Julien COURTIEL (LIPN, Paris 13)

COMPTONS LES DIAGRAMMES CONNEXES DE CORDES

Séminaire ALGORITHMIQUE (Caen)

Travaux coréalisés avec : Karen YEATS (Waterloo), Noam ZEILBERGER (Birmingham)

Julien COURTIEL (LIPN, Paris 13)

COMPTONS LES DIAGRAMMES CONNEXES DE CORDES

Séminaire ALGORITHMIQUE (Caen)

Travaux coréalisés avec : Karen YEATS (Waterloo), Noam ZEILBERGER (Birmingham)

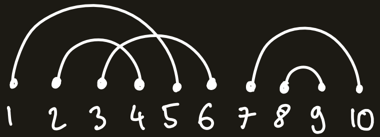
2CTVKG +

Culture générale sur les diagrammes de cordes

DÉFINITIONS

diagramme de n cordes

= appariement de l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$

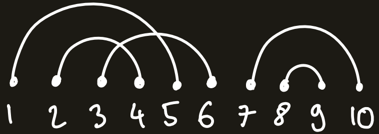


nombre de diagrammes à n cordes =

DÉFINITIONS

diagramme de n cordes

= appariement de l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$



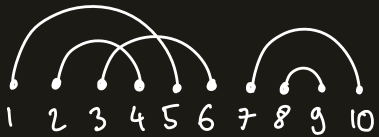
nombre de diagrammes à n cordes = $(2n-1)!!$

$= (2n-1)\times(2n-3)\times\dots\times 3\times 1$

DÉFINITIONS

diagramme de n cordes

= appariement de l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$



informatique

physique théorique

cumulants

énumération des diagrammes de cordes (plus fine)

théorie des noeuds

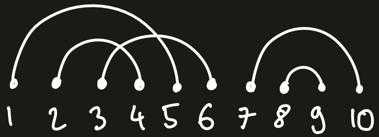
bioinformatique

...

DÉFINITIONS

diagramme de n cordes

$=$ appariement de l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$

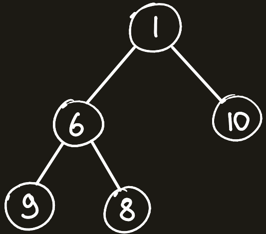


énumération des diagrammes de cordes (plus fine)

- informatique
- physique théorique
- cumulants
- théorie des noeuds
- bioinformatique
- ...

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES … EN INFORMATIQUE ?

Application 1 — File de priorité (tas)



Opérations :

- $+_k$: Ajouter un élément de valeur k
- $-_{min}$: Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_8 \; +_3 \; +_2 \; +_{10} \; -_{min} \; +_9 \; -_{min} \; +_6 \; +_1$

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES … EN INFORMATIQUE ?

Application 1

File de priorité (tas)

8

3

Opérations :

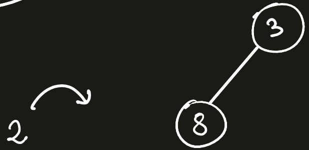
$+_k$ Ajouter un élément de valeur k

$-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_8$ $+_3$ $+_2$ $+_{10}$ $-_{min}$ $+_9$ $-_{min}$ $+_6$ $+_1$

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES … EN INFORMATIQUE ?

Application 1 File de priorité (tas)



Opérations :

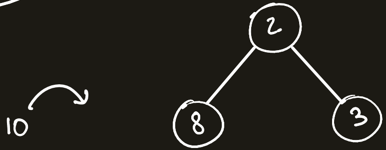
- $+_k$ Ajouter un élément de valeur k
- $-_{\min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_8$ $+_3$ $+_2$ $+_{10}$ $-_{\min}$ $+_9$ $-_{\min}$ $+_6$ $+_1$

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES ... EN INFORMATIQUE ?

Application 1

File de priorité (tas)



Opérations :

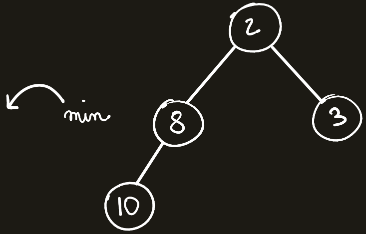
$+_k$ Ajouter un élément de valeur k

$-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_8$ $+_3$ $+_2$ $+_{10}$ $-_{min}$ $+_9$ $-_{min}$ $+_6$ $+_1$

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES ... EN INFORMATIQUE ?

Application 1 File de priorité (tas)



Opérations :

$+_k$ Ajouter un élément de valeur k

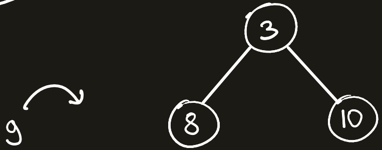
$-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_8$ $+_3$ $+_2$ $+_{10}$ $-_{min}$ $+_9$ $-_{min}$ $+_6$ $+_1$

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES ... EN INFORMATIQUE ?

Application 1

File de priorité (tas)



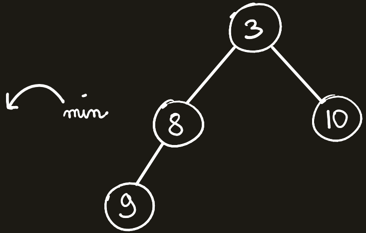
Opérations :

- $+_k$ Ajouter un élément de valeur k
- $-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_8$ $+_3$ $+_2$ $+_{10}$ $-_{min}$ $+_9$ $-_{min}$ $+_6$ $+_1$

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES … EN INFORMATIQUE ?

Application 1 File de priorité (tas)



Opérations :

$+_k$ Ajouter un élément de valeur k

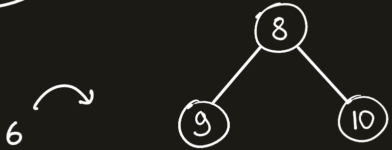
$-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_8 \; +_3 \; +_2 \; +_{10} \; -_{min} \; +_9 \; -_{min} \; +_6 \; +_1$

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES … EN INFORMATIQUE ?

Application 1

File de priorité (tas)



Opérations :

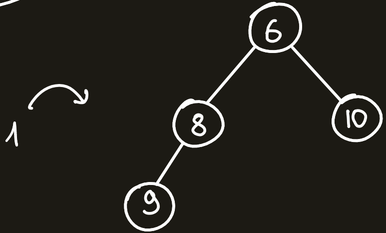
$+_k$ Ajouter un élément de valeur k

$-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_8 \quad +_3 \quad +_2 \quad +_{10} \quad -_{min} \quad +_9 \quad -_{min} \quad +_6 \quad +_1$

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES … EN INFORMATIQUE ?

Application 1 File de priorité (tas)



Opérations :

$+_k$ Ajouter un élément de valeur k

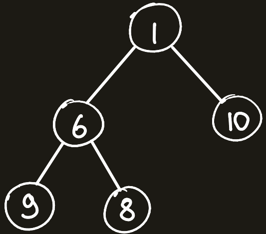
$-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_8$ $+_3$ $+_2$ $+_{10}$ $-_{min}$ $+_9$ $-_{min}$ $+_6$ $+_1$

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES … EN INFORMATIQUE ?

Application 1

File de priorité (tas)



Opérations :

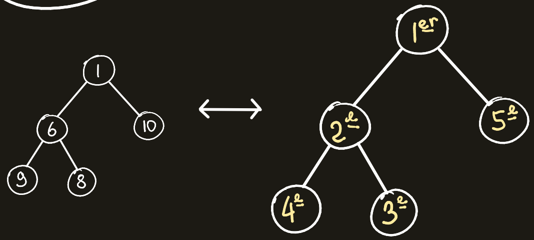
$+_k$ Ajouter un élément de valeur k

$-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_8$ $+_3$ $+_2$ $+_{10}$ $-_{min}$ $+_9$ $-_{min}$ $+_6$ $+_1$

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES … EN INFORMATIQUE ?

Application 1 — File de priorité (tas)



Opérations :

- $+_k$ Ajouter un élément en position k, $1 \leq k \leq \text{taille file} + 1$
- $-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_1 \; +_1 \; +_1 \; +_4 \; -_{min} \; +_3 \; -_{min} \; +_1 \; +_1$

Maintenant on regarde les positions relatives

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES ... EN INFORMATIQUE ?

Application 1

File de priorité (tas)

1er

8

3 ↷

⟷

Opérations :

$+_k$ Ajouter un élément en position k, $1 \leq k \leq$ taille file $+ 1$

$-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_1 \; +_1 \; +_1 \; +_4 \; -_{min} \; +_3 \; -_{min} \; +_1 \; +_1$

Maintenant on regarde les positions relatives

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES ... EN INFORMATIQUE ?

Application 1 File de priorité (tas)

Opérations :

$+_k$ Ajouter un élément en position k
$1 \leq k \leq$ taille file $+ 1$

$-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_1 \; +_1 \; +_1 \; +_4 \; -_{min} \; +_3 \; -_{min} \; +_1 \; +_1$

Maintenant on regarde les positions relatives

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES … EN INFORMATIQUE ?

Application 1 — File de priorité (tas)

Opérations :

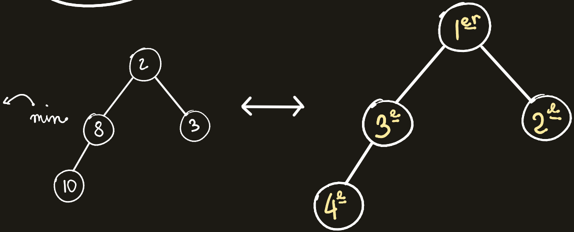
- $+_k$ Ajouter un élément en position k, $1 \leq k \leq$ taille file $+ 1$
- $-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_1 \; +_1 \; +_1 \; +_4 \; -_{min} \; +_3 \; -_{min} \; +_1 \; +_1$

Maintenant on regarde les positions relatives

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES … EN INFORMATIQUE ?

Application 1 File de priorité (tas)



Opérations :

$+_k$ Ajouter un élément en position k
$1 \leq k \leq$ taille file $+ 1$

$-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

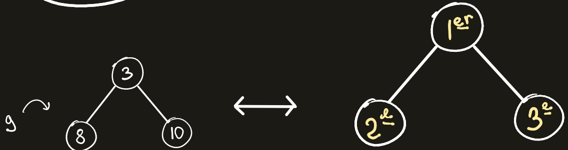
Histoire : $+_1 \; +_1 \; +_1 \; +_4 \; -_{min} \; +_3 \; -_{min} \; +_1 \; +_1$

Maintenant on regarde les positions relatives

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES ... EN INFORMATIQUE ?

Application 1

File de priorité (tas)



Opérations :

$+_k$ Ajouter un élément en position k
$1 \leq k \leq$ taille file $+ 1$

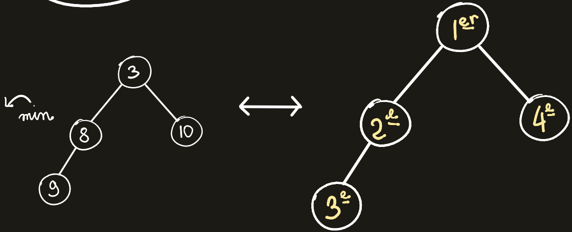
$-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_1 \ +_1 \ +_1 \ +_4 \ -_{min} \ +_3 \ -_{min} \ +_1 \ +_1$

Maintenant on regarde les positions relatives

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES ... EN INFORMATIQUE ?

Application 1 File de priorité (tas)



Opérations :

- $+_k$ Ajouter un élément en position k, $1 \leq k \leq$ taille file $+ 1$
- $-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_1 \; +_1 \; +_1 \; +_4 \; -_{min} \; +_3 \; -_{min} \; +_1 \; +_1$

Maintenant on regarde les positions relatives

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES … EN INFORMATIQUE ?

Application 1 File de priorité (tas)

Opérations :

$+_k$ Ajouter un élément en position k

$1 \leq k \leq$ taille file $+1$

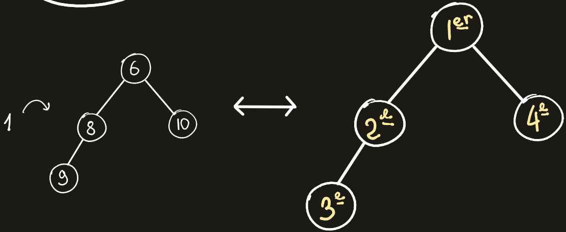
$-_{\min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_1 \ +_1 \ +_1 \ +_4 \ -_{\min} \ +_3 \ -_{\min} \ +_1 \ +_1$

Maintenant on regarde les positions relatives

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES … EN INFORMATIQUE ?

Application 1 File de priorité (tas)



Opérations :

$+_k$ Ajouter un élément en position k
$1 \leq k \leq$ taille file $+ 1$

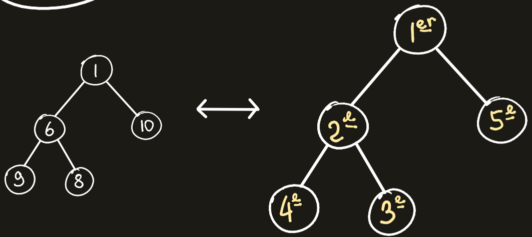
$-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_1 \ +_1 \ +_1 \ +_4 \ -_{min} \ +_3 \ -_{min} \ +_1 \ +_1$

Maintenant on regarde les positions relatives

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES … EN INFORMATIQUE ?

Application 1 File de priorité (tas)



Opérations :

- $+_k$ Ajouter un élément en position k
  $1 \leq k \leq$ taille file $+ 1$
- $-_{min}$ Supprimer le plus petit élément

Histoire : $+_1 \; +_1 \; +_1 \; +_4 \; -_{min} \; +_3 \; -_{min} \; +_1 \; +_4$

Maintenant on regarde les positions relatives

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES … EN INFORMATIQUE ?

Application 1 — File de priorité (tas)

Histoires terminant en 0 $\longleftrightarrow$ Diagrammes de cordes

[Flajolet Françon Vuillemin]

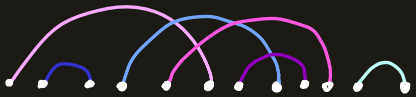
Diagramme : 

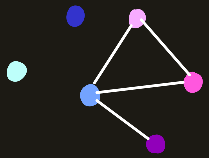
Histoire : $+_1 \; +_1 \; +_1 \; +_4 \; -_{\min} \; +_3 \; -_{\min} \; +_1 \; +_1 \; -_{\min} \; -_{\min} \; -_{\min} \; -_{\min} \; -_{\min}$

POURQUOI COMPTER DES DIAGRAMMES ... EN INFORMATIQUE ?

Application 2 — Modèle biaisé $G(n, m)$ [Acan Pittel]

Diagramme aléatoire → Graphe d'intersection





n = nombre de cordes
m = nombre de croisements

n = nombre de sommets
m = nombre d'arêtes

DÉFINITIONS

diagramme de n cordes

= appariement de l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$

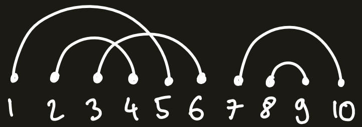
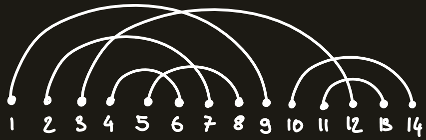


diagramme connexe =

"tout tient en un bloc."



DÉFINITIONS

diagramme de n cordes = appariement de l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$

3 composantes connexes :

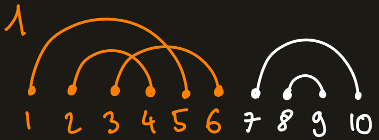
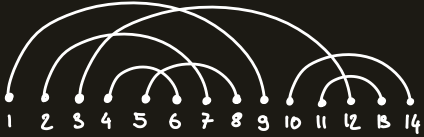


diagramme connexe = "tout tient en un bloc."



DÉFINITIONS

diagramme de n cordes

$=$ appariement de l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$

3 composantes connexes :

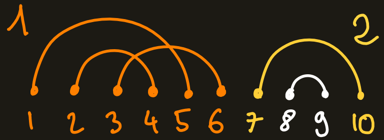
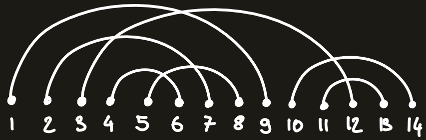


diagramme connexe =

"tout tient en un bloc."

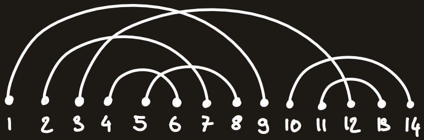


DÉFINITIONS

diagramme de n cordes = appariement de l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$

3 composantes connexes:

diagramme connexe = "tout tient en un bloc."



DÉFINITIONS

Enumération des diagrammes connexes :

PREHISTOIRE — FORMULES EXPLICITES — COMBINATOIRE ANALYTIQUE

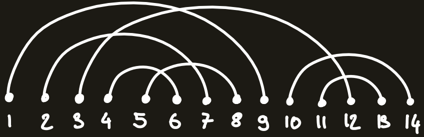
1952
Touchard

1978
Stein Everett

2000
Flajolet Noy

diagramme connexe =

“tout tient en un bloc.”



ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

nombre de diagrammes connexes à n cordes $= c_n$

$c_1 = 1 \quad c_2 = 1 \quad c_3 = 4 \quad c_4 = 27 \quad c_5 = 248$

Pour $n = 3$:

Formule de récurrence [Stein]

$$c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$?

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

<u>Formule</u>: $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

$k \leftarrow n-k$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2(n-k)-1) \times c_{n-k} \times c_k$$

<u>Formule</u>: $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

$k \leftarrow n-k$

$+$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2(n-k)-1) \times c_{n-k} \times c_k$$

$$2c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2) \times c_k \times c_{n-k}$$

Formule : $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $\displaystyle c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

$k \leftarrow n-k$

$+$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2(n-k)-1) \times c_{n-k} \times c_k$$

$$2\,c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2) \times c_k \times c_{n-k}$$

$\% \; 2$

Formule: $\displaystyle c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

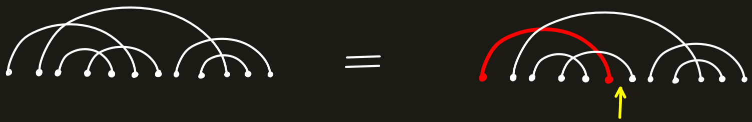
Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

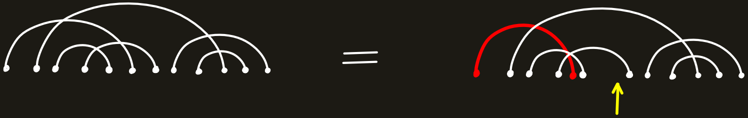
ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



ÉNUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

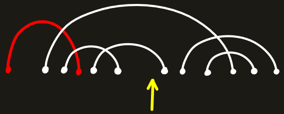
Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

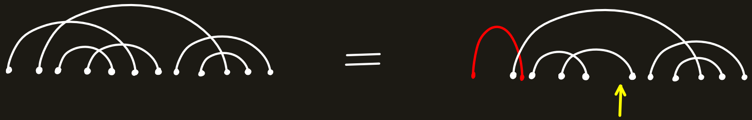
Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

$=$



ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

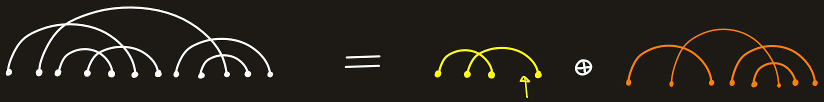


ÉNUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

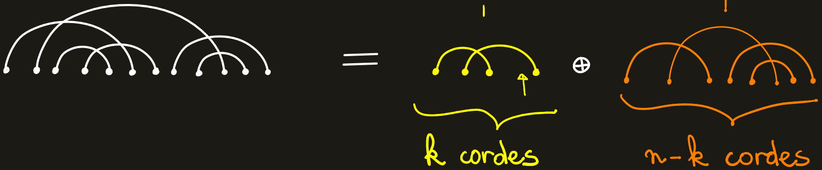
ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

$$c_n \sim \frac{1}{e} \times (2n-1)!!$$ [Stein Everett]

<u>Corollaire</u> : $\mathbb{P}(\text{diagramme connexe}) = \dfrac{c_n}{(2n-1)!!} \to \dfrac{1}{e}$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

$$c_n \sim \frac{1}{e} \times (2n-1)!! \qquad \text{[Stein Everett]}$$

Corollaire : $\mathbb{P}(\text{diagramme connexe}) = \dfrac{c_n}{(2n-1)!!} \longrightarrow \dfrac{1}{e}$

Plus fort [Flajolet Noy]

- nombre de composantes connexes $\sim$ Poisson (1)
- $|C|$ – taille de la plus grande composante $\sim$ Poisson (1)

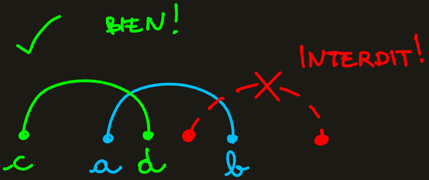
2CTVKG ++

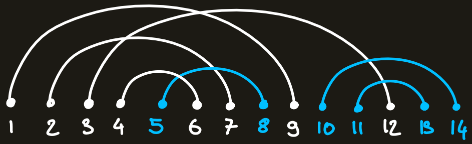
Côté analytique : les cordes terminales

avec Karen Yeats

DÉFINITION

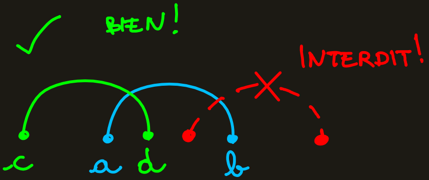
corde terminale =
corde (a,b) telle que
si (c,d) intersecte (a,b),
alors $c < a$.

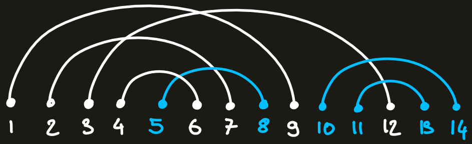




DÉFINITION

corde terminale =
corde (a,b) telle que
si (c,d) intersecte (a,b),
alors $c < a$.





<u>Question</u> : Nombre moyen de cordes terminales dans un diagramme de cordes connexe ?

CONTEXTE

Théorème [Marie, Yeats]

L'équation de Dyson-Schwinger

$$G(x,L) = 1 - x\, G\left(x, \frac{\partial}{\partial(-\rho)}\right)^{-1} \left(e^{-L\rho} - 1\right) F(\rho)\Big|_{\rho=0}$$

admet pour solution :

$$G(x,L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \\ \text{tel que } t_1 \geqslant i \\ \text{où } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{désigne les positions} \\ \text{des cordes terminales de } C \\ \text{pour l'ordre d'intersection.}}} \frac{L^i}{i!}\, x^{|C|}\, f_0^{|C|-k}\, f_{t_1 - i}\, f_{t_2 - t_1}\, f_{t_3 - t_2} \cdots f_{t_k - t_{k-1}}$$

GROSSE FORMULE !

CONTEXTE

Théorème [Marie, Yeats]

GROSSE FORMULE !

L'équation de Dyson-Schwinger

$$G(x,L) = 1 - x\, G\left(x, \frac{\partial}{\partial(-\rho)}\right)^{-1} \left(e^{-L\rho} - 1\right) F(\rho)\Big|_{\rho=0}$$

admet pour solution :

$$G(x,L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \\ \text{tel que } t_1 \geq i}} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \cdots f_{t_k-t_{k-1}}$$

où $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ désigne les positions des cordes terminales de C pour l'ordre d'intersection.

POURQUOI C'EST DUR

La série génératrice $C(z,u) = \sum_{\substack{n\geq 0\\ k\geq 0}} c_{n,k}\, z^n u^k$ où

$c_{n,k}$ = nombre de diagrammes à n cordes et à k cordes terminales

satisfait

$$C(z,u) = zu + \frac{z\left(2z\frac{\partial C}{\partial z}(z,u) - C(z,u)\right)}{1 - 2z\frac{\partial C}{\partial z}(z,u) + C(z,u)}.$$

POURQUOI C'EST DUR

La série génératrice $C(z,u) = \sum_{\substack{n\geq 0 \\ k \geq 0}} c_{n,k} z^n u^k$ où

$c_{n,k}$ = nombre de diagrammes à n cordes et à k cordes terminales

satisfait

$$C(z,u) = zu + \frac{z\left(2z\frac{\partial C}{\partial z}(z,u) - C(z,u)\right)}{1 - 2z\frac{\partial C}{\partial z}(z,u) + C(z,u)}.$$

équation différentielle non linéaire :(

POURQUOI C'EST DUR

La série génératrice $C(z,u) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ k \geq 0}} c_{n,k} z^n u^k$ où

$c_{n,k}$ = nombre de diagrammes à n cordes et à k cordes terminales

satisfait

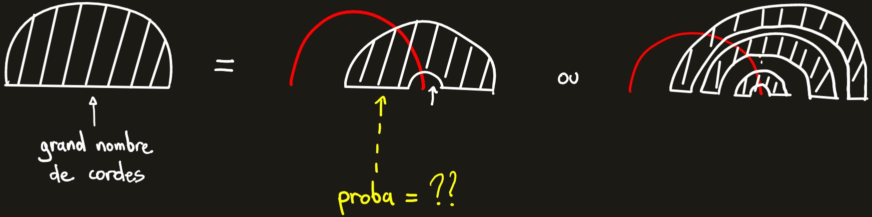
$$C(z,u) = zu + \frac{z\left(2z\frac{\partial C}{\partial z}(z,u) - C(z,u)\right)}{1 - 2z\frac{\partial C}{\partial z}(z,u) + C(z,u)}.$$

équation différentielle <u>non</u> linéaire :(

$$c_n = (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} \Rightarrow c_n \geq n! \quad ¡:($$

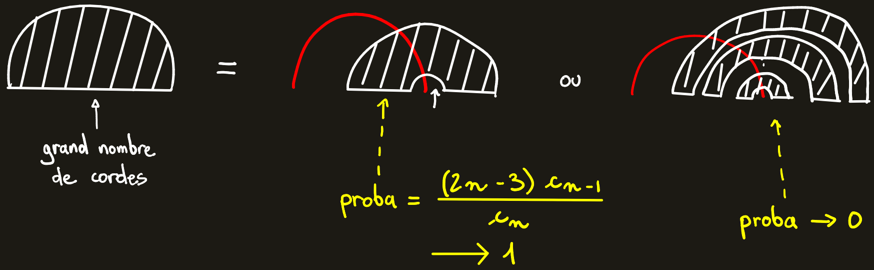
NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

Idée :



NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

Idée :

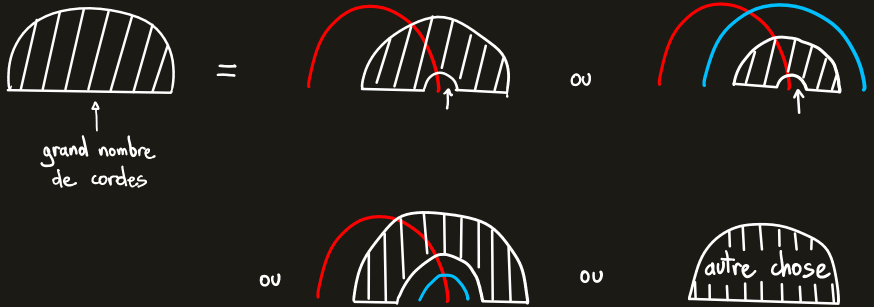


Enlever la corde racine ne déconnecte pas le diagramme presque sûrement.

Intéressant mais insuffisant !

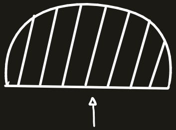
NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

Idée :



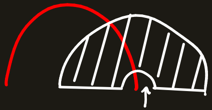
NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

Idée :



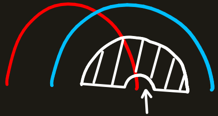
grand nombre de cordes

=



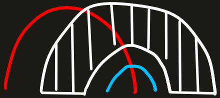
$$\text{proba} = (2n-3)\,\frac{c_{n-1}}{c_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ou



$$\text{proba} = (2n-5)\,\frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

ou



$$\text{proba} = (2n-5)\,\frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

ou

$$\text{proba} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

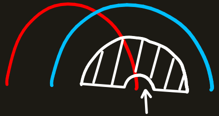
Idée :

grand nombre de cordes

=

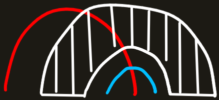
$$\text{proba} = (2n-3)\frac{c_{n-1}}{c_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ou



$$\text{proba} = (2n-5)\frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

ou



$$\text{proba} = (2n-5)\frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

ou

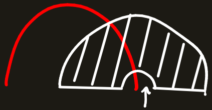
$$\text{proba} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

Idée :

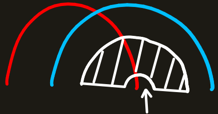
grand nombre de cordes

=



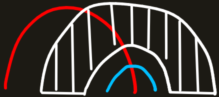
$\text{proba} = (2n-3)\,\dfrac{c_{n-1}}{c_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

ou



$\text{proba} = (2n-5)\,\dfrac{c_{n-2}}{c_n} \sim \dfrac{1}{2n}$

ou



$\text{proba} = (2n-5)\,\dfrac{c_{n-2}}{c_n} \sim \dfrac{1}{2n}$

ou

$\text{proba} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Ça va marcher !

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

Définissons X_n comme la variable aléatoire telle que

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} & \text{avec proba } 1 - \frac{1}{n} \\ X_{n-2} + 1 & \text{avec proba } \frac{1}{n} \end{cases}$$

Idée n° 1

Quelles que soient les conditions initiales,

$X_n \longrightarrow$ loi gaussienne

Idée n° 2

Nombre de cordes terminales "$\sim$" X_n.

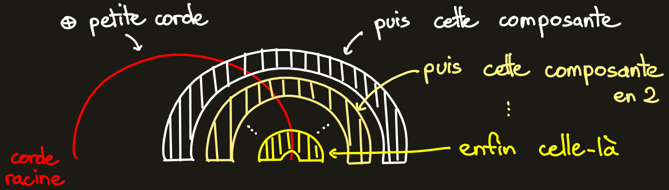
NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

<u>Théorème</u> Pour la distribution uniforme,

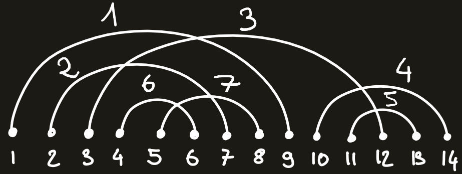
$$\text{Nombre de cordes terminales} \xrightarrow[\text{loi}]{} \begin{array}{l}\text{Loi gaussienne} \\ \text{moyenne} \sim \ln(n) \\ \text{variance} \sim \ln(n)\end{array}$$

ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

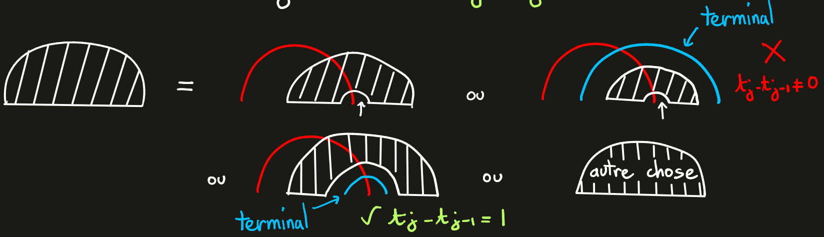


Exemple :



NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES CONSÉCUTIVES

Si les cordes terminales sont en position $t_1 < t_2 < \dots < t_k$, combien de j satisfont $t_j - t_{j-1} = 1$?



Théorème Pour la distribution uniforme,

$$\text{Nombre de cordes terminales consécutives} \xrightarrow{\text{loi}} \text{Loi gaussienne}$$

moyenne $\sim \frac{1}{2} \ln(n)$

variance $\sim \frac{1}{2} \ln(n)$

TRAVAUX EN COURS

→ Extension à d'autres équations de Dyson-Schwinger
notion de diagramme décoré
avec Yeats

→ Méthode se généralisant à d'autres familles combinatoires
quand la série génératrice est non analytique
et satisfait une équation différentielle non linéaire
avec Bodini et Dougal.

2CTVKG +++

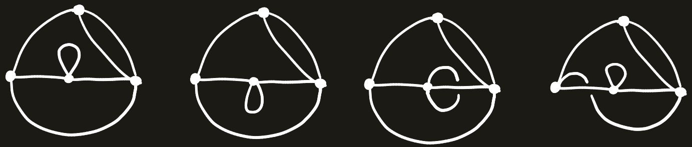
Côté bijectif : les cartes combinatoires

avec Karen Yeats et Noam Zeilberger

UNE AUTRE FAMILLE D'OBJETS

carte combinatoire = graphe où on a ordonné cycliquement les ½-arêtes autour de chaque sommet.

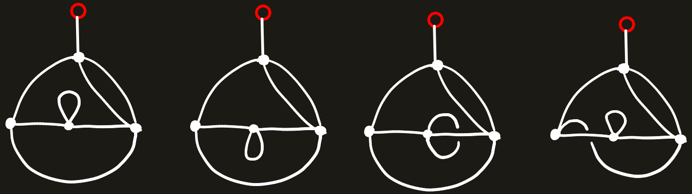
<u>Exemple</u>. Quatre cartes différentes :



UNE AUTRE FAMILLE D'OBJETS

carte combinatoire = graphe où on a ordonné cycliquement les ½-arêtes autour de chaque sommet.

<u>Exemple</u>. Quatre cartes différentes :



On enracine la carte en marquant une feuille.

UNE AUTRE FAMILLE D'OBJETS

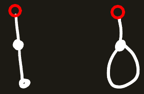
carte combinatoire = graphe où on a ordonné cycliquement les ½-arêtes autour de chaque sommet.

1 arête

1

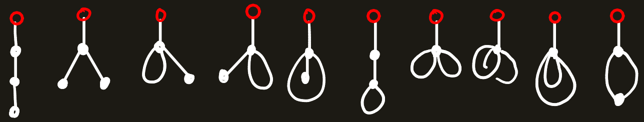
2 arêtes

2



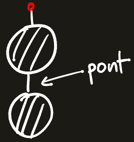
3 arêtes

10



UNE AUTRE FAMILLE D'OBJETS

pont = arête ≠ dont la suppression déconnecte la carte



1 arête

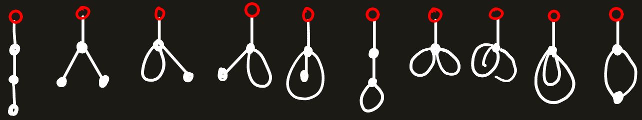
1

2 arêtes

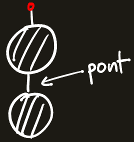
2

3 arêtes

10



UNE AUTRE FAMILLE D'OBJETS



pont = arête ≠  dont la suppression déconnecte la carte

1 arête

1

1

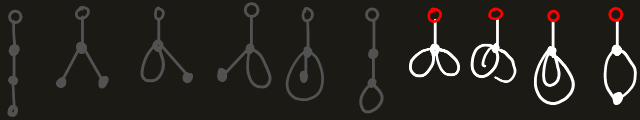
2 arêtes

2

1

3 arêtes

10



4

PAS UNE COÏNCIDENCE

Théorème

nombre de cartes
sans pont
à n arêtes
$=$
nombre de diagrammes
connexes
à n cordes

PAS UNE COÏNCIDENCE

Théorème

nombre de cartes
sans pont
à n arêtes
$=$
nombre de diagrammes
connexes
à n cordes

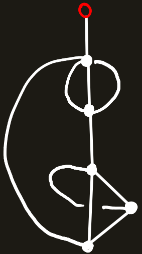
Rappel $$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)\, c_k\, c_{n-k}$$

PAS UNE COÏNCIDENCE

Théorème

nombre de cartes
sans pont
à n arêtes
$=$
nombre de diagrammes
connexes
à n cordes

Rappel $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)\, c_k\, c_{n-k}$



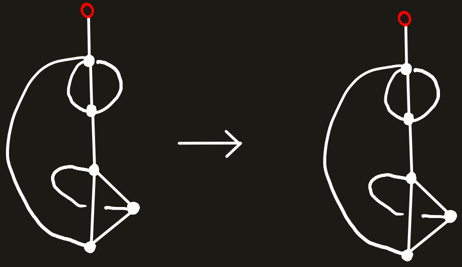
PAS UNE COÏNCIDENCE

Théorème

nombre de cartes
sans pont
à n arêtes
=
nombre de diagrammes
connexes
à n cordes

Rappel

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)\, c_k\, c_{n-k}$$



PAS UNE COÏNCIDENCE

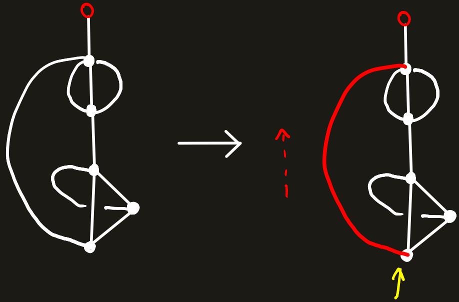
Théorème

nombre de cartes sans pont à n arêtes

$=$

nombre de diagrammes connexes à n cordes

Rappel $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)\, c_k\, c_{n-k}$

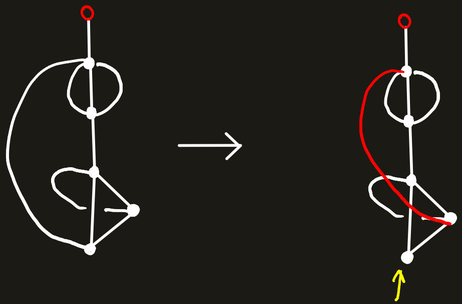


PAS UNE COÏNCIDENCE

Théorème

nombre de cartes
sans pont
à n arêtes
$=$
nombre de diagrammes
connexes
à n cordes

Rappel $\quad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)\, c_k\, c_{n-k}$

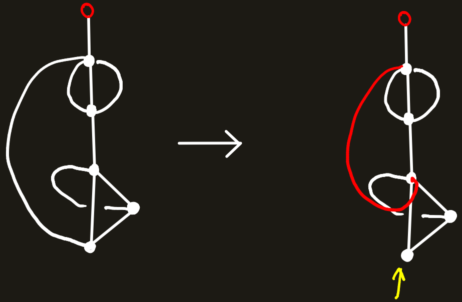


PAS UNE COÏNCIDENCE

Théorème

nombre de cartes
sans pont
à n arêtes
$=$
nombre de diagrammes
connexes
à n cordes

Rappel $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)\, c_k\, c_{n-k}$



PAS UNE COÏNCIDENCE

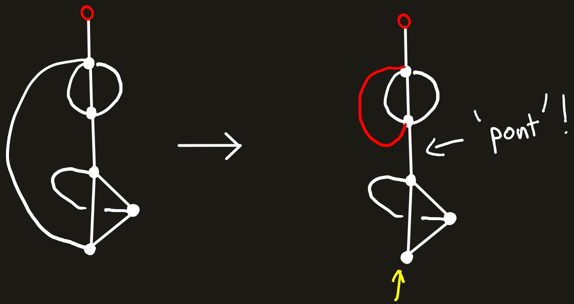
Théorème

nombre de cartes sans pont à n arêtes

=

nombre de diagrammes connexes à n cordes

Rappel $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)\, c_k\, c_{n-k}$



PAS UNE COÏNCIDENCE

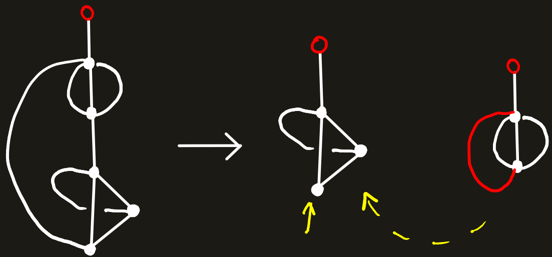
Théorème

nombre de cartes sans pont à n arêtes

=

nombre de diagrammes connexes à n cordes

Rappel $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)\, c_k\, c_{n-k}$



PAS UNE COÏNCIDENCE

Théorème

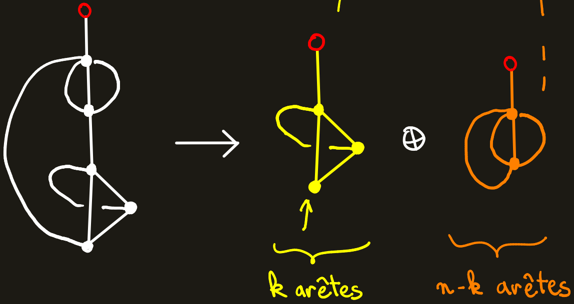
nombre de cartes sans pont à n arêtes

=

nombre de diagrammes connexes à n cordes

Rappel

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)\, c_k\, c_{n-k}$$

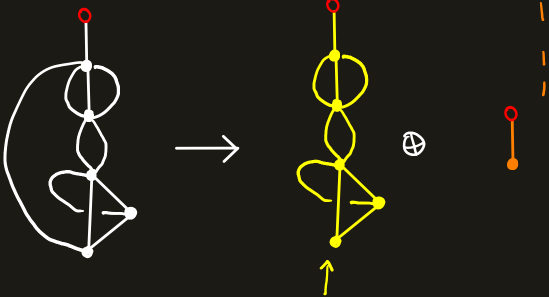


PAS UNE COÏNCIDENCE

Théorème

nombre de cartes sans pont à n arêtes = nombre de diagrammes connexes à n cordes

Rappel $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)\, c_k\, c_{n-k}$



(UN ÉCHANTILLON) DES PROPRIÉTÉS DE LA BIJECTION

On peut construire une bijection explicite entre cartes sans pont et diagrammes connexes

(UN ÉCHANTILLON) DES PROPRIÉTÉS DE LA BIJECTION

On peut construire une bijection explicite entre cartes sans pont et diagrammes connexes

1. Peut s'étendre en une bijection

cartes (avec ponts, ou non)

$\updownarrow$

diagrammes irréductibles

déjà connu par [Ossana de Mendez Rosenstiehl, Cori]

diagramme réductible

diagramme irréductible

(UN ÉCHANTILLON) DES PROPRIÉTÉS DE LA BIJECTION

On peut construire une bijection explicite entre cartes sans pont et diagrammes connexes

① Peut s'étendre en une bijection

cartes (avec ponts, ou non)

$\updownarrow$

diagrammes irréductibles

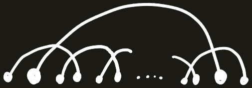
déjà connu par [Ossana de Mendez Rosenstiehl, Cori]

diagramme réductible

diagramme irréductible

② Caractérisation de la planarité

Théo Une carte est planaire ssi son image par la bijection ne contient pas le motif



RETOUR SUR LES CORDES TERMINALES

diagrammes $\to$ cartes

cordes terminales $\mapsto$???

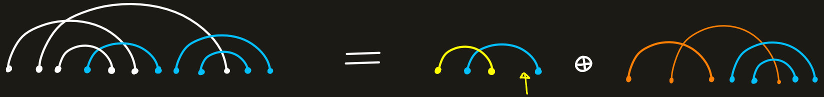
RETOUR SUR LES CORDES TERMINALES

diagrammes → cartes

cordes terminales ↦ ???

DIAGRAMMES

<u>Décomposition</u> :



$$\# \text{ terminales } (C_1 \oplus C_2) = \# \text{ terminales } (C_1) + \# \text{ terminales } (C_2)$$

RETOUR SUR LES CORDES TERMINALES

diagrammes $\rightarrow$ cartes

cordes terminales $\mapsto$???

DIAGRAMMES

Décomposition :

 $=$  $\oplus$ 

$$\#\,\text{terminales}\,(C_1 \oplus C_2) = \#\,\text{terminales}\,(C_1) + \#\,\text{terminales}\,(C_2)$$

si $C_2 \neq$ 

 $=$  $\oplus$ 

$$\#\,\text{terminales}\,(C_1 \oplus C_2) = \#\,\text{terminales}\,(C_1)$$

si $C_2 =$ 

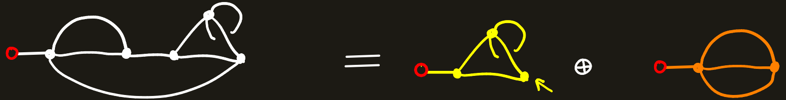
RETOUR SUR LES CORDES TERMINALES

diagrammes $\rightarrow$ cartes

cordes terminales $\mapsto$???

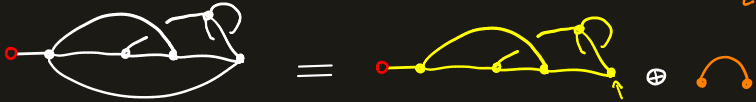
CARTES

Décomposition :



$\#$?????? $(C_1 \oplus C_2) = \#$?????? $(C_1) + \#$?????? (C_2)

si $C_2 \neq$ 



$\#$?????? $(C_1 \oplus C_2) = \#$?????? (C_1) si $C_2 =$ 

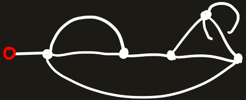
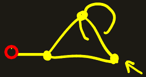
RETOUR SUR LES CORDES TERMINALES

diagrammes → cartes

cordes terminales ↦ ???

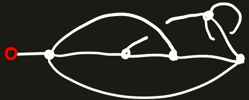
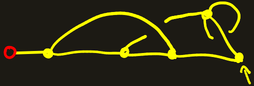
CARTES

Décomposition :

 =  $\oplus$ 

sommets $(C_1 \oplus C_2)$ = # sommets (C_1) + # sommets (C_2)

si $C_2 \neq$ 

 =  $\oplus$ 

sommets $(C_1 \oplus C_2)$ = # sommets (C_1) si $C_2 =$ 

PAS UNE COÏNCIDENCE 2

Théorème

nombre de cartes
sans pont
à n arêtes
et k sommets
=
nombre de diagrammes
connexes
à n cordes
et k cordes terminales.

PAS UNE COÏNCIDENCE 2

Théorème

nombre de cartes
sans pont
à n arêtes
et k sommets
=
nombre de diagrammes
connexes
à n cordes
et k cordes terminales.

Corollaire

Pour la distribution uniforme des cartes combinatoires sans pont,

$$\text{Nombre de sommets} \xrightarrow[\text{loi}]{} \begin{array}{l}\text{Loi gaussienne}\\ \text{moyenne} \sim \ln(n)\\ \text{variance} \sim \ln(n)\end{array}$$

PERSPECTIVES

→ Une nouvelle bijection, filon de nouvelles propriétés

Plein de questions ouvertes !

→ Comprendre combinatoirement les travaux de [Marie Yeats, Hihn Yeats]

→ Lien avec le lambda-calcul ?

THANK YOU!