARTES TÉTRAVALENTES

$\Downarrow$ $\Downarrow$

ARBRES

ARBRES BIEN ÉTIQUETÉS $\xleftrightarrow{\text{DUALITÉ}}$ ARBRES BOURGEONNANTS

DEUX GRANDES FAMILLES DE BIJECTION

BOUTTIER Jérémie
Di FRANCESCO Philippe
GUITTER Emmanuel

Gilles SCHAEFFER

CARTES

QUADRANGULATIONS $\xleftrightarrow{\text{DUALITÉ}}$ CARTES TÉTRAVALENTES

CARTES SELON DEGRÉ DES FACES — CARTES SELON DEGRÉ DES SOMMETS

⇓ ⇓

ARBRES

ARBRES BIEN ÉTIQUETÉS $\xleftrightarrow{\text{DUALITÉ}}$ ARBRES BOURGEONNANTS

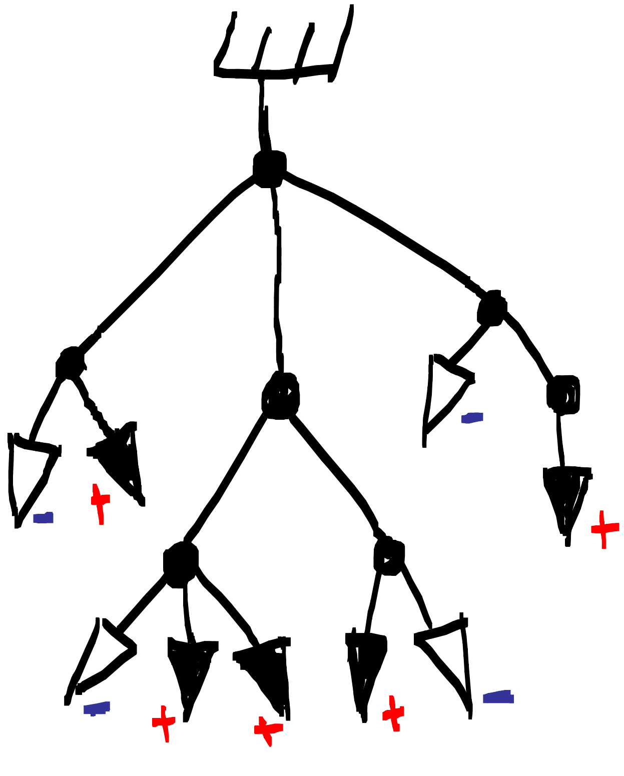
MOBILES
DEMI-MOBILES

R-ARBRES
S-ARBRES

ARBRES BOURGEONNANTS

Un arbre bourgeonnant est un arbre plan enraciné sur une demi-arête avec uniquement 2 sortes de sommets sans enfants :

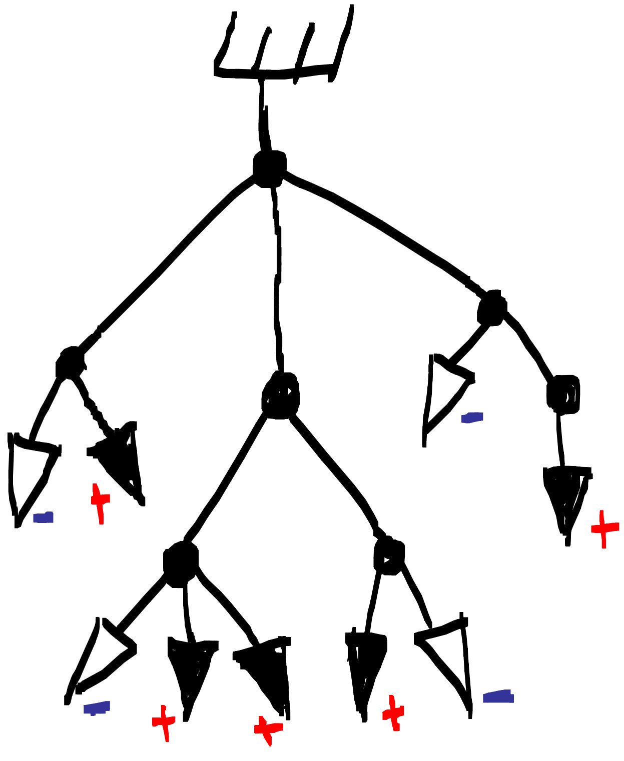
- les feuilles charge +1
- les bourgeons charge -1



ARBRES BOURGEONNANTS

Un arbre bourgeonnant est un arbre plan enraciné sur une demi-arête avec uniquement 2 sortes de sommets sans enfants :

- les feuilles charge +1
- les bourgeons charge −1

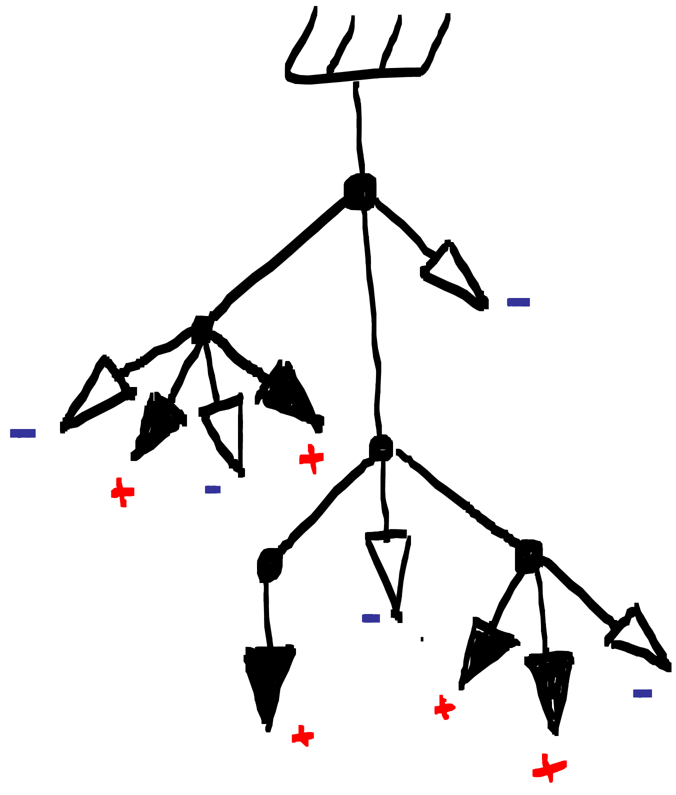


Un R-arbre est un arbre bourgeonnant tq :

(i) la charge totale est 1.

(ii) Tout sous-arbre non réduit à un bourgeon a pour charge totale 1 ou 0.

ARBRES BOURGEONNANTS



Un arbre bourgeonnant est un arbre plan enraciné sur une demi-arête avec uniquement 2 sortes de sommets sans enfants :

- les feuilles  charge +1
- les bourgeons  charge -1

Un S-arbre est un arbre bourgeonnant tq :

(i) la charge totale est 0.

(ii) Tout sous-arbre non réduit à un bourgeon a pour charge totale 1 ou 0.

COMPTONS LES R- ET S-ARBRES

On met : - un poids z sur chaque feuille

- un poids g_k pour chaque sommet de degré k

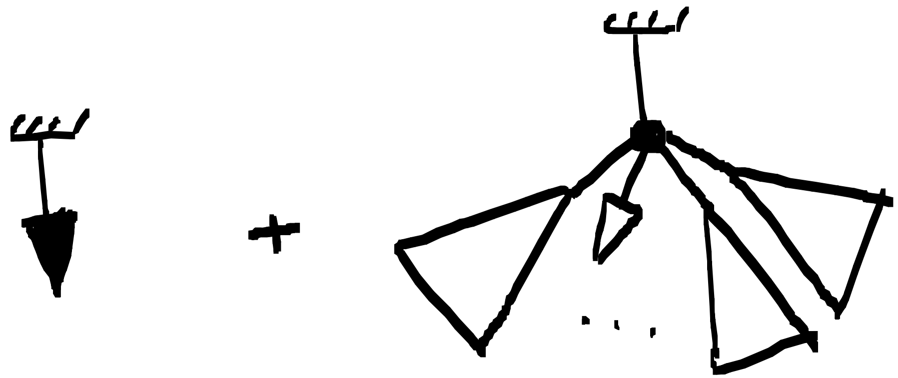
SERIES GENERATRICES : R ET S

COMPTONS LES R- ET S-ARBRES

On met : - un poids z sur chaque feuille

- un poids g_k pour chaque sommet de degré k

SERIES GENERATRICES : R ET S

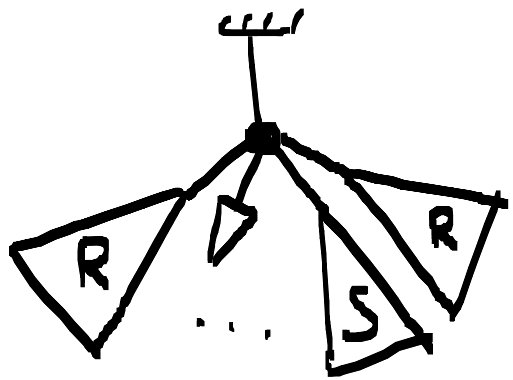
R-arbre = 

COMPTONS LES R- ET S-ARBRES

On met : - un poids z sur chaque feuille 

- un poids g_k pour chaque sommet de degré k

SERIES GENERATRICES : R ET S

R-arbre =  + 

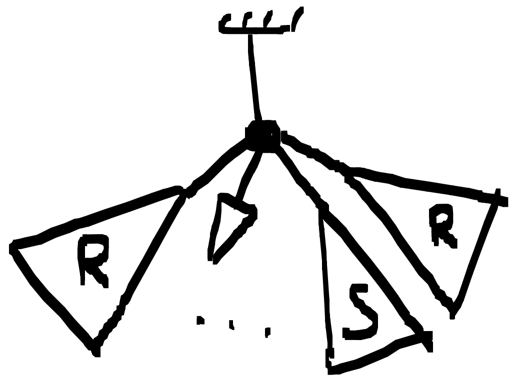
Lemme : Tout sous-arbre descendant est un bourgeon ou un R-arbre ou un S-arbre.

COMPTONS LES R- ET S-ARBRES

On met : - un poids z sur chaque feuille

- un poids g_k pour chaque sommet de degré k

SERIES GENERATRICES : R ET S

R-arbre =  + 

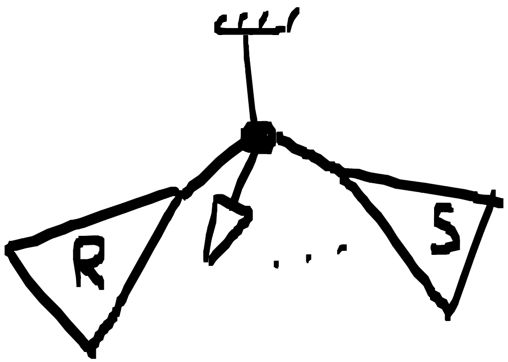
$$R = z + \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} g_{2i+j} \binom{2i+j-1}{i,\, i-1,\, j} R^i S^j$$

Lemme : Tout sous-arbre descendant est un bourgeon ou un R-arbre ou un S-arbre.

COMPTONS LES R- ET S-ARBRES

On met : - un poids z sur chaque feuille
- un poids g_k pour chaque sommet de degré k

SERIES GENERATRICES : R ET S

S-arbre = 

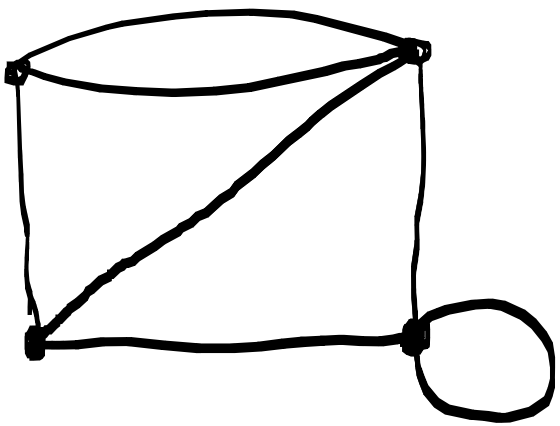
$$S = \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} g_{2i+j+1}\binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$$

Lemme : Tout sous-arbre descendant est un bourgeon ou un R-arbre ou un S-arbre.

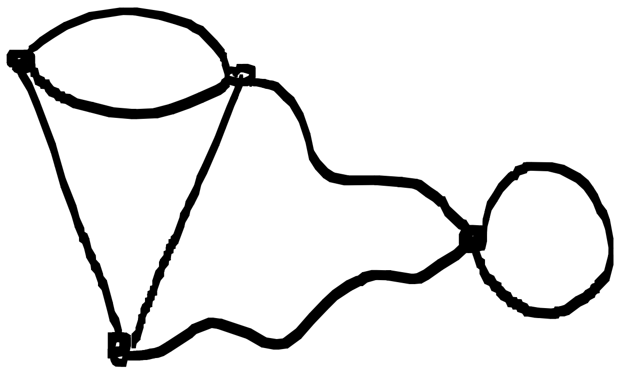
CARTES PLANAIRES

Carte planaire = graphe connexe
+
plongement de ce graphe sur la sphère orientée, considéré à déformation près

Ex :



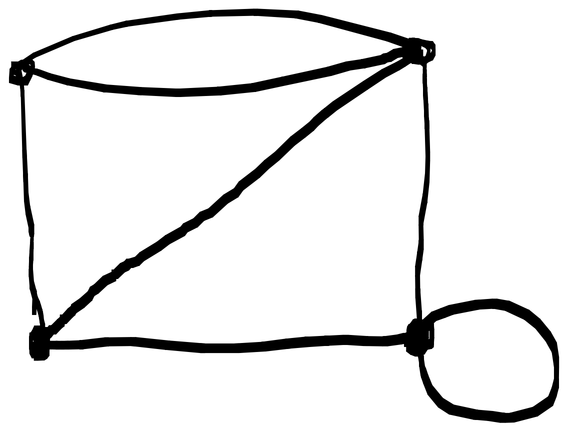
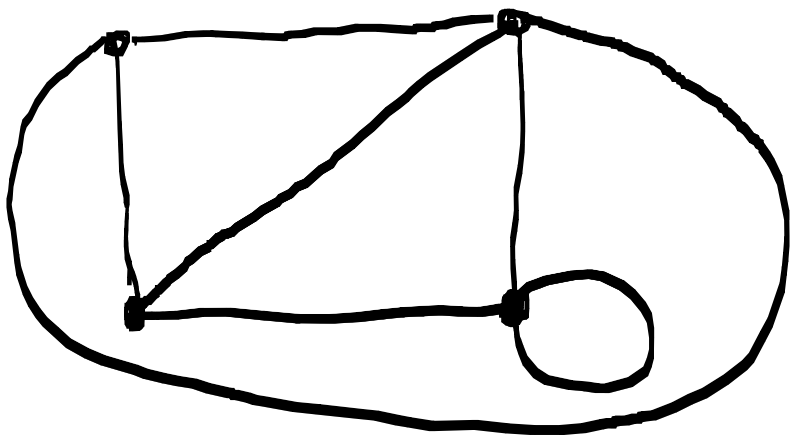
=



CARTES PLANAIRES

Carte planaire = graphe connexe + plongement de ce graphe sur la sphère orientée, considéré à déformation près

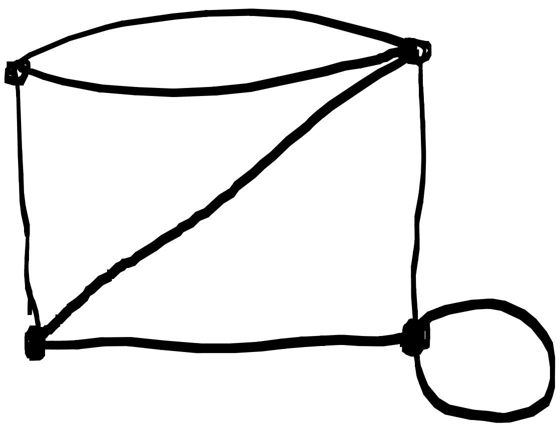
Ex :

 = 

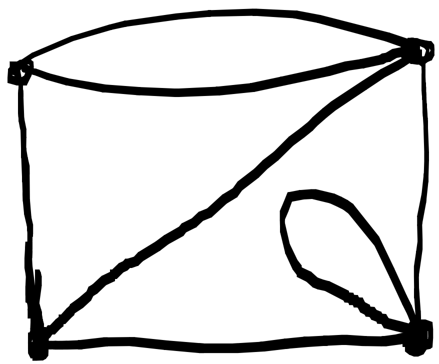
CARTES PLANAIRES

Carte planaire = graphe connexe
+
plongement de ce graphe sur la sphère orientée,
considéré à déformation près

<u>Ex</u> :



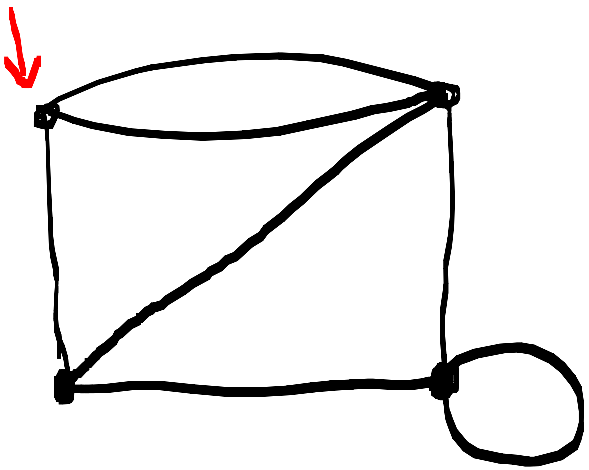
$\neq$

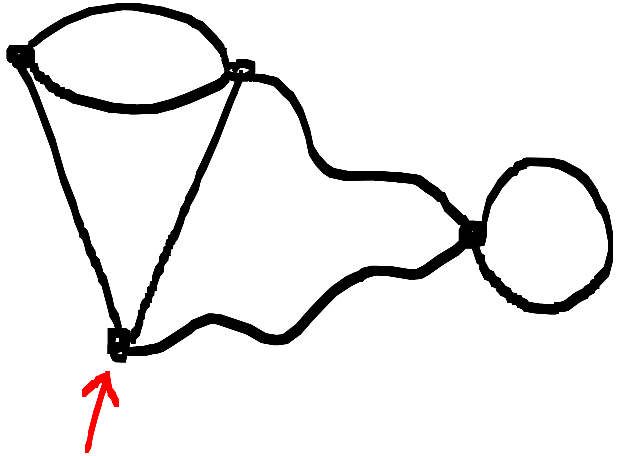


CARTES PLANAIRES

Carte planaire = graphe connexe + plongement de ce graphe sur la sphère orientée, considéré à déformation près

Ex :





Nos cartes sont enracinées sur un coin.

ÉNUMÉRATION DES CARTES PLANAIRES

M = SG des cartes

Γ_1 = SG des cartes enracinées sur un sommet univalent

→ Poids z pour chaque face

→ Poids g_k pour chaque sommet de degré k

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial z} = z\, S \qquad \Gamma_1 = zS - \sum_{i \geq 2} \sum_{j \geq 0} g_{2i+j-1} \binom{2i+j-2}{i-2,\, i,\, j} R^i S^j$$

$$M = zR + zS^2 - z^2 - 2S \sum_{i \geq 2} \sum_{j \geq 0} g_{2i+j-1} \binom{2i+j-2}{i-2,\, i,\, j} R^i S^j - \sum_{i \geq 3} \sum_{j \geq 0} g_{2i+j-2} \binom{2i+j-3}{i-3,\, i,\, j} R^i S^j$$

Un "foisonnement" de formules...

[BDG, 2002]

$M^{\diamond}$ = SG des cartes avec une face marquée

→ Poids z pour chaque face

→ Poids g_k pour chaque sommet <u>non</u> racine de degré k

→ Poids h_k pour "chaque" sommet racine de degré k

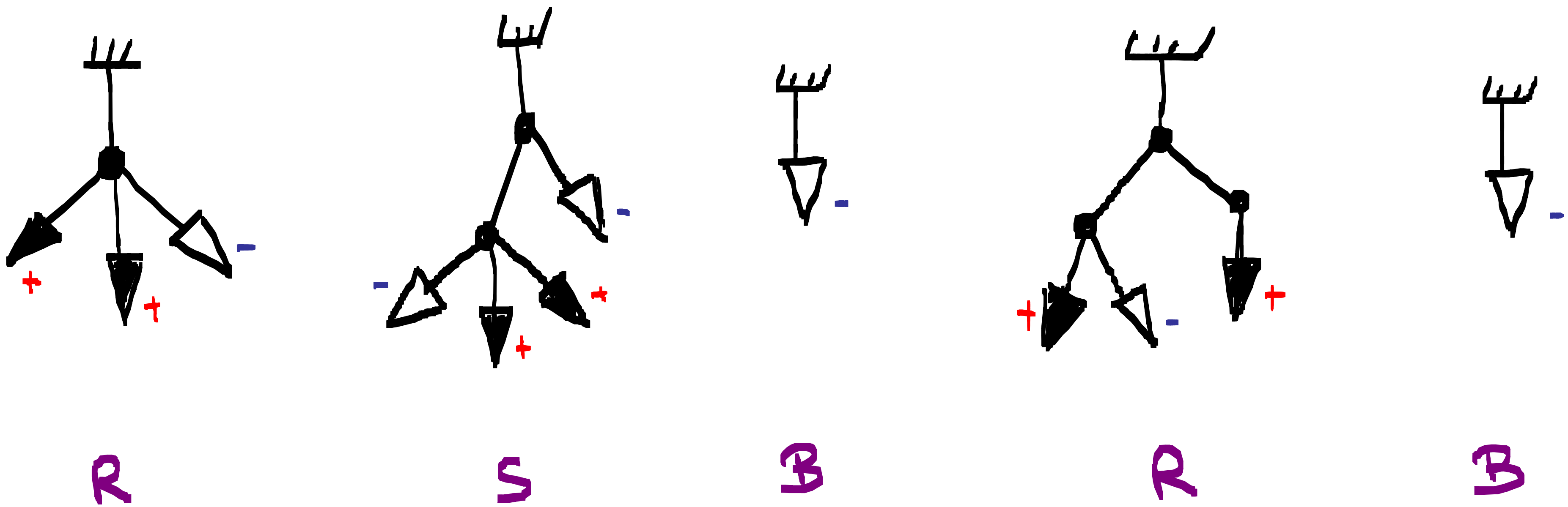
↑ COOL

$$M^{\diamond} = z \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} h_{2i+j} \binom{2i+j}{i,\, i,\, j} R^{i} S^{j}$$

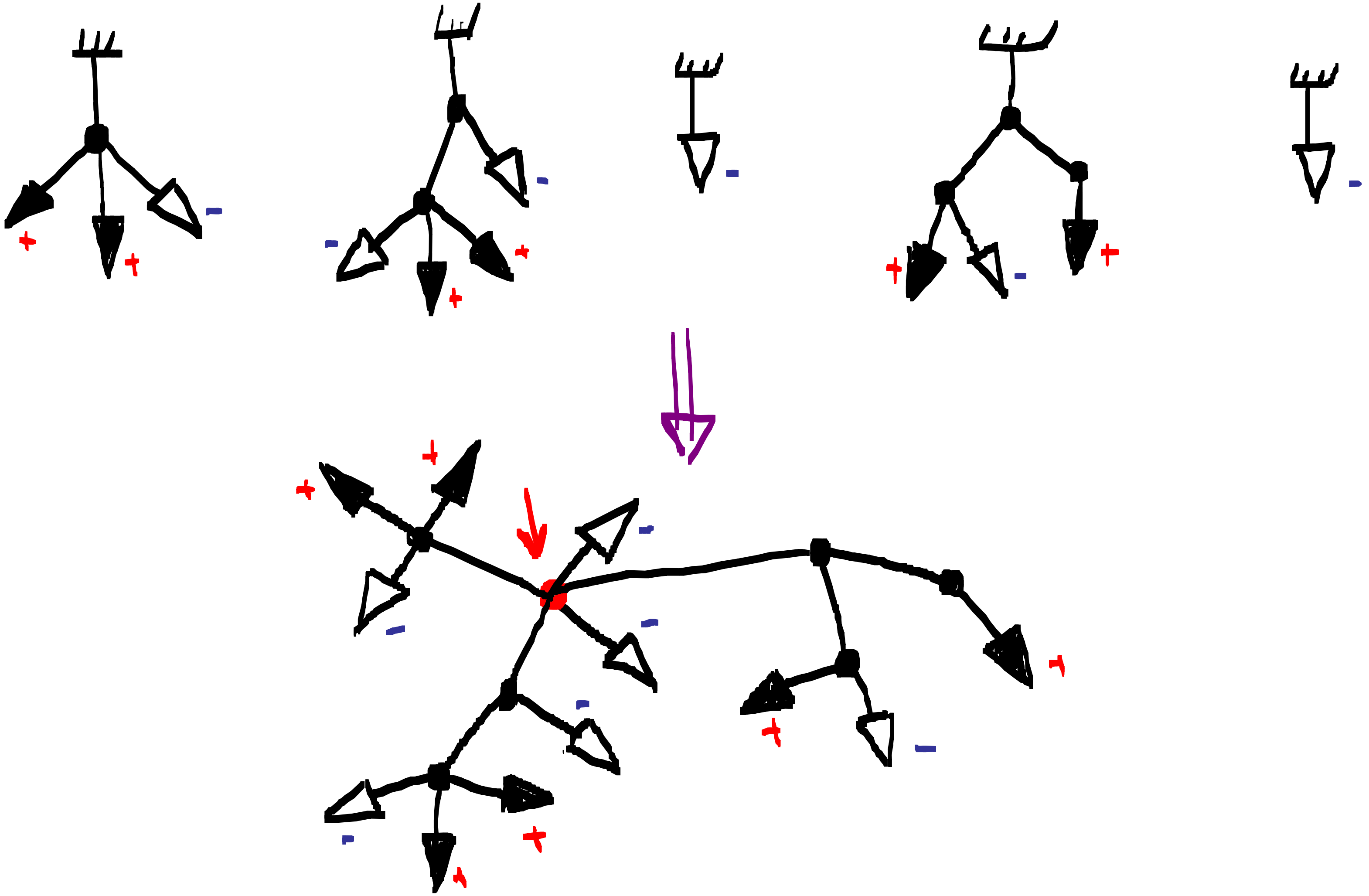
[BG, 2012]

INTERPRÉTATION DE $M^0 = y \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} h_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$

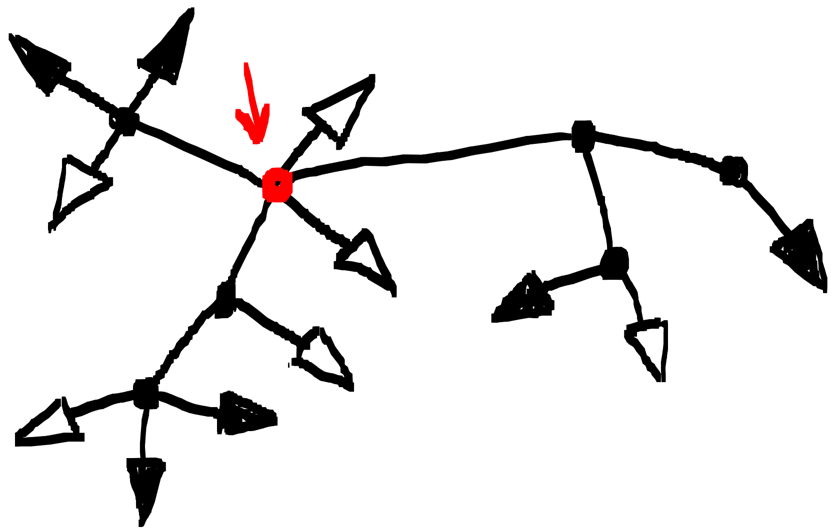
On considère un mot avec i R-arbres
j S-arbres
i bourgeons



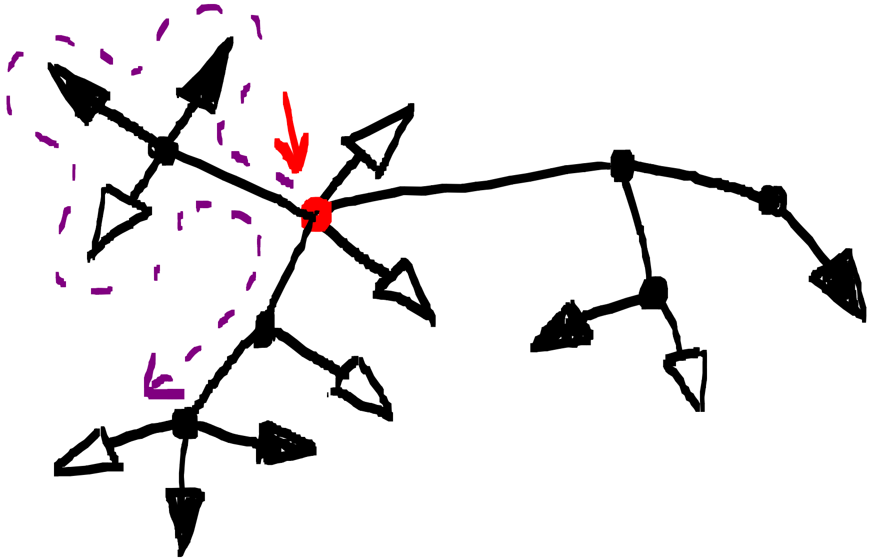
INTERPRÉTATION DE $M^0 = g \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} h_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$



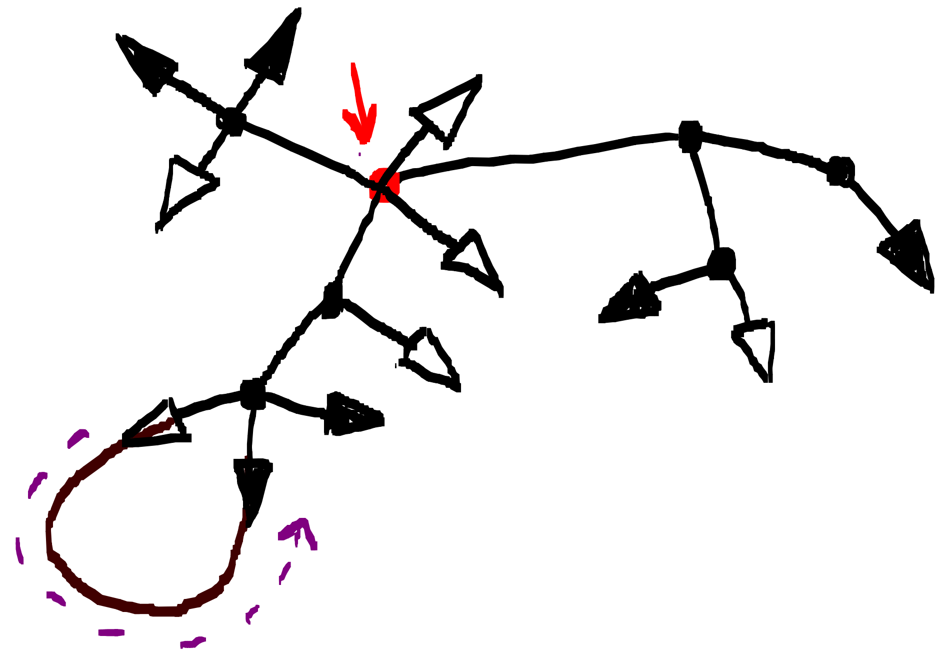
INTERPRÉTATION DE $M^0 = g \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} h_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$



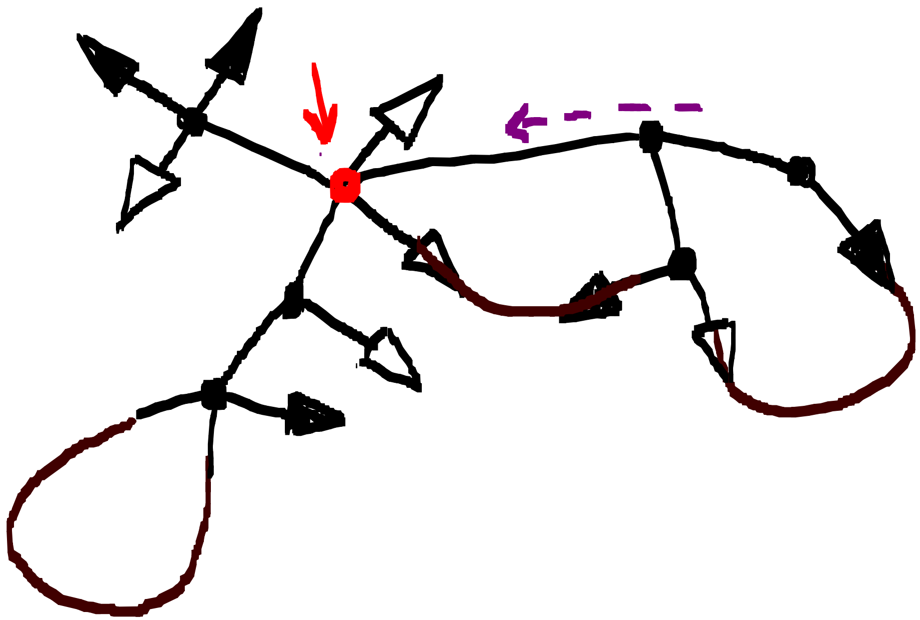
INTERPRÉTATION DE $M^{\diamond} = z \sum_{i\geq 0} \sum_{j \geq 0} h_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$



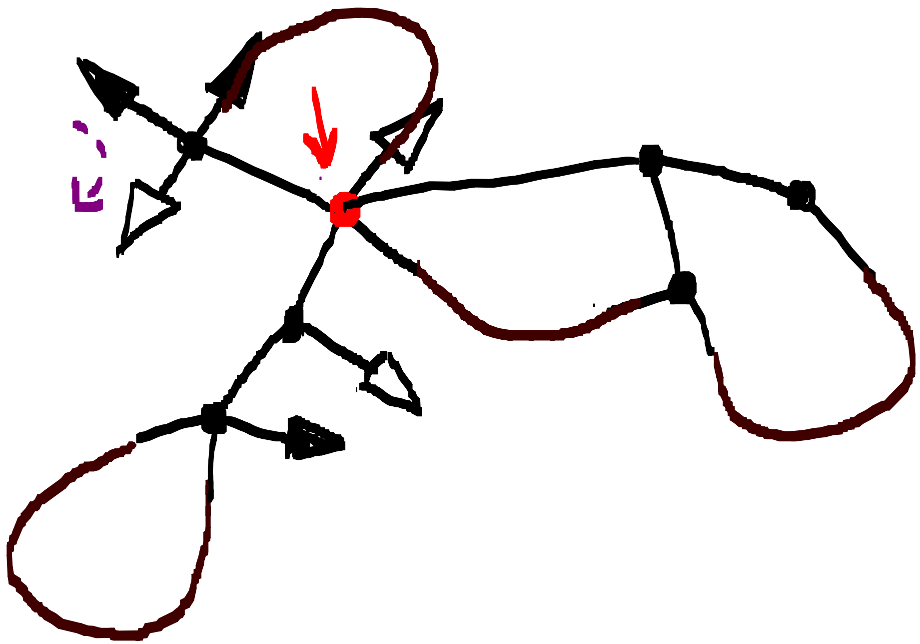
INTERPRÉTATION DE $M^{\lozenge} = y \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} h_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$



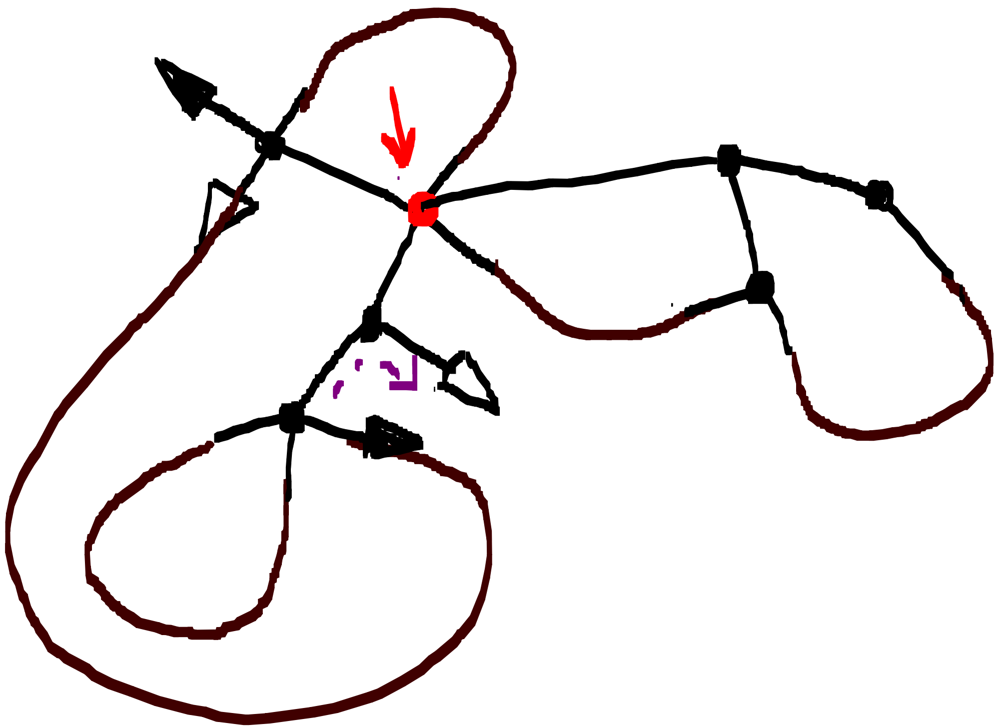
INTERPRÉTATION DE $M^0 = \gamma \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} h_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$



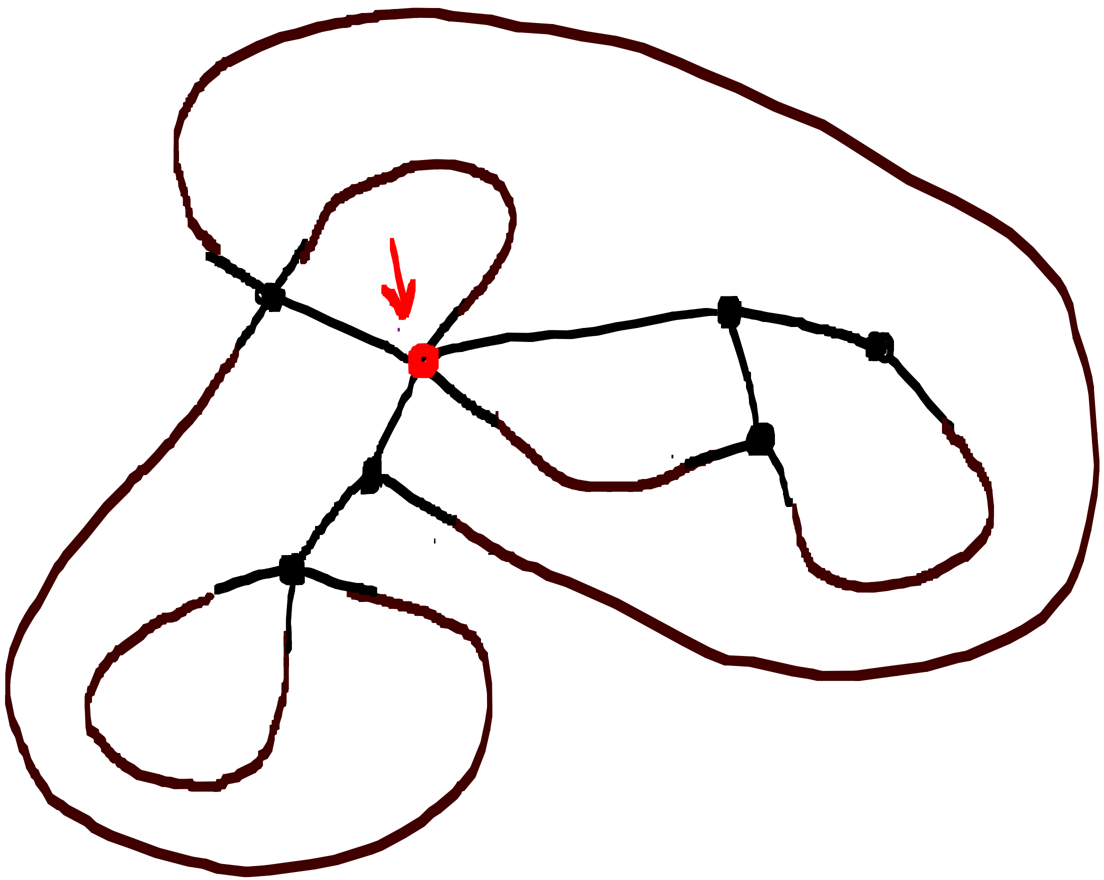
INTERPRÉTATION DE $M^{0} = y \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} h_{2i+j} \binom{2i+j}{i,\, i,\, j} R^i S^j$



INTERPRÉTATION DE $M^0 = g \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} h_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$

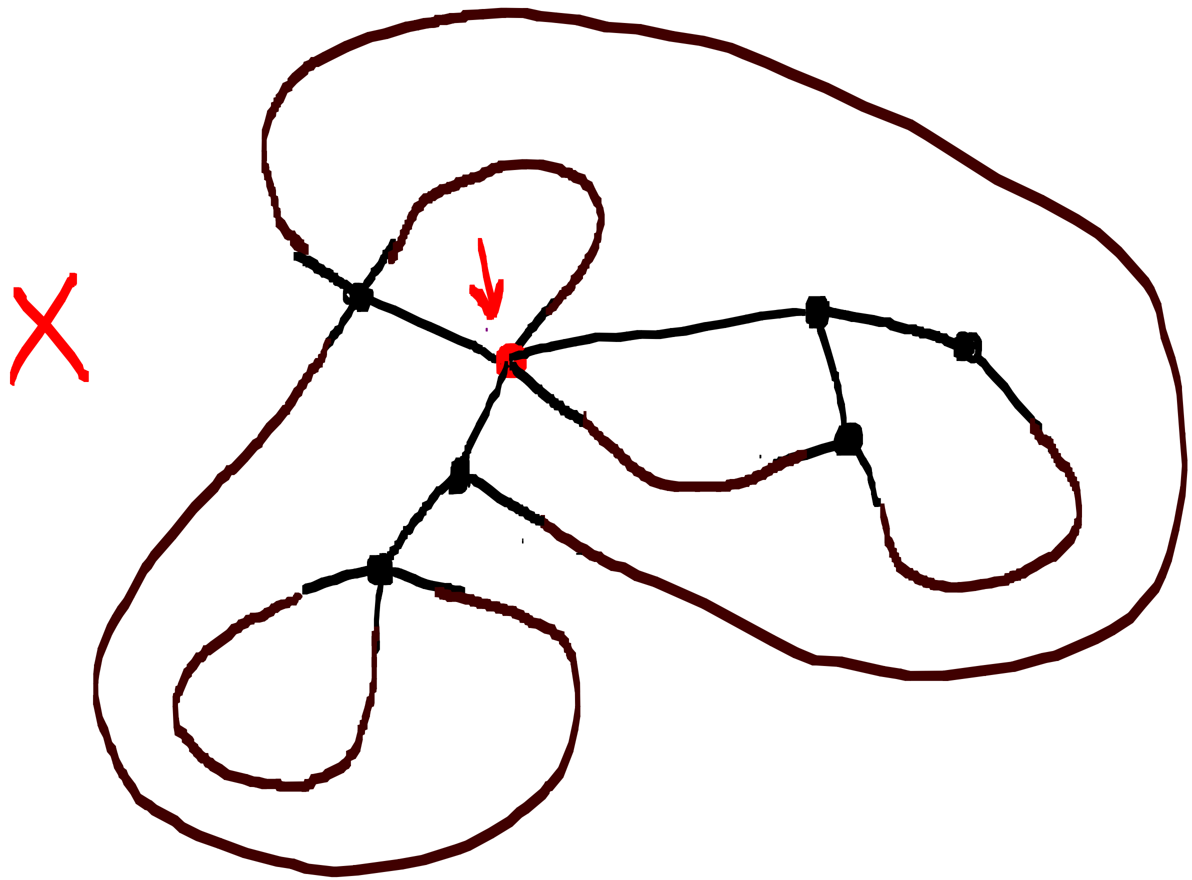


INTERPRÉTATION DE $M^{\diamond} = g \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} h_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$



INTERPRÉTATION DE $M^{\diamond} = z \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} h_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$

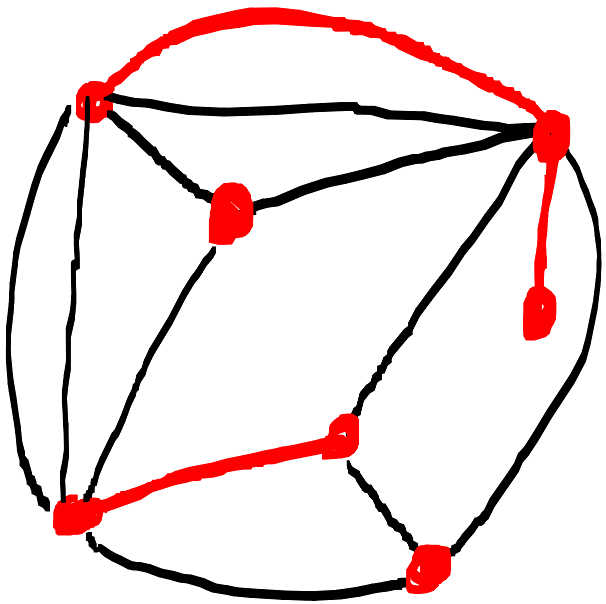
On marque la face extérieure.



2. R-ARBRES ET S-ARBRES ENRICHIS

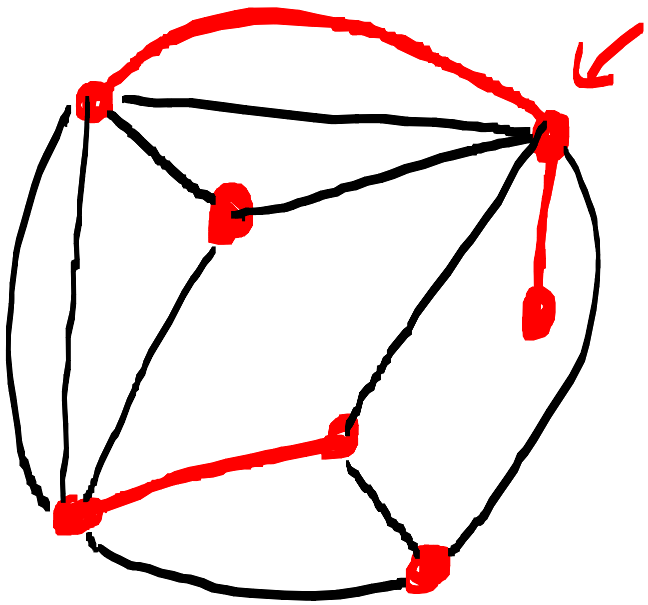
FORÊTS COUVRANTES

Une **forêt couvrante** d'un graphe $G = (S_G, A_G)$ est un graphe de la forme (S_G, E), où E est un sous-ensemble de A_G ne formant <u>pas</u> de cycles.



FORÊTS COUVRANTES

Une forêt couvrante d'un graphe $G = (S_G, A_G)$ est un graphe de la forme (S_G, E), où E est un sous-ensemble de A_G ne formant pas de cycles.



Une carte forestière est une carte planaire enracinée munie d'une forêt couvrante.

R-ARBRES ET S-ARBRES ENRICHIS

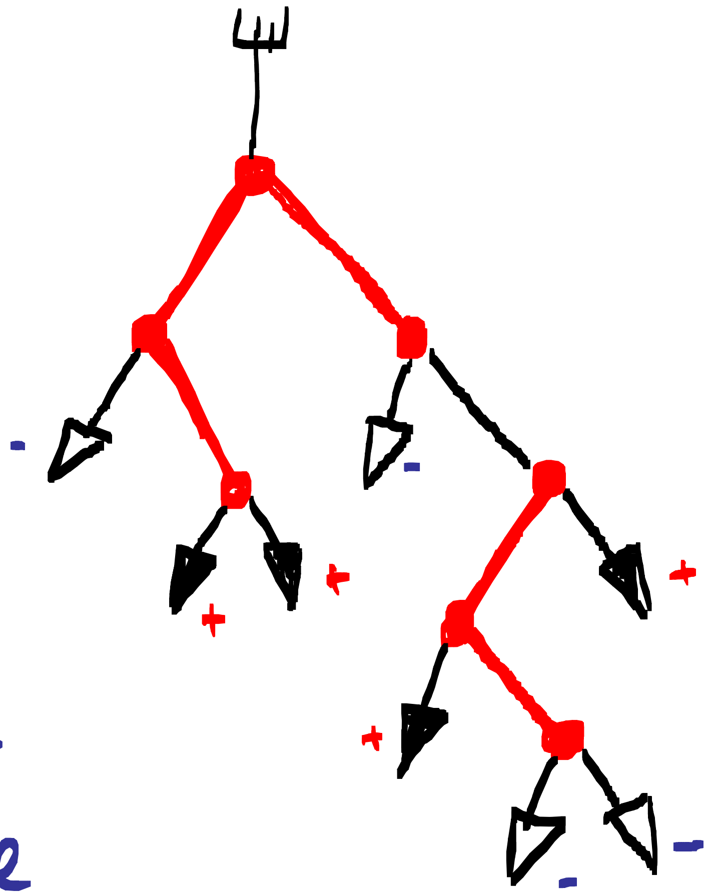
Fixons un entier $p \geq 3$.

Un S-arbre enrichi

est un arbre bourgeonnant, forestier et p-valent* tq :

(i) la charge totale est 0.

(ii) Tout sous-arbre non réduit à un bourgeon et enraciné sur une arête <u>hors</u> forêt a pour charge 0 ou 1.



$p = 3$

* : Tous les sommets ont pour degré p.

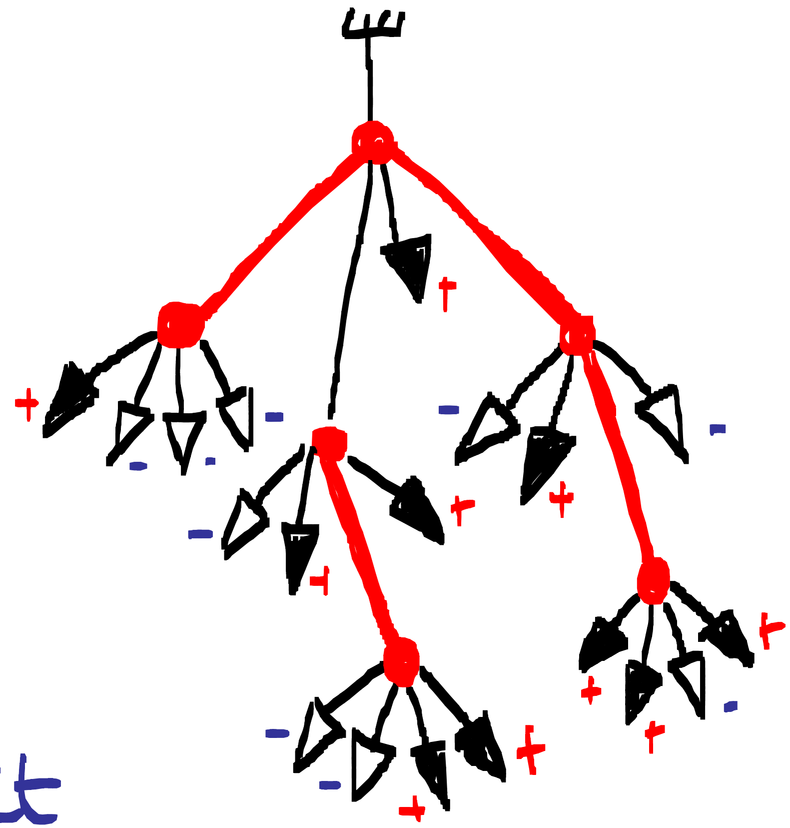
R-ARBRES ET S-ARBRES ENRICHIS

Fixons un entier $p \geq 3$.

Un R-arbre enrichi est un arbre bourgeonnant, forestier et p-valent* tq :

(i) la charge totale est 1.

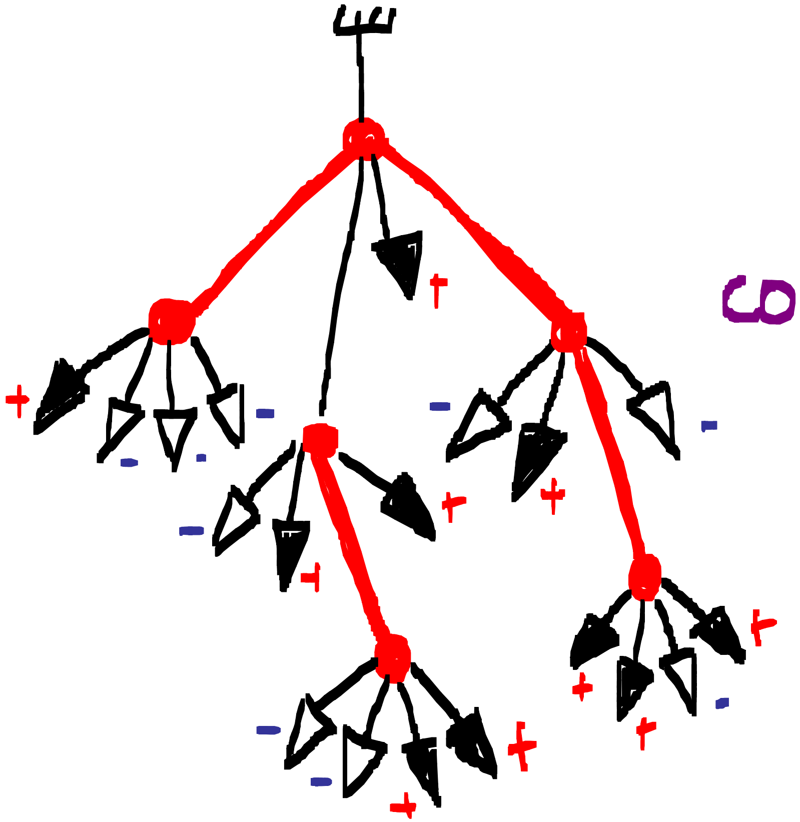
(ii) Tout sous-arbre non réduit à un bourgeon et enraciné sur une arête hors forêt a pour charge 0 ou 1.



$p = 5$

* : Tous les sommets ont pour degré p.

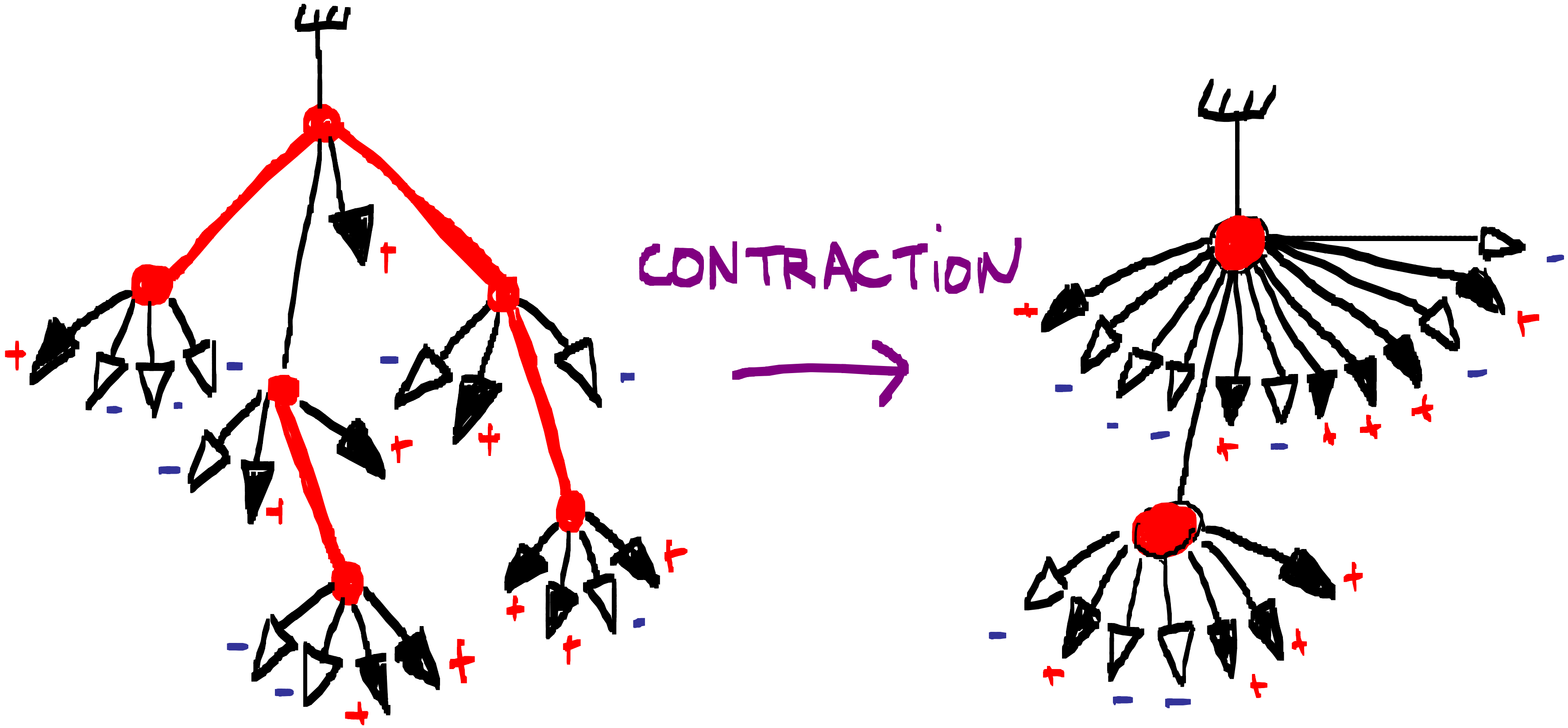
ENRICHISSEMENT OU APPAUVRISSEMENT



R-ARBRE ENRICHI

CONTRACTION

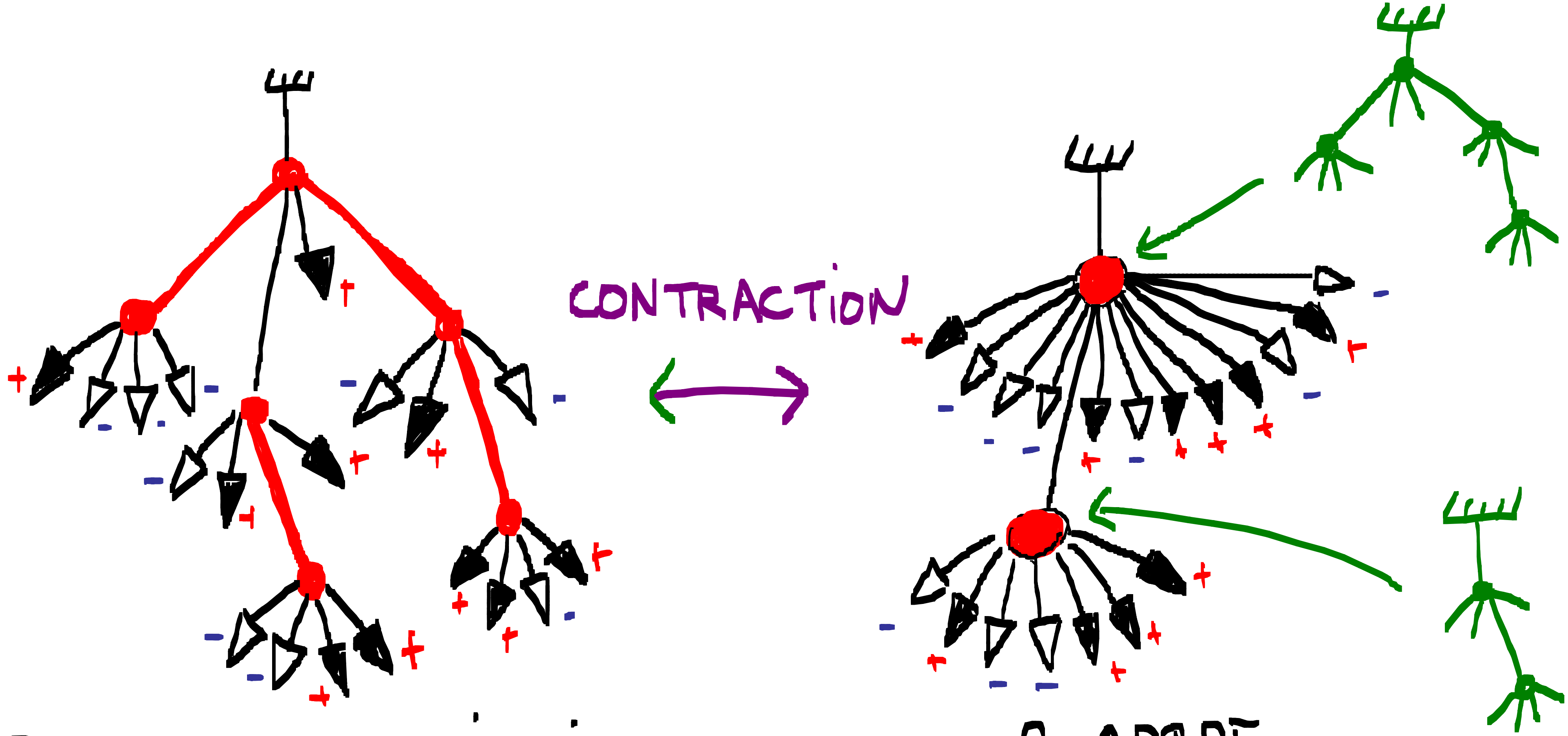
ENRICHISSEMENT OU APPAUVRISSEMENT



R-ARBRE ENRICHI

R-ARBRE

ENRICHISSEMENT OU APPAUVRISSEMENT



R-ARBRE ENRICHI

R-ARBRE

+ ARBRE p-VALENT à k feuilles sur chaque sommet de degré k

ÉNUMÉRATION

R = SG des R-arbres enrichis
S = SG des S-arbres enrichis

→ poids z pour chaque feuille
→ poids u pour chaque composante connexe

$$R = z + u \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t_{2i+j} \binom{2i+j-1}{i,\, i-1,\, j} R^i S^j$$

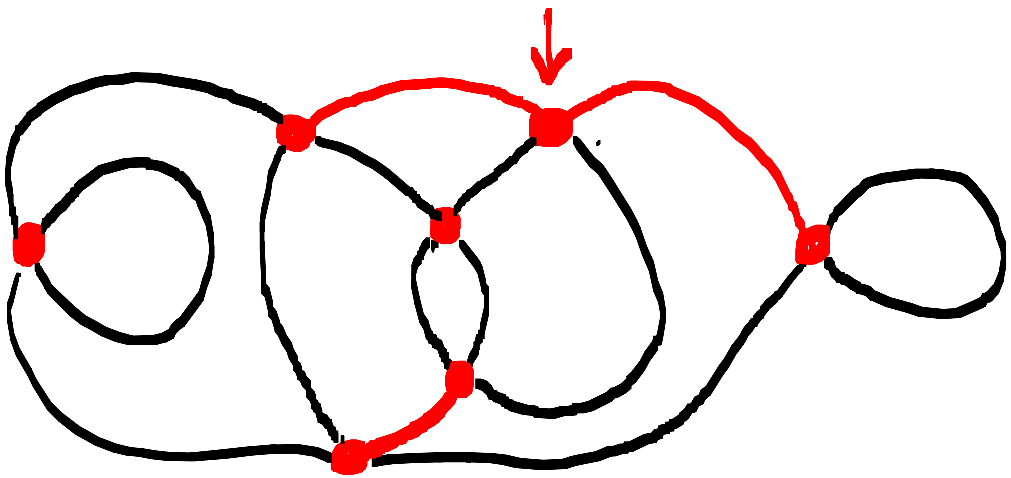
$$S = u \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t_{2i+j+1} \binom{2i+j}{i,\, i,\, j} R^i S^j$$

t_k = # arbres plans p-valents à k feuilles (enracinés sur 1 feuille) $= \begin{cases} \dfrac{[(p-1)\ell]!}{\ell!\,[(p-2)\ell+1]!} & \text{si } k = (p-2)\ell + 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

CARTES FORESTIÈRES p-VALENTES

F = SG des cartes forestières p-valentes
→ poids z pour chaque face
→ poids u pour chaque composante connexe non-racine.

Ex: ($p=4$)



pondérée par $u^3 z^9$

CARTES FORESTIÈRES p-VALENTES

F = SG des cartes forestières p-valentes

→ poids z pour chaque face

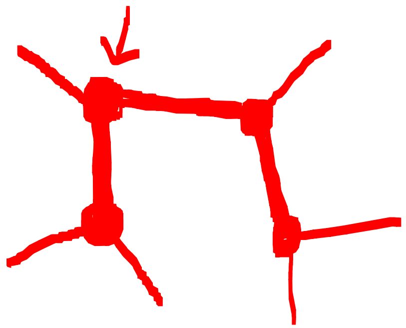
→ poids u pour chaque composante connexe non-racine.

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t^{c}_{2i+j} \binom{2i+j}{i,\, i,\, j} R^{i} S^{j}$$

t^{c}_{k} := # arbres plans p-valents à k feuilles enracinés sur un coin $= \begin{cases} p \dfrac{[(p-1)\ell]!}{\ell!\,[(p-2)\ell+2]!} & \text{si } k=(p-2)\ell+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

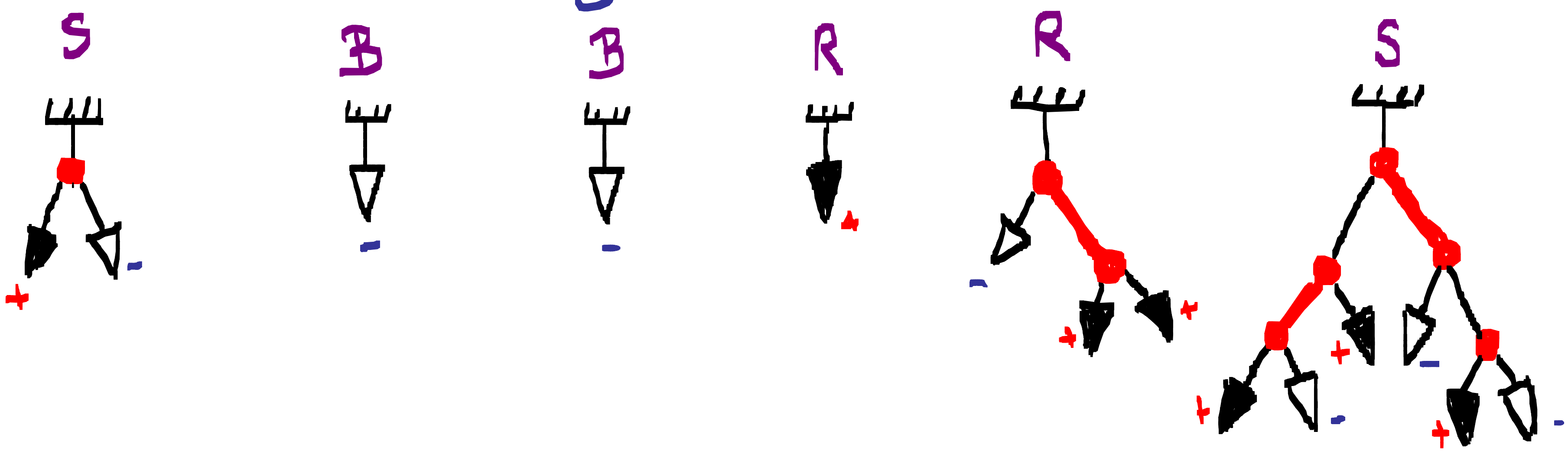
INTERPRÉTATION DE $\frac{\partial F}{\partial \gamma} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t^{c}_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$

On considère un arbre p-valent enraciné sur un coin à $(2i+j)$ feuilles :

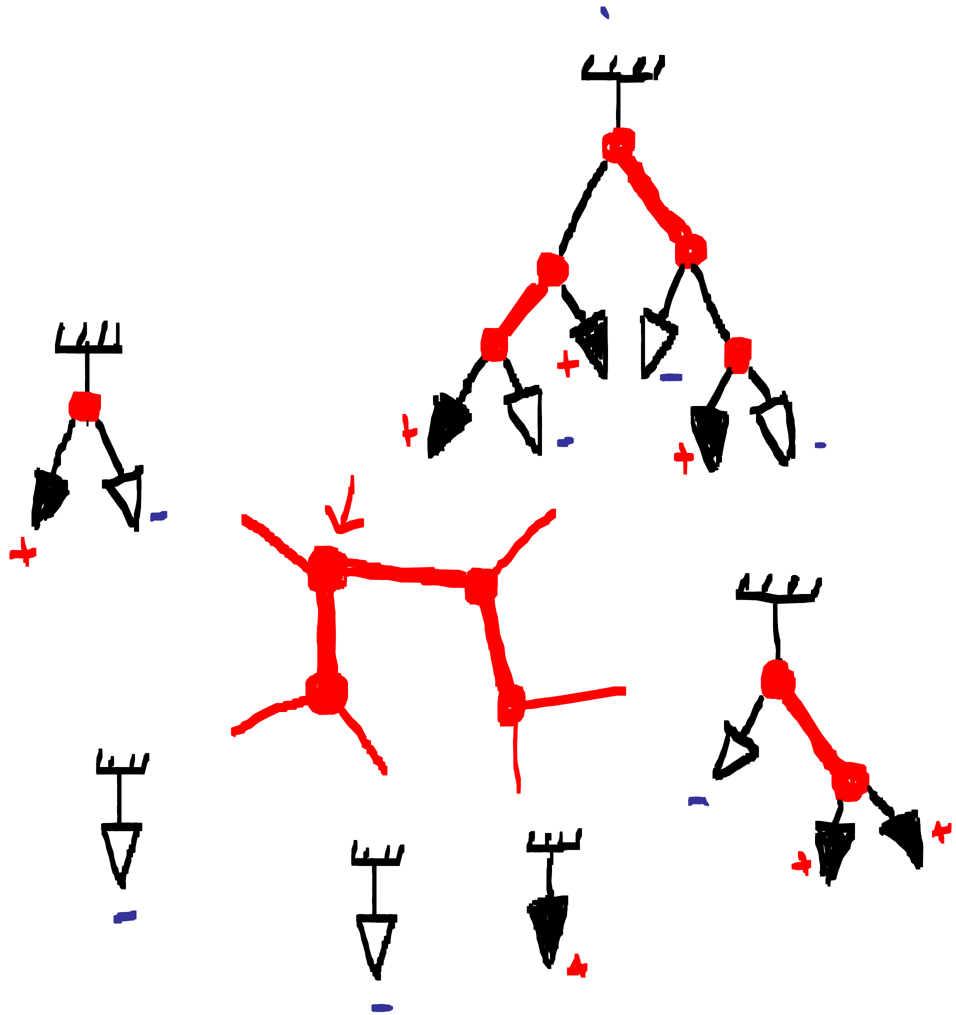


$i = 2$
$j = 2$
$p = 3$

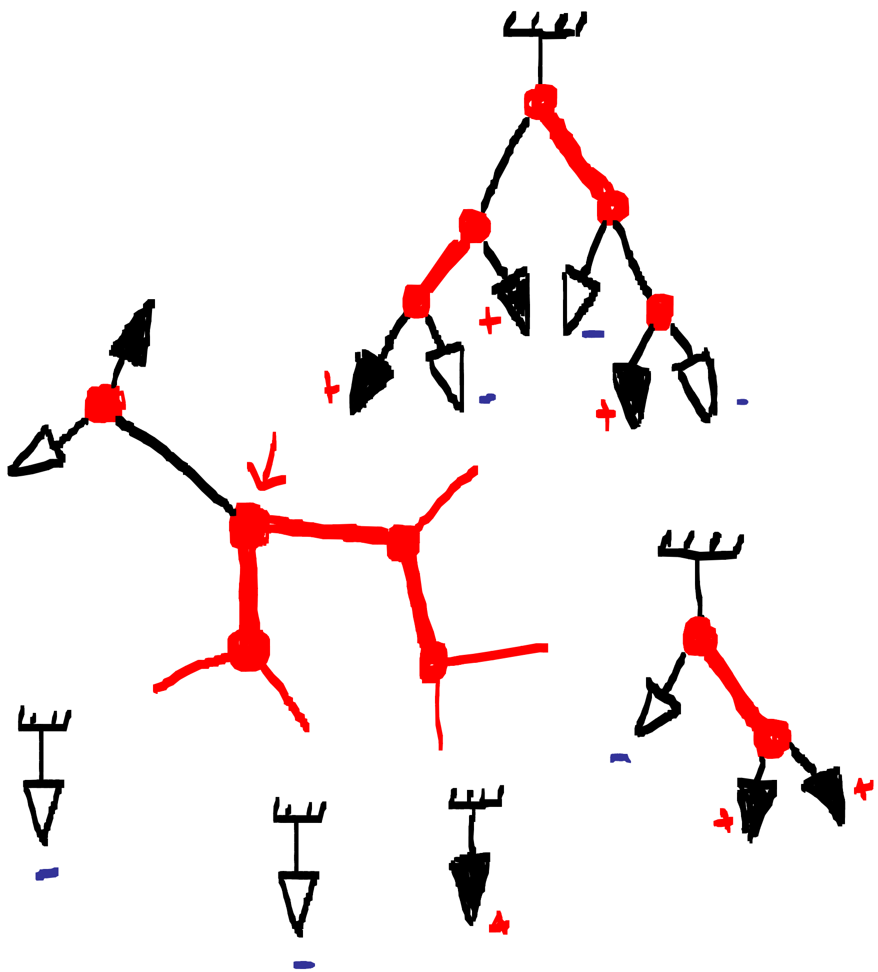
et un mot avec i R-arbres enrichis, j S-arbres enrichis et i bourgeons :



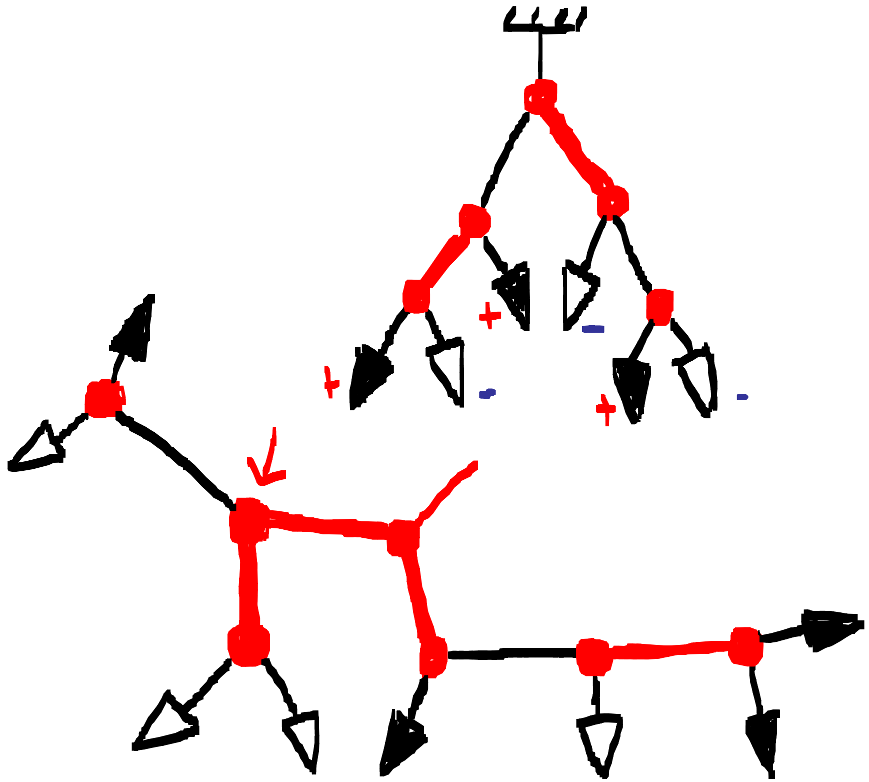
INTERPRÉTATION DE $\frac{\partial F}{\partial \gamma} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t^c_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$



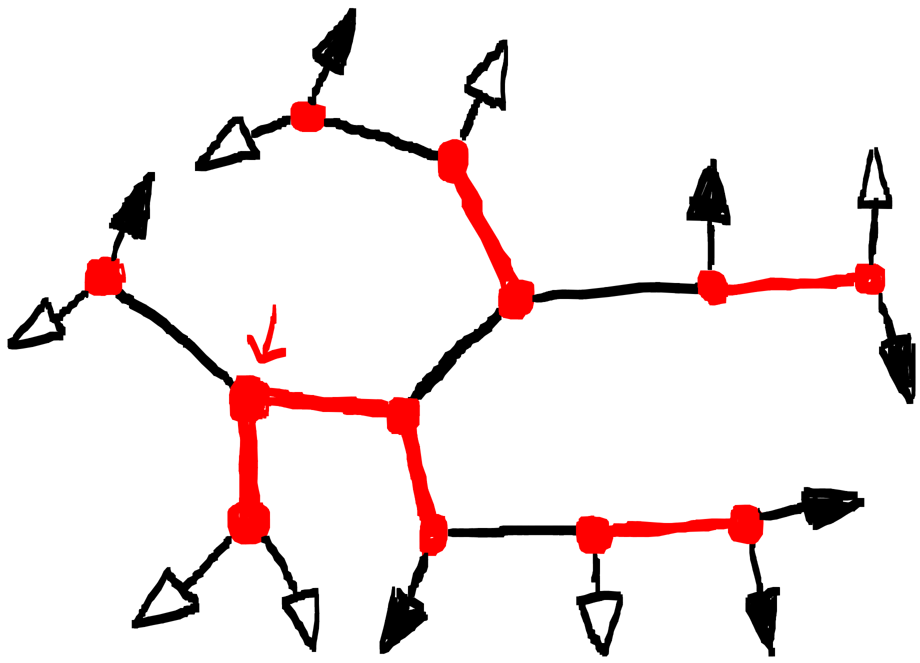
INTERPRÉTATION DE $\frac{\partial F}{\partial \gamma} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t^{c}_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$



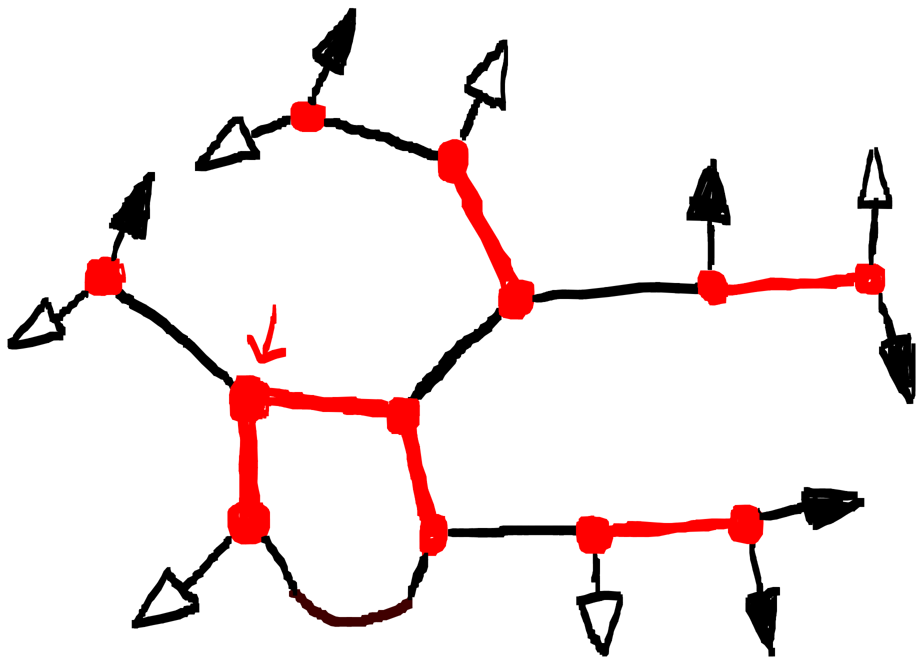
INTERPRÉTATION DE $\frac{\partial F}{\partial \gamma} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t^c_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$



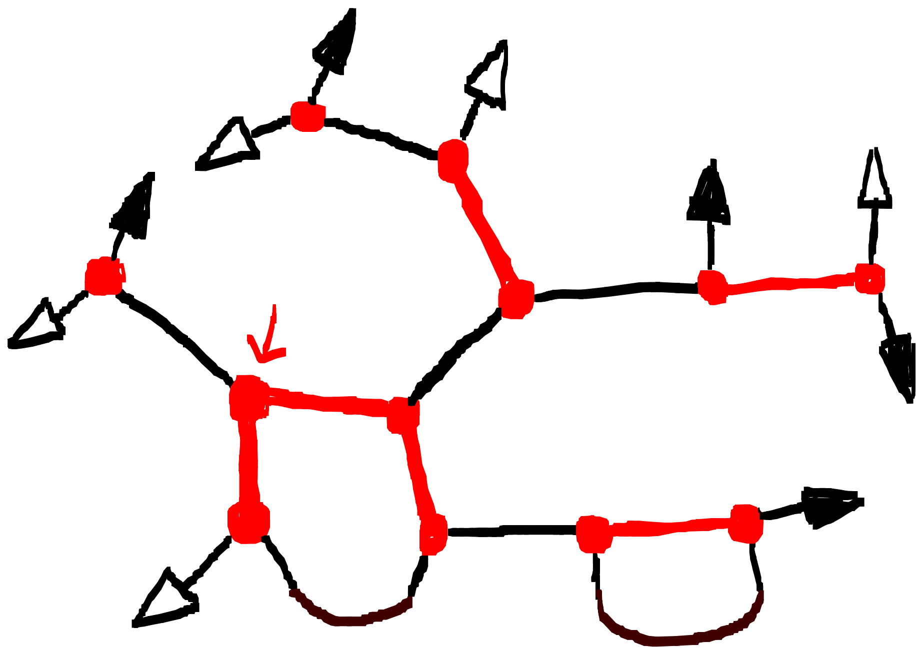
INTERPRÉTATION DE $\dfrac{\partial F}{\partial r_j} = \sum_{i\geq 0} \sum_{j \geq 0} t^{c}_{2i+j} \binom{2i+j}{i,\, i,\, j} R^i S^j$



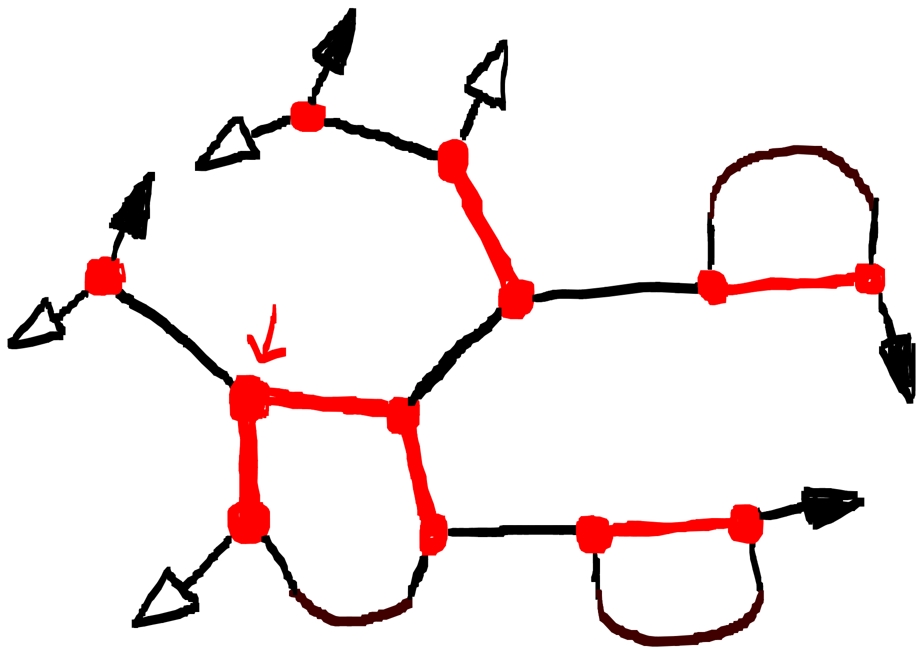
INTERPRÉTATION DE $\frac{\partial F}{\partial \tau_j} = \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} t^c_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$



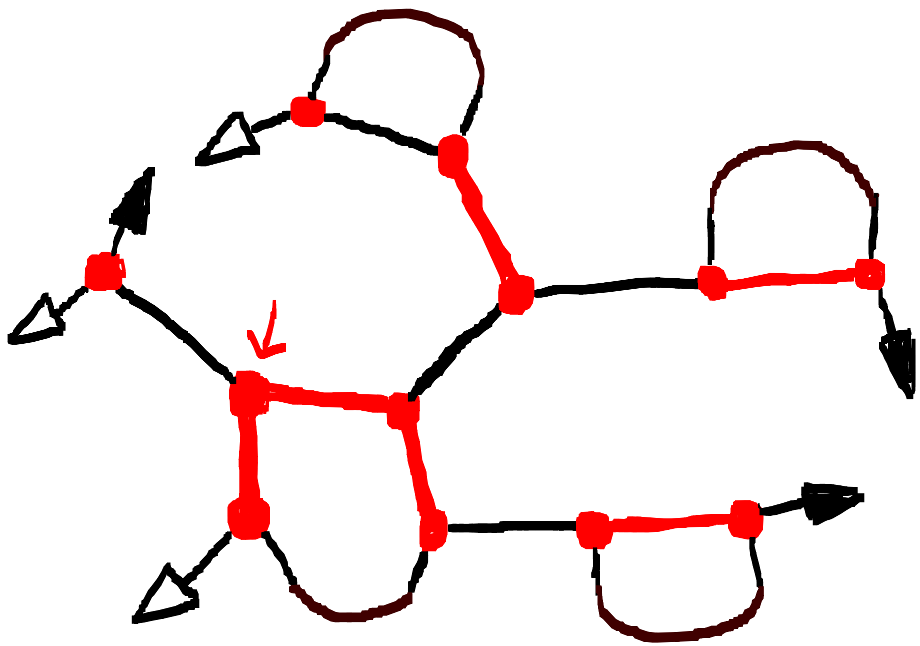
INTERPRÉTATION DE $\frac{\partial F}{\partial t_0} = \sum_{i\geq 0} \sum_{j \geq 0} t^c_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$



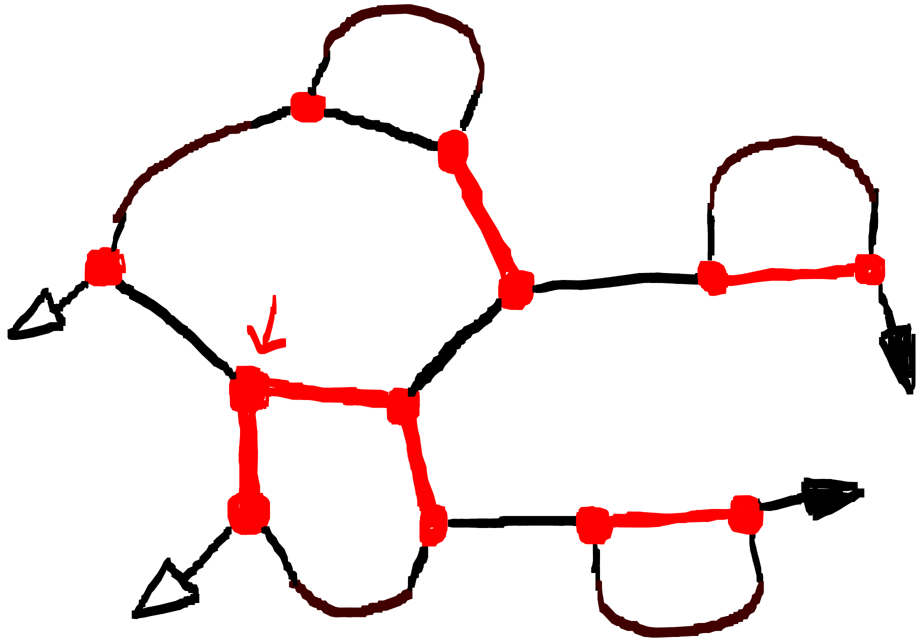
INTERPRÉTATION DE $\frac{\partial F}{\partial t_0} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t^c_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$



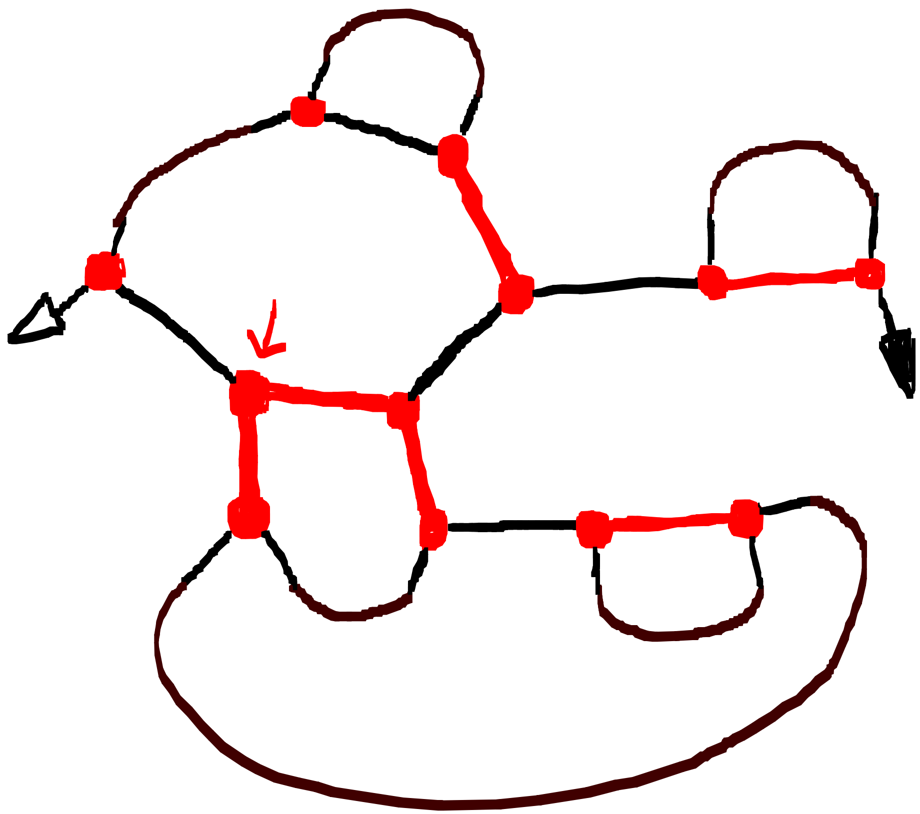
INTERPRÉTATION DE $\frac{\partial F}{\partial z_j}=\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} t^c_{2i+j}\binom{2i+j}{i,i,j}R^iS^j$



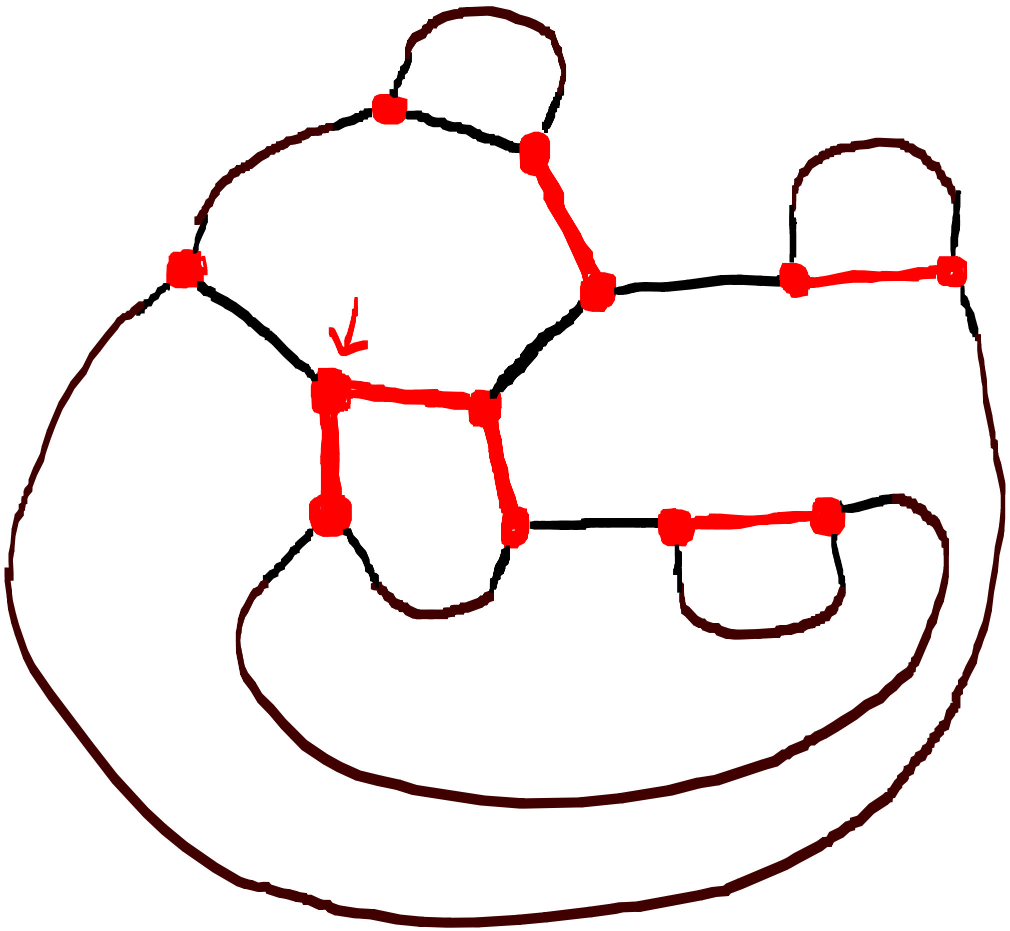
INTERPRÉTATION DE $\dfrac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t^c_{2i+j} \binom{2i+j}{i,i,j} R^i S^j$



INTERPRÉTATION DE $\dfrac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t^c_{2i+j} \binom{2i+j}{i,\,i,\,j} R^i S^j$

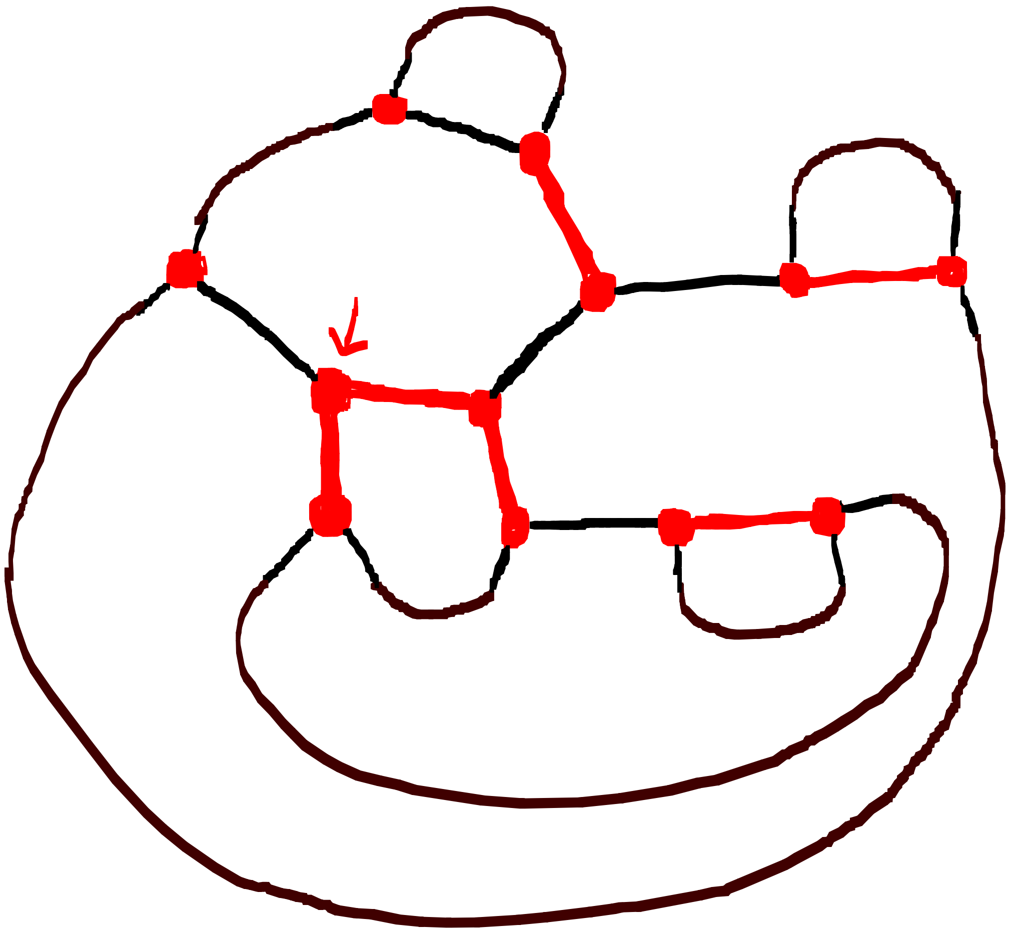


INTERPRÉTATION DE $\dfrac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_{i\geq 0} \sum_{j \geq 0} t^{c}_{2i+j} \binom{2i+j}{i,\, i,\, j} R^i S^j$

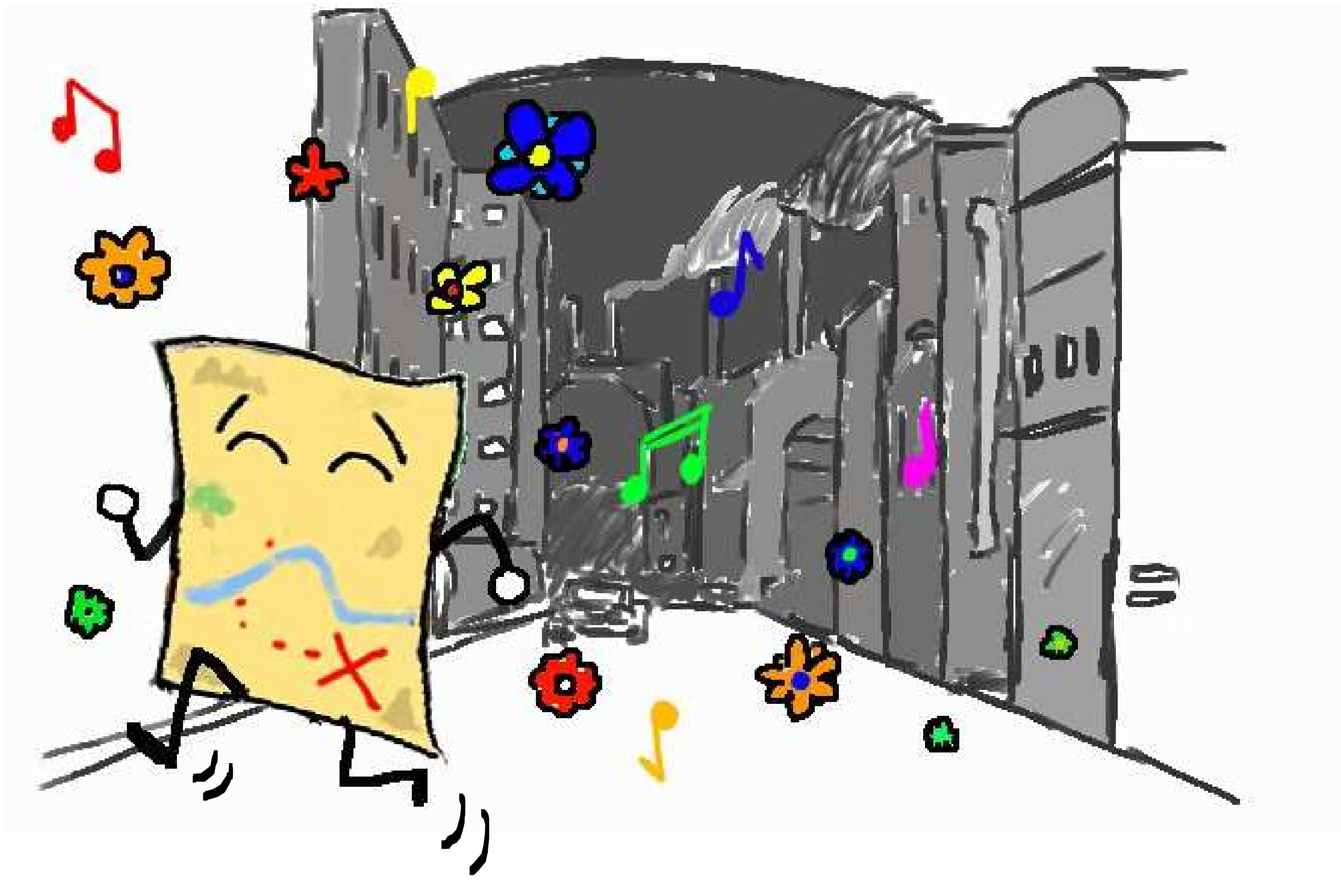


INTERPRÉTATION DE $\frac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t^c_{2i+j} \binom{2i+j}{i,\, i,\, j} R^i S^j$

X



3. $(\mu + 1)$ - POSITIVITÉ



$(u+1)$-POSITIVITÉ

Une série formelle $\in \mathbb{Q}(z,u)$ est $(u+1)$-positive si ses coefficients en $(1+u)$ sont positifs.

Prop Pour tout $p \geq 3$, $F(z,u)$ est $(u+1)$-positive.

Ex : $F(z,u)$ pour $p=3$:

$$F(z,u) = (6+4u)z^3 + (140+234u+144u^2+32u^3)z^4 + \dots$$

$$= [2+4(u+1)]z^3 + [18+42(u+1)+48(u+1)^2+32(u+1)^3]z^4 + \dots$$

$(u+1)$ - POSITIVITÉ

Prop Pour tout $p \geq 3$, $F(z,u)$ est $(u+1)$-positive.

$$F(z,u) = \sum_{C \text{ carte } p\text{-valente}} T_C(u+1,1) \; z^{\# \text{faces de } C}$$

où $T_G(\mu,\nu)$ = polynôme de Tutte pour un graphe G :

$$T_G(\mu,\nu) = \sum_{E \subset A_G} (\mu-1)^{c(E)-c(G)} (\nu-1)^{a(E)+c(E)-s(G)}$$

$$\underset{[\text{Tutte}, 54]}{=} \sum_{\text{arbre couvrant}} \mu^{\text{activité interne}} \, \nu^{\text{activité externe}}$$

$(n+1)$-POSITIVITÉ POUR R ET S ?

(u+1)-POSITIVITÉ POUR R ET S ?

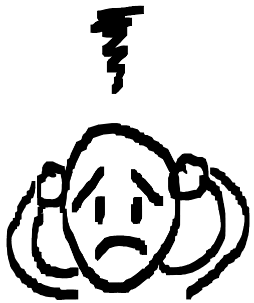
$p = 3$

* $S = 2uz + (30u + 36u^2 + 12u^3)\, z^2 + \ldots$

$$= [-2 + 2(u+1)]\, z + [-6 - 6(u+1) + 12(u+1)^3]\, z^2 + \ldots$$

* $R = z + \underbrace{(6u + 4u^2)}_{(-2-2(u+1)+4(u+1)^2)} z^2 + (140u + 252u^2 + 168u^3 + 40u^4)\, z^3 + \ldots$

S et R ne sont pas $(u+1)$-positives.



$(n+1)$-POSITIVITÉ POUR R ET S ?

$p = 3$

* $S = 2nz + (30n + 36n^2 + 12n^3)\, z^2 + \dots$

  $$\frac{S}{n} = 2z + \left(6 + 12(n+1) + 12(n+1)^2\right) z^2 + \dots$$

* $R = z + (6n + 4n^2)\, z^2 + (140n + 252n^2 + 168n^3 + 40n^4)\, z^3 + \dots$

  $$\frac{R - z}{n} = \left(2 + 4(n+1)\right) z^2 + \left(16 + 36(n+1) + 48(n+1)^2 + 40(n+1)^3\right) z^3 + \dots$$

$\frac{S}{n}$ et $\frac{R-z}{n}$ semblent $(n+1)$-positives.

$(u+1)$-POSITIVITÉ POUR R ET S ?

$p = 3$

* $S = 2uz + (30u + 36u^2 + 12u^3)z^2 + \dots$

$$\frac{S}{u} = 2z + (6 + 12(u+1) + 12(u+1)^2)z^2 + \dots$$

* $R = z + (6u + 4u^2)z^2 + (140u + 252u^2 + 168u^3 + 40u^4)z^3 + \dots$

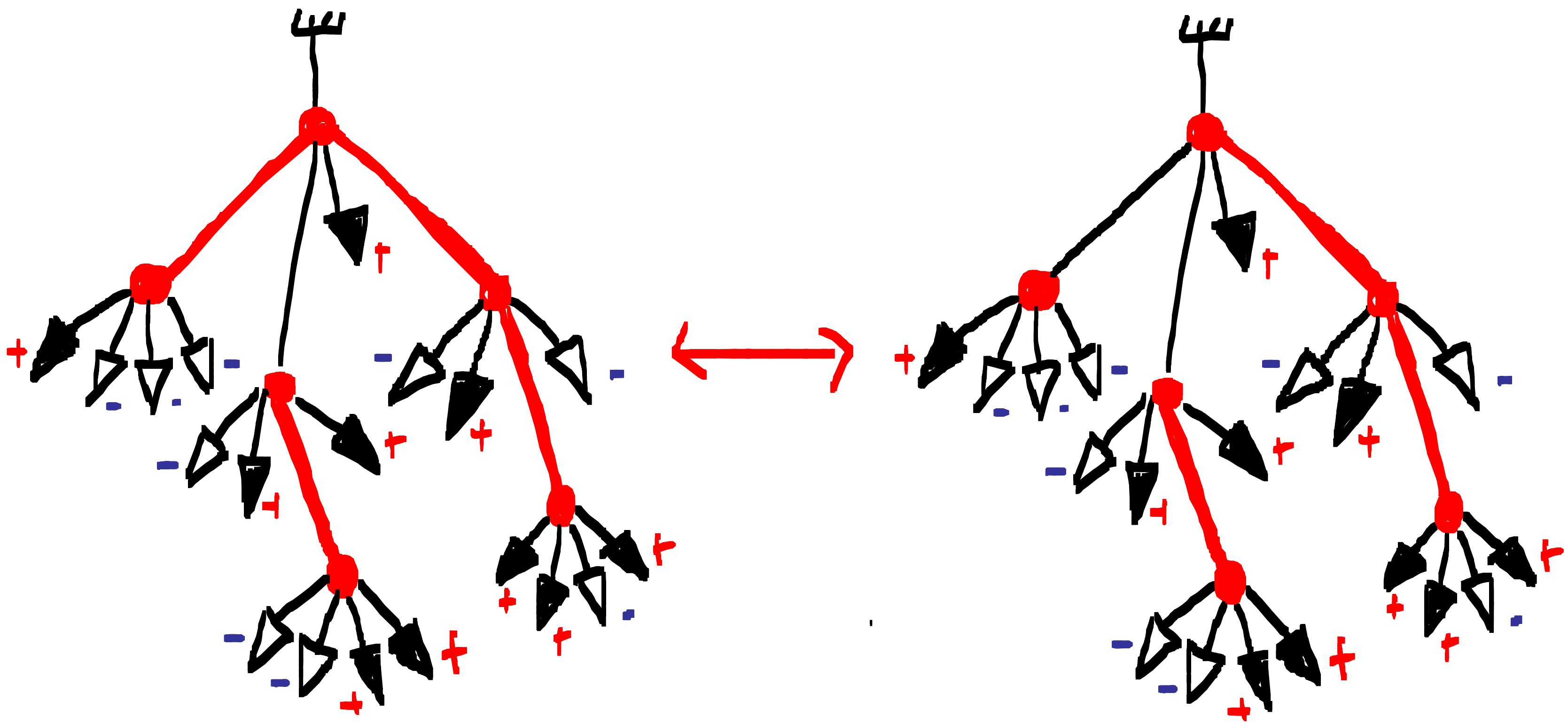
$$\frac{R-z}{u} = (2 + 4(u+1))z^2 + (16 + 36(u+1) + 48(u+1)^2 + 40(u+1)^3)z^3 + \dots$$

$\frac{S}{u}$ et $\frac{R-z}{u}$ semblent $(u+1)$-positives.

Question : Comment prouver la $(u+1)$-positivité ?

MUTATION D'UNE ARÊTE

Soit A un arbre forestier,
la mutation (flip) d'une arête est l'opération
qui consiste à changer son statut
dans la forêt / hors forêt

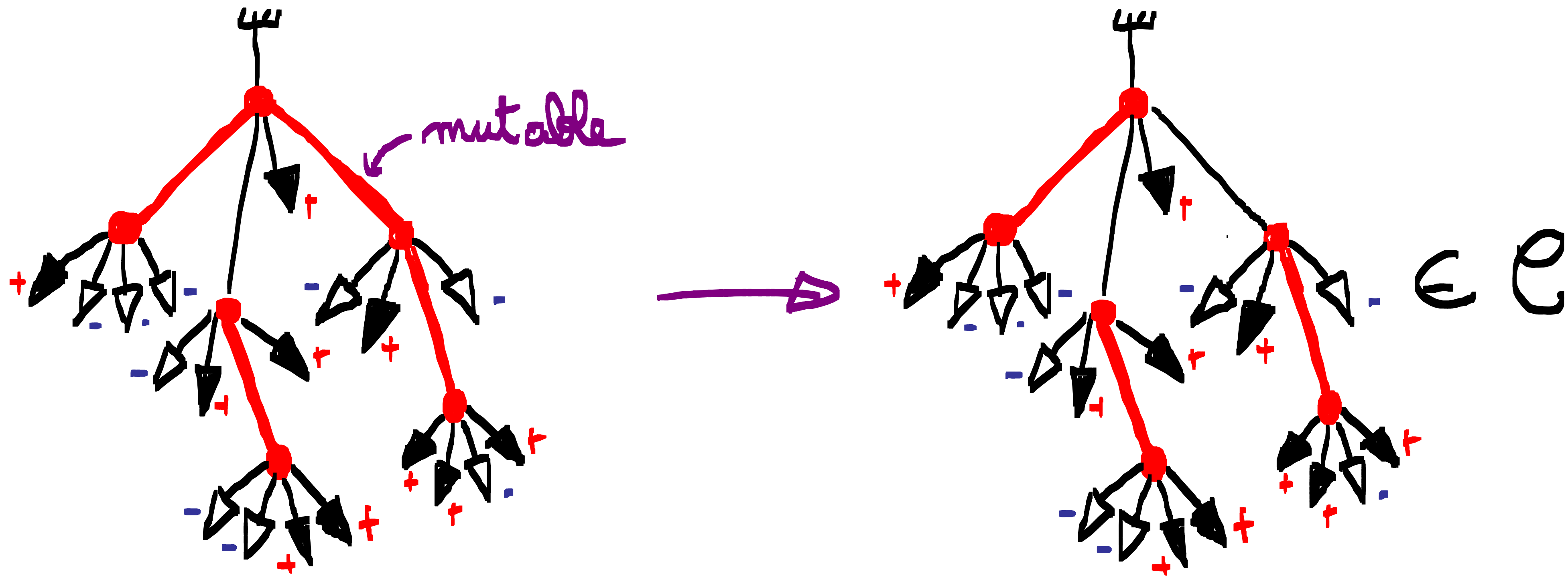


MUTABILITÉ D'UNE ARÊTE

Soient $\mathcal{C}$ une classe d'arbres forestiers
et $A \in \mathcal{C}$,

Une arête de A est mutable si l'arbre forestier obtenu par mutation de cette arête reste dans $\mathcal{C}$.

Ex : $\mathcal{C}$ = R - arbres enrichis

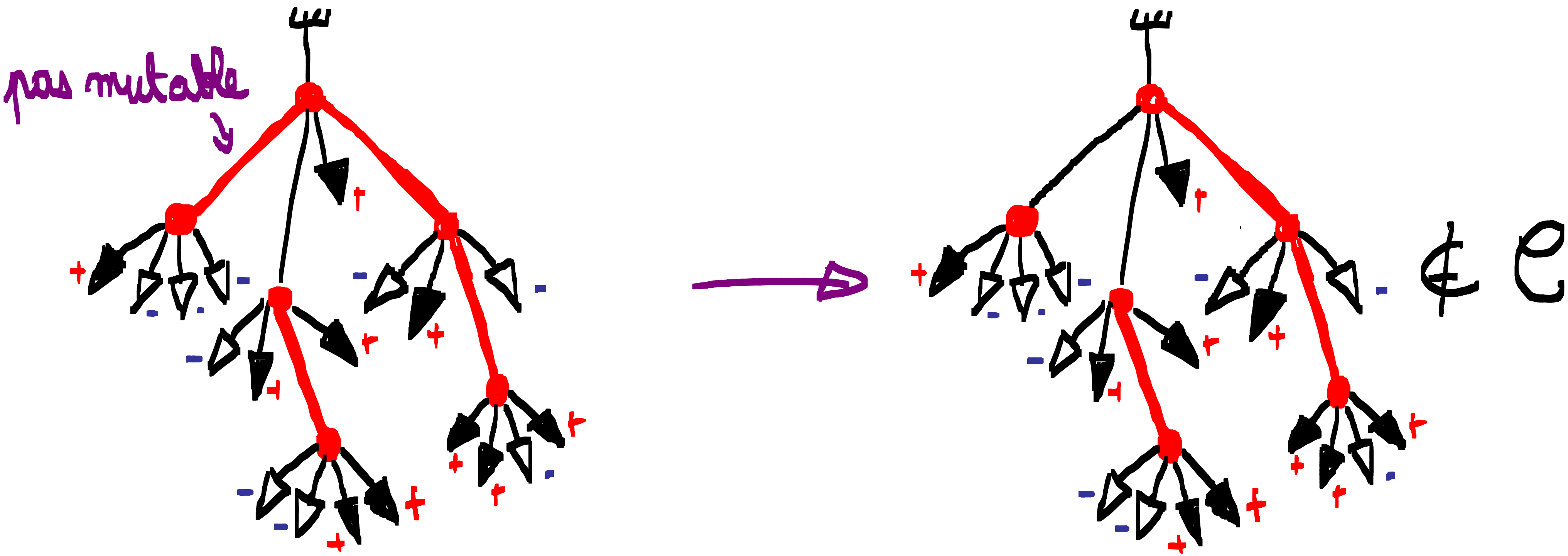


MUTABILITÉ D'UNE ARÊTE

Soient $\mathcal{C}$ une classe d'arbres forestiers et $A \in \mathcal{C}$,

Une arête de A est **mutable** si l'arbre forestier obtenu par mutation de cette arête reste dans $\mathcal{C}$.

Ex: $\mathcal{C}$ = R-arbres enrichis



STABILITÉ

Soit ν un arbre de $\mathcal{C}$ sous sa forêt couvrante (avec au moins un sommet)

ν est dit **stable** si pour tout arbre forestier A de $\mathcal{C}$ ayant pour squelette ν :

(i) Toute arête de A hors de la forêt est mutable.

(ii) L'ensemble des arêtes mutables reste invariant par mutation d'arêtes mutables.

Une classe d'arbres forestiers est **stable** si tous ses arbres dénudés sont stables.

STABILITÉ

Soit v un arbre de $\mathcal{C}$ sans sa forêt couvrante (avec au moins un sommet)

v est dit **stable** si pour tout arbre forestier A de $\mathcal{C}$ ayant pour squelette v :

(i) Toute arête de A hors de la forêt est mutable.

(ii) L'ensemble des arêtes mutables reste invariant par mutation d'arêtes mutables.

Une classe d'arbres forestiers est **stable** si tous ses arbres dénudés sont stables.

<u>Ex</u> : les R-arbres enrichis (moins $\blacktriangledown_{+}$) et les S-arbres enrichis forment des classes <u>stables</u> d'arbres forestiers.

STABILITÉ ⇒ $(u+1)$-POSITIVITÉ.

Soient v un arbre stable de $\mathcal{B}$,

$\mathcal{G} = \{$ arbres forestiers de $\mathcal{B}$ ayant pour support $v \}$

et $T_v(u)$ la SG pour $\mathcal{G}$, comptée selon le nombre de composantes connexes.

Prop Tout arbre de $\mathcal{G}$ a le même nombre d'arêtes mutables, qu'on notera m, et :

$$T_v(u) = u\,(1+u)^m.$$

STABILITÉ $\Rightarrow$ $(u+1)$-POSITIVITÉ.

Soient ν un arbre stable de $\mathcal{C}$,

$\mathcal{C} = \{$ arbres forestiers de $\mathcal{C}$ ayant pour support $\nu\}$

et $T_\nu(u)$ la SG pour $\mathcal{C}$, comptée selon le nombre de composantes connexes.

Prop Tout arbre de $\mathcal{C}$ a le même nombre d'arêtes mutables, qu'on notera m, et :

$$T_\nu(u) = u\,(1+u)^m.$$

Preuve : $\mathcal{C} \underset{\text{bijection}}{\longleftrightarrow} \mathcal{P}(\{\text{arêtes mutables de } A_{max}\})$

où $A_{max} \underset{\text{def}}{=} \nu \oplus$ toutes les arêtes dans la forêt

STABILITÉ $\Rightarrow$ $(u+1)$-POSITIVITÉ.

Soient v un arbre stable de $\mathcal{C}$,

$\mathcal{C} = \{$ arbres forestiers de $\mathcal{C}$ ayant pour support $v\}$

et $T_v(u)$ la SG pour $\mathcal{C}$, comptée selon le nombre de composantes connexes.

Prop Tout arbre de $\mathcal{C}$ a le même nombre d'arêtes mutables, qu'on notera m, et :

$$T_v(u) = u\,(1+u)^m.$$

Cor : Après division par u, la SG d'une classe stable d'arbres forestiers est $(u+1)$-positive.

STABILITÉ $\Rightarrow$ $(u+1)$-POSITIVITÉ.

Soient v un arbre stable de $\mathcal{C}$,

$\mathcal{C}' = \{$ arbres forestiers de $\mathcal{C}$ ayant pour support $v\}$

et $T_v(u)$ la SG pour $\mathcal{C}'$, comptée selon le nombre de composantes connexes.

Prop : Tout arbre de $\mathcal{C}'$ a le même nombre d'arêtes mutables, qu'on notera m, et :

$$T_v(u) = u\,(1+u)^m .$$

Cor : Après division par u, la SG d'une classe stable d'arbres forestiers est $(u+1)$-positive.

Cor 2 : $(R-z)/u$ et S/u sont $(u+1)$-positives.

LA SÉRIE $\tilde{S}$

$u \in [-1, 0[$ est fixé, on définit $\tilde{S}$ comme l'unique série formelle telle que $\tilde{S}(0) = 0$ et :

$$\tilde{S}(z) = u \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t_{2i+j+1} \binom{2i+j}{i, i, j} z^i \tilde{S}^j$$

LA SÉRIE $\tilde{S}$

$u \in [-1, 0[$ est fixé, on définit $\tilde{S}$ comme l'unique série formelle telle que $\tilde{S}(0) = 0$ et :

$$\tilde{S}(z) = u \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t_{2i+j+1} \binom{2i+j}{i, i, j} z^i \tilde{S}^j$$

Question : Signe de $\tilde{S}$?

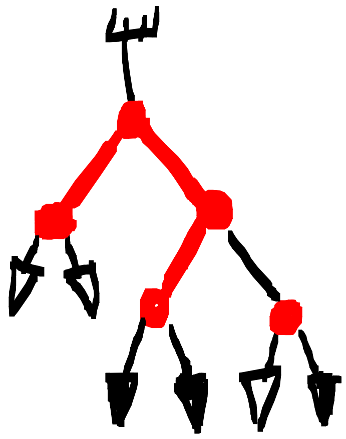
LA SÉRIE $\tilde{S}$

$u \in [-1,0[$ est fixé, on définit $\tilde{S}$ comme l'unique série formelle telle que $\tilde{S}(0)=0$ et :

$$\tilde{S}(z) = u \sum_{i\geq 0} \sum_{j \geq 0} t_{2i+j+1} \binom{2i+j}{i,i,j} z^i \tilde{S}^j$$

Question : Signe de $\tilde{S}$?

$\tilde{S}(z)$ = SG des S-arbres enrichis où chaque composante est incidente à autant de $\blacktriangledown$ que de $\triangledown$ –



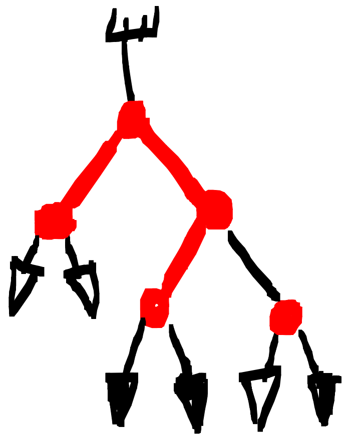
LA SÉRIE $\tilde{S}$

$u \in [-1, 0[$ est fixé, on définit $\tilde{S}$ comme l'unique série formelle telle que $\tilde{S}(0) = 0$ et :

$$\tilde{S}(z) = u \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t_{2i+j+1} \binom{2i+j}{i,i,j} z^i \tilde{S}^j$$

Question : Signe de $\tilde{S}$?

$\tilde{S}(z) =$ SG des S-arbres enrichis où chaque composante est incidente à autant de $\downarrow$ que de $\downarrow$ –



C'est stable !

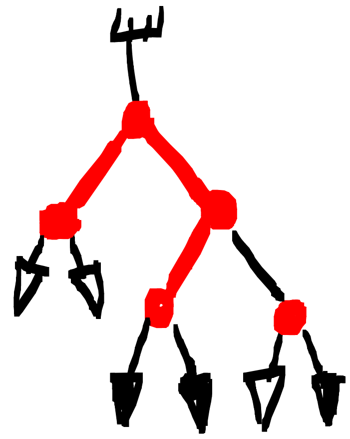
LA SÉRIE $\tilde{S}$

$u \in [-1,0[$ est fixé, on définit $\tilde{S}$ comme l'unique série formelle telle que $\tilde{S}(0)=0$ et :

$$\tilde{S}(z) = u \sum_{i\geq 0} \sum_{j \geq 0} t_{2i+j+1} \binom{2i+j}{i,\,i,\,j} z^i \tilde{S}^j$$

<u>Question</u> : Signe de $\tilde{S}$?

$\tilde{S}(z) =$ SG des S-arbres enrichis où chaque composante est incidente à autant de $\blacktriangledown$ que de $\triangledown$ −



C'est stable !

$\tilde{S}/u$ $(u+1)$-positive $\Rightarrow$ $\boxed{\tilde{S}<0}$

LA SÉRIE $\tilde{S}$

$u \in [-1, 0[$ est fixé, on définit $\tilde{S}$ comme l'unique série formelle telle que $\tilde{S}(0) = 0$ et :

$$\tilde{S}(z) = u \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t_{2i+j+1} \binom{2i+j}{i,i,j} z^i \tilde{S}^j = u\,\phi(\tilde{S})$$

Question : Quand s'annule $u\,\phi'(\tilde{S}) - 1$?

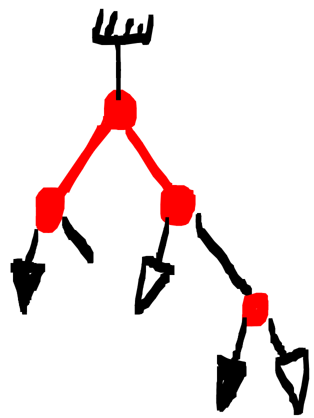
LA SÉRIE $\tilde{S}$

$u \in [-1,0[$ est fixé, on définit $\tilde{S}$ comme l'unique série formelle telle que $\tilde{S}(0)=0$ et :

$$\tilde{S}(z) = u \sum_{i\geq 0} \sum_{j \geq 0} t_{2i+j+1} \binom{2i+j}{i,i,j} z^i \tilde{S}^j = u\,\phi(\tilde{S})$$

Question : Quand s'annule $u\,\phi'(\tilde{S}) - 1$?

$u\,\phi'(\tilde{S}) =$ SG des S-arbres précédents avec une demi-arête accrochée à la composante racine



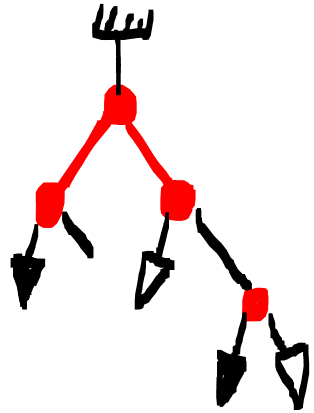
LA SÉRIE $\tilde{S}$

$u \in [-1, 0[$ est fixé, on définit $\tilde{S}$ comme l'unique série formelle telle que $\tilde{S}(0)=0$ et :

$$\tilde{S}(z) = u \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} t_{2i+j+1} \binom{2i+j}{i,i,j} z^i \tilde{S}^j = u\,\phi(\tilde{S})$$

Question : Quand s'annule $u\,\phi'(\tilde{S}) - 1$?

$u\,\phi'(\tilde{S}) =$ SG des S-arbres précédents avec une demi-arête accrochée à la composante racine



C'est stable !

$\phi'(\tilde{S})$ $(u+1)$ - positif $\Rightarrow$ $\boxed{u\,\phi'(\tilde{S}) - 1 < 0}$

$(u+1)$-POSITIVITÉ DE $T_G(u+1,1)$

<u>Question</u> : Peut-on retrouver la $(u+1)$-positivité de

$$T_G(u+1,1) = \sum_{\substack{\text{forêt} \\ \text{couvrante de } G}} u^{\#\text{comp. con.} - 1}$$

pour tout graphe G ?

$(u+1)$-POSITIVITÉ DE $T_G(u+1,1)$

<u>Question</u> : Peut-on retrouver la $(u+1)$-positivité de

$$T_G(u+1,1) = \sum_{\substack{\text{forêt} \\ \text{couvrante de } G}} u^{\#\text{comp. con.} - 1},$$

pour tout graphe G ?

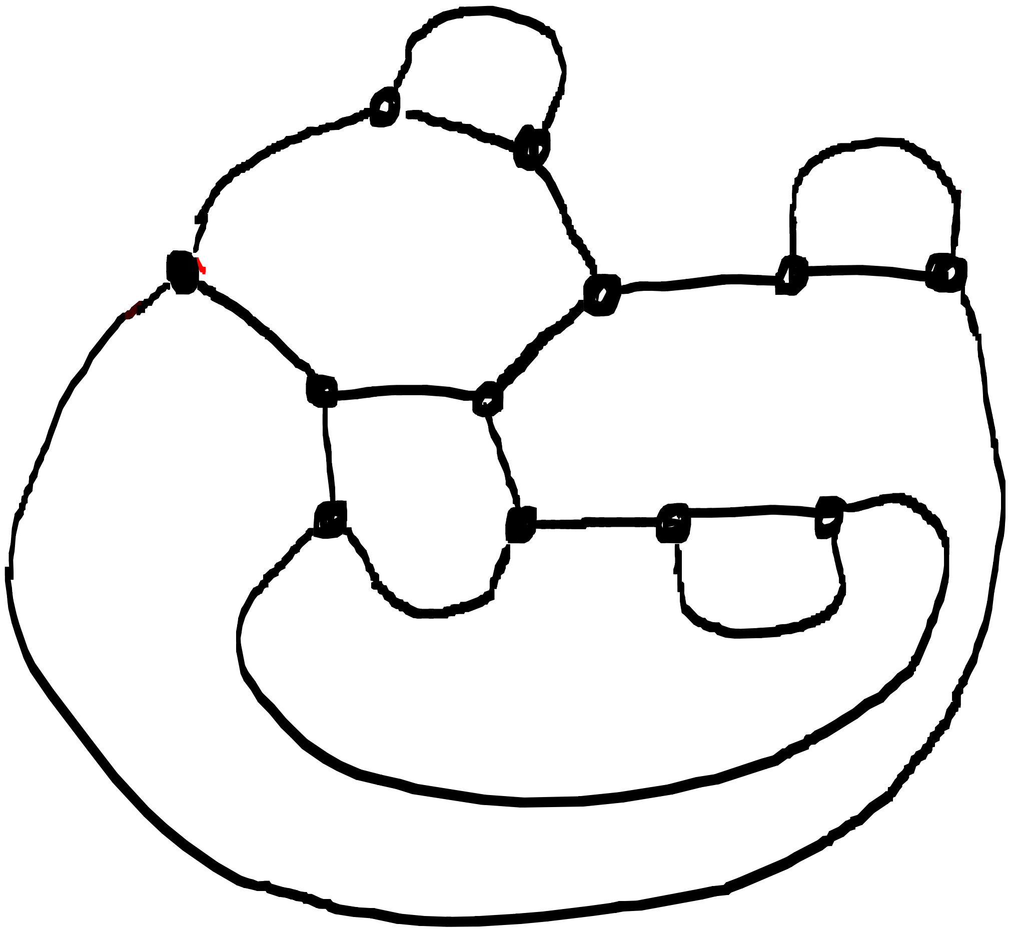
<u>Réponse</u> : OUI, si G est planaire.

$(u+1)$-POSITIVITÉ DE $T_G(u+1,1)$

<u>Question</u> : Peut-on retrouver la $(u+1)$-positivité de

$$T_G(u+1,1) = \sum_{\substack{\text{forêt} \\ \text{couvrante de } G}} u^{\#\text{comp. con.} - 1} \quad ?$$

Ex :

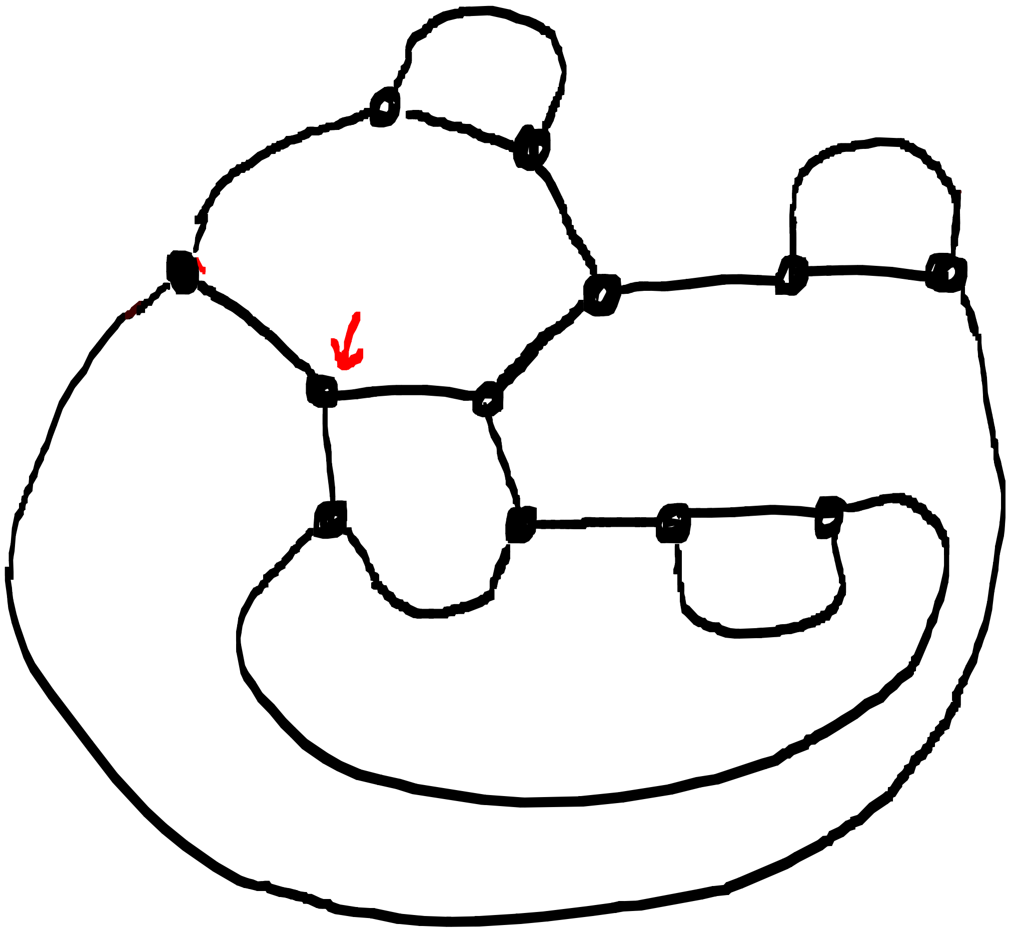


$(u+1)$-POSITIVITÉ DE $T_G(u+1,1)$

<u>Question</u> : Peut-on retrouver la $(u+1)$-positivité de

$$T_G(u+1,1) = \sum_{\substack{\text{forêt} \\ \text{couvrante de } G}} u^{\#\text{comp. con.} - 1} \quad ?$$

Ex :

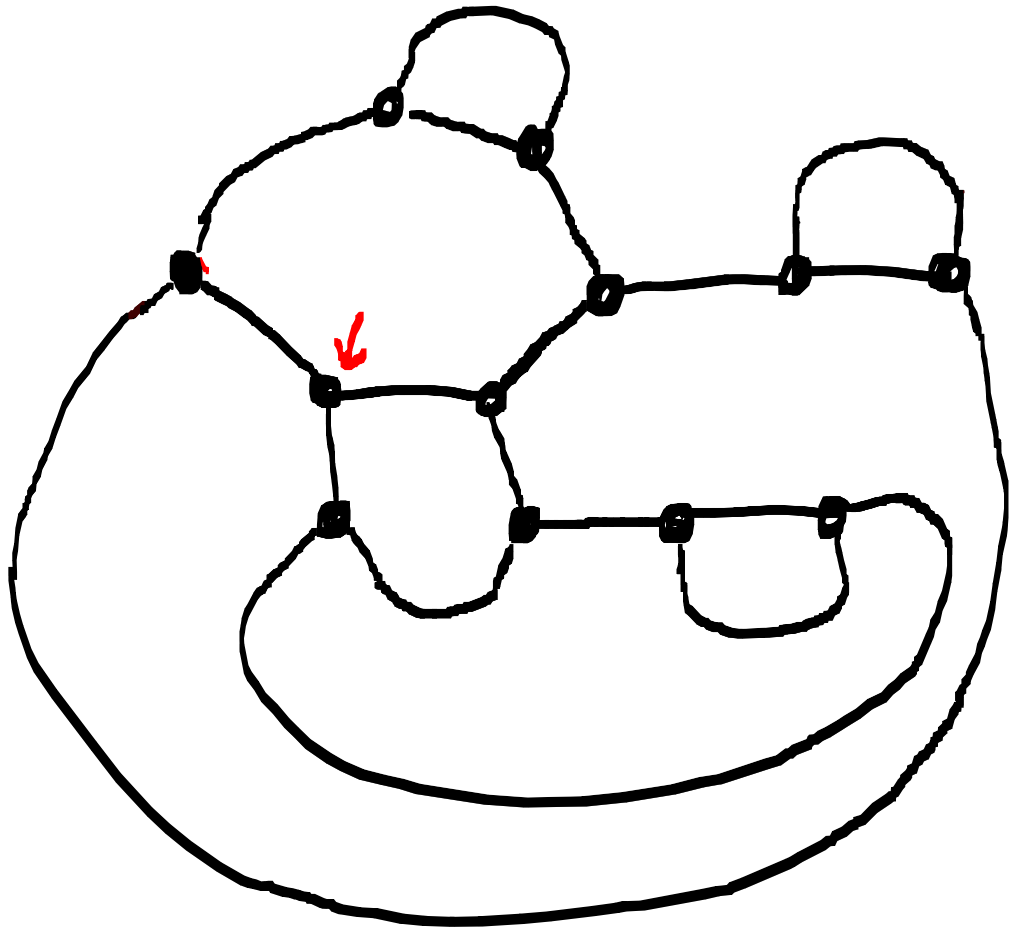


$(u+1)$-POSITIVITÉ DE $T_G(u+1,1)$

<u>Question</u> : Peut-on retrouver la $(u+1)$-positivité de

$$T_G(u+1,1) = \sum_{\substack{\text{forêt} \\ \text{couvrante de } G}} u^{\#\text{comp. con.} - 1} \quad ?$$

Ex :

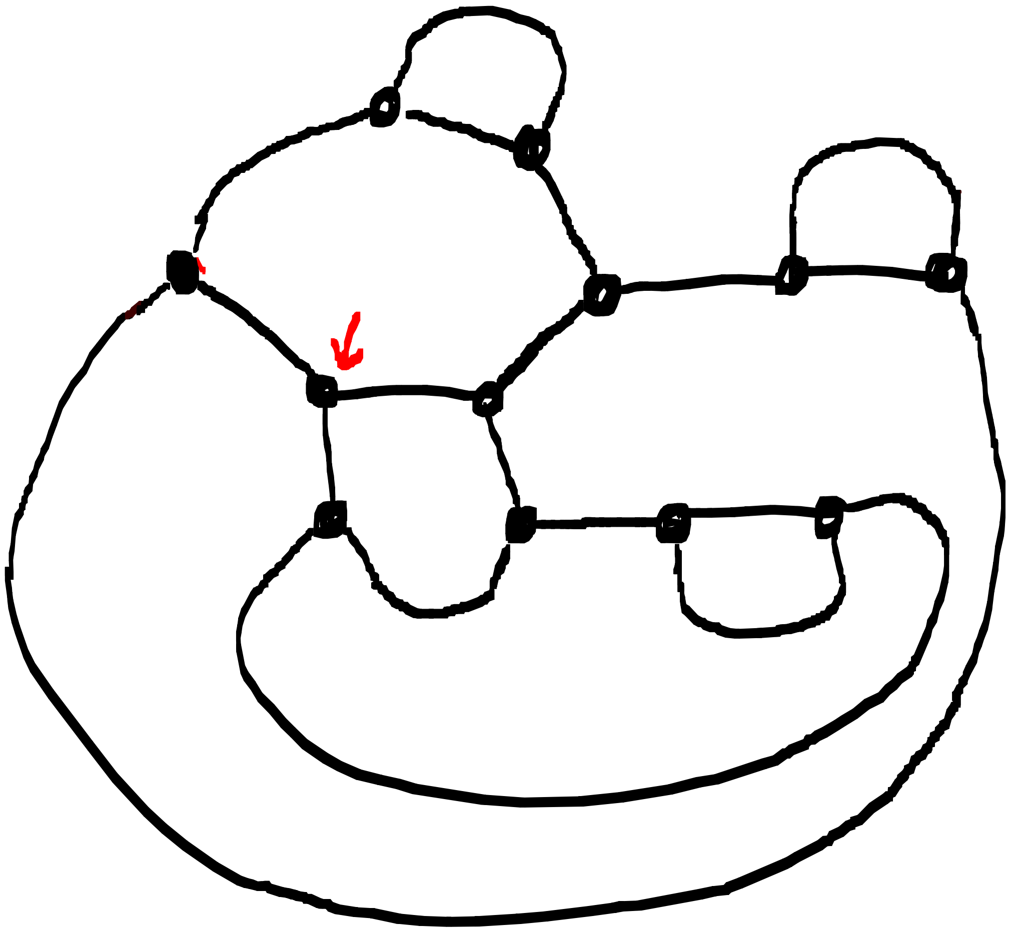


$(u+1)$-POSITIVITÉ DE $T_G(u+1,1)$

<u>Question</u> : Peut-on retrouver la $(u+1)$-positivité de

$$T_G(u+1,1) = \sum_{\substack{\text{forêt} \\ \text{couvrante de } G}} u^{\#\text{comp. con.} - 1} \;?$$

Ex :



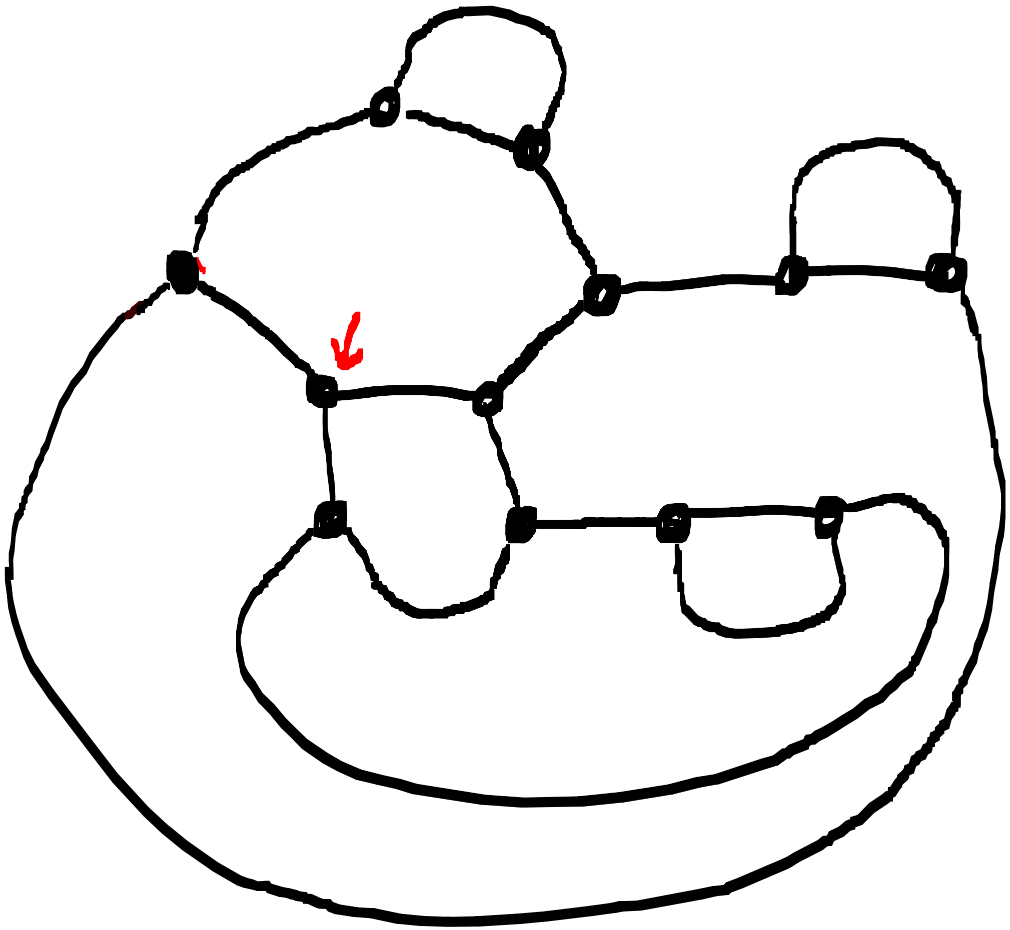
$M_G =$ ×

$(u+1)$-POSITIVITÉ DE $T_G(u+1,1)$

Question : Peut-on retrouver la $(u+1)$-positivité de

$$T_G(u+1,1) = \sum_{\substack{\text{forêt} \\ \text{couvrante de } G}} u^{\#\text{comp. con.} - 1} \quad ?$$

Ex :

$M_G =$ ✗ 

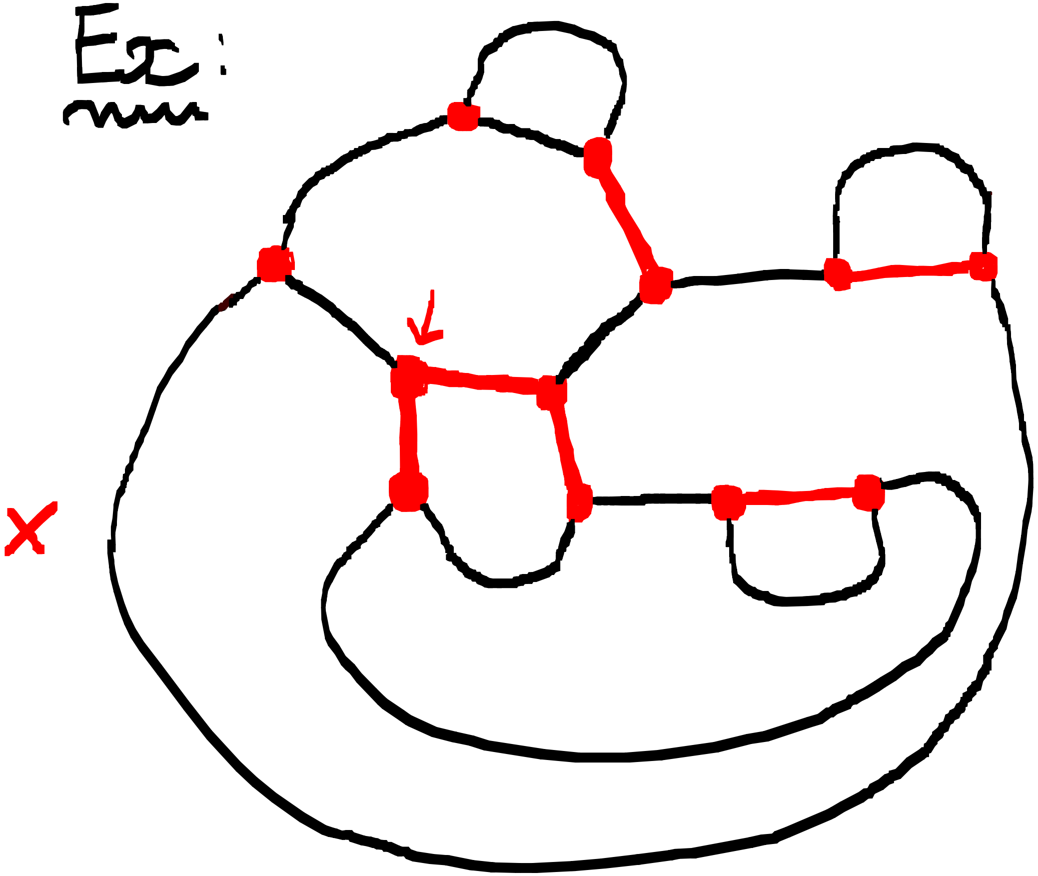
Ensemble des forêts couvrantes sur M_G ?

(u+1)-POSITIVITÉ DE $T_G(u+1,1)$

<u>Question</u> : Peut-on retrouver la (u+1)-positivité de

$$T_G(u+1,1) = \sum_{\substack{\text{forêt} \\ \text{couvrante de } G}} u^{\#\text{comp.con.}-1} \;?$$

<u>Ex</u> :

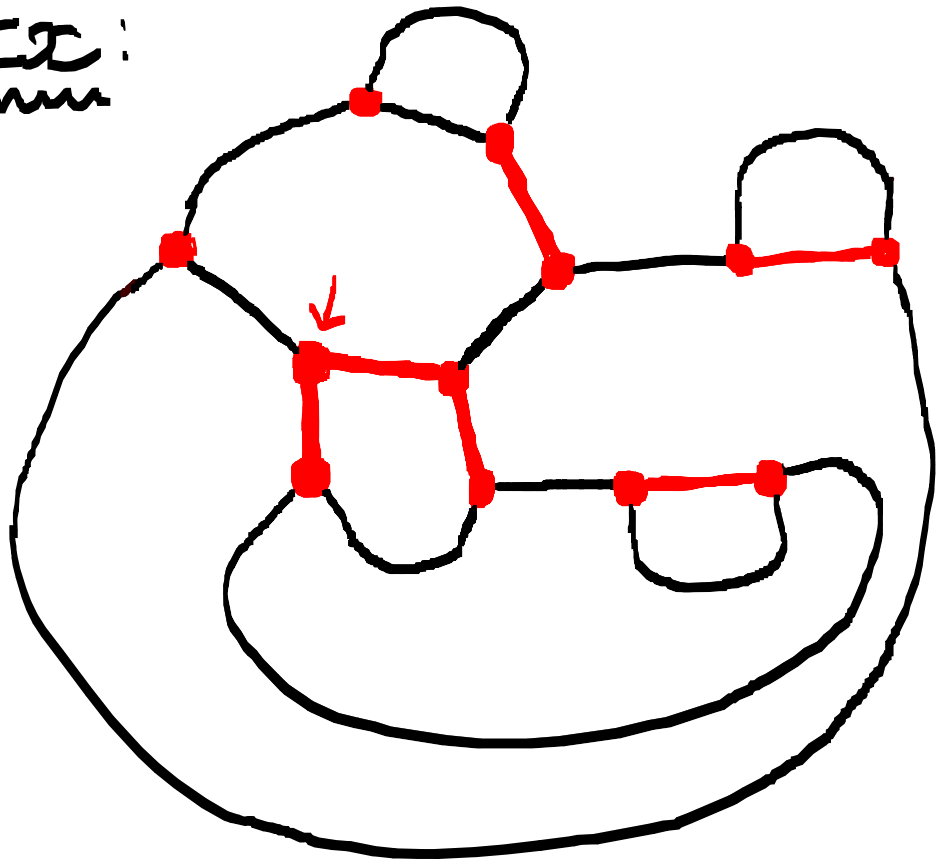


$(u+1)$-POSITIVITÉ DE $T_G(u+1,1)$

Question : Peut-on retrouver la $(u+1)$-positivité de

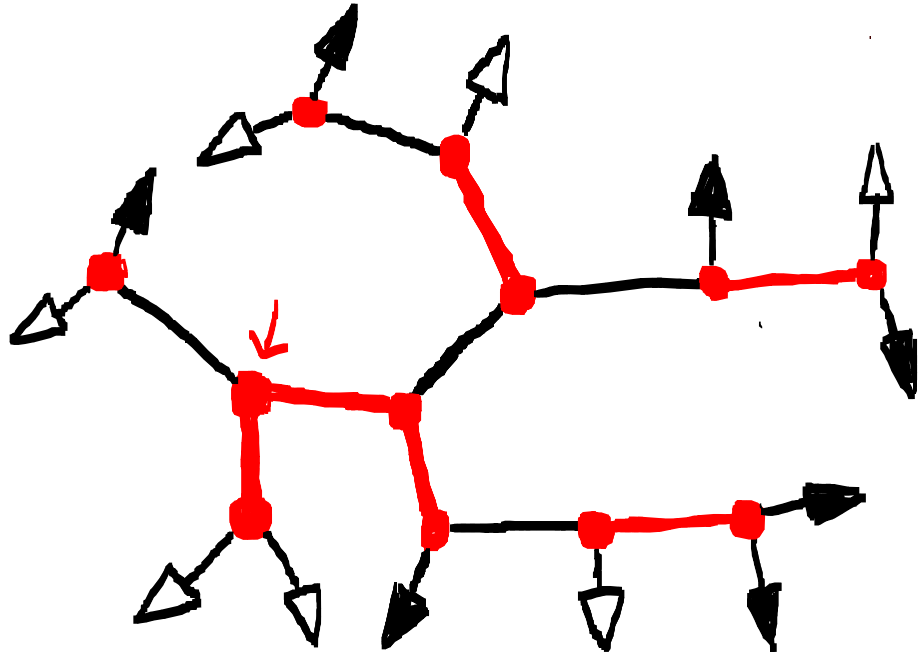
$$T_G(u+1,1) = \sum_{\substack{\text{forêt} \\ \text{couvrante de } G}} u^{\#\text{comp. con.} - 1} \quad ?$$

Ex :



$\times$

$=$



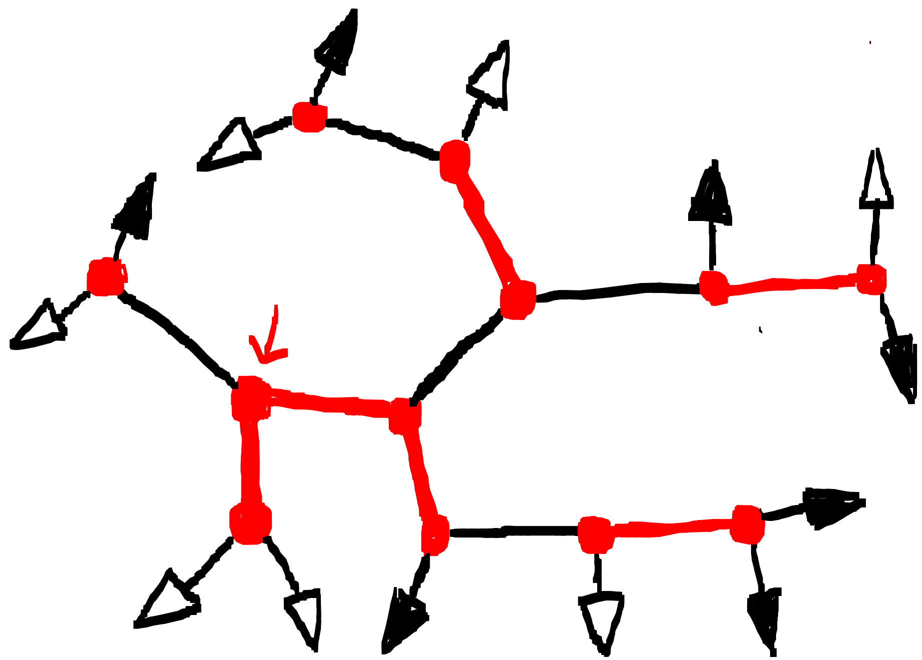
$(u+1)$-POSITIVITÉ DE $T_G(u+1,1)$

<u>Question</u> : Peut-on retrouver la $(u+1)$-positivité de

$$T_G(u+1,1) = \sum_{\substack{\text{forêt} \\ \text{couvrante de } G}} u^{\#\text{comp. con.} - 1} \quad ?$$

<u>Ex</u> : On prouve :

$$u\,T_G(u+1,1) = $$ SG des arbres qui ressemblent à → et dont la clôture est une forêt couvrante de M_G.



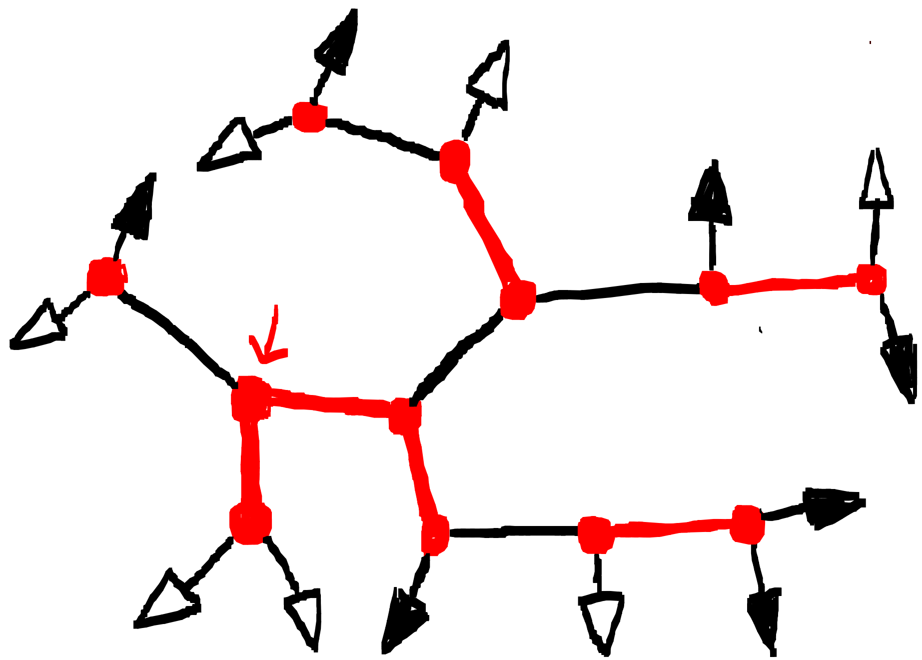
$(u+1)$-POSITIVITÉ DE $T_G(u+1,1)$

<u>Question</u> : Peut-on retrouver la $(u+1)$-positivité de

$$T_G(u+1,1) = \sum_{\substack{\text{forêt} \\ \text{couvrante de } G}} u^{\#\text{comp. con.} - 1} \quad ?$$

<u>Ex</u> : On prouve :

$$u\,T_G(u+1,1) = $$ SG des arbres qui ressemblent à → et dont la clôture est une forêt couvrante de M_G.



C'est stable ! $\Rightarrow T_G(u+1,1)$ $(u+1)$-positif

POUR ALLER PLUS LOIN ?

- $(u+1)$-positivité de $T_G(u+1, 1)$ en genre supérieur ?
- Généralisation si on pondère maintenant par $T_G(u+1, v+1)$?


MERCI !