

COMBINATOIRE DU POLYNÔME DE TUTTE ET DES CARTES PLANAIRES

Julien Courtiel
LaBRI, 3 octobre 2014



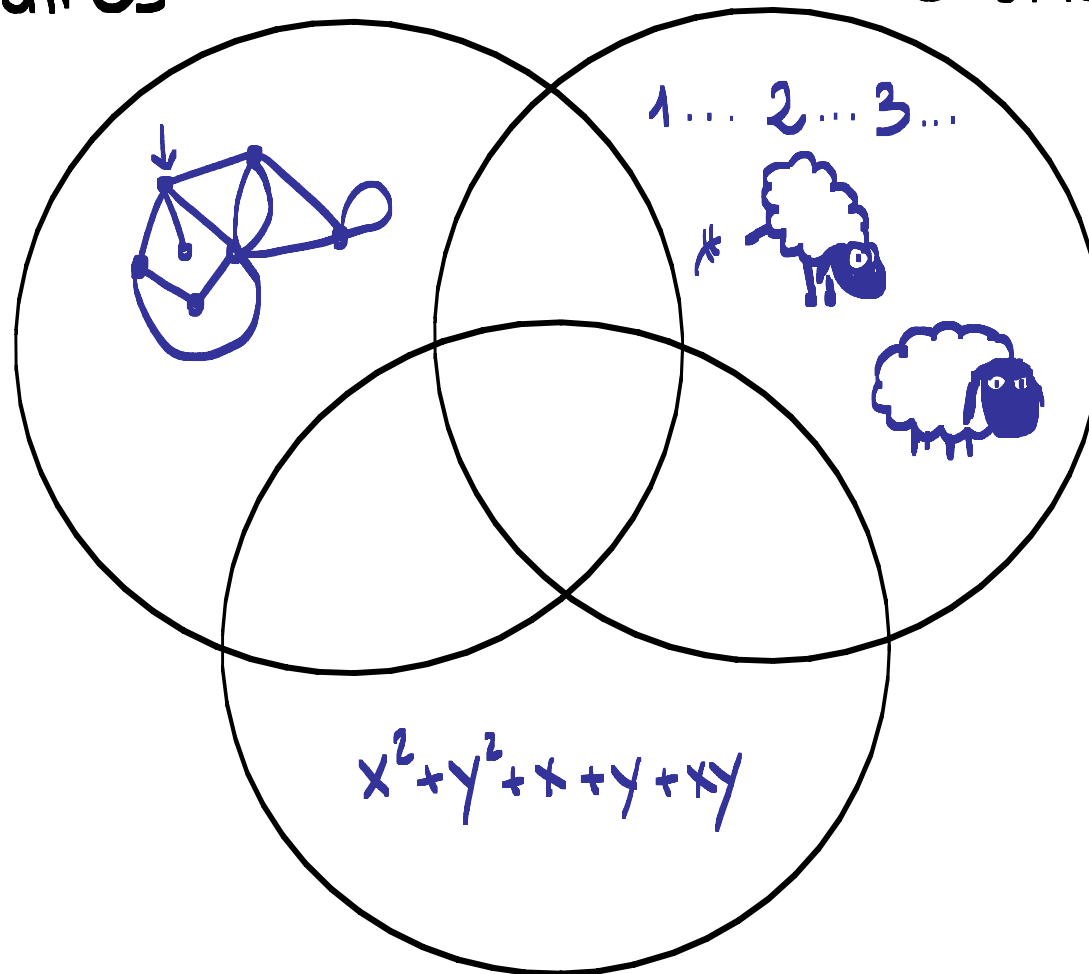
PLAN

- ① INTRODUCTION: Les trois thèmes de ma thèse
- ① Cartes forestières
- ② Activités pour le polynôme de Tutte

LES TROIS THÈMES DE MA THÈSE

Cartes
planaires

Combinatoire
énumérative

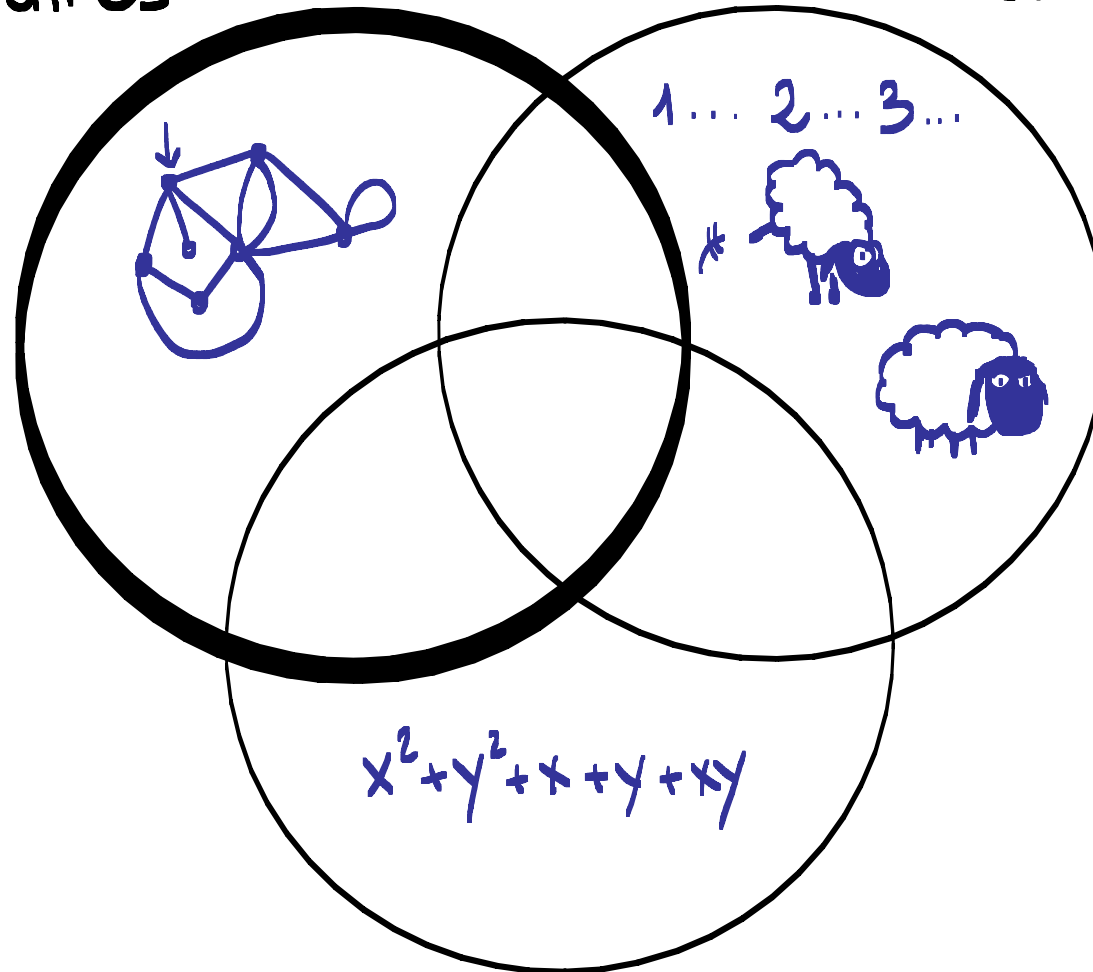


Polynôme de Tutte

LES TROIS THÈMES DE MA THÈSE

Cartes
planaires

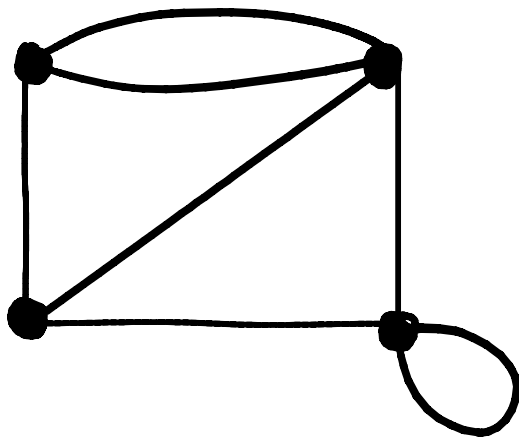
Combinatoire
énumérative



Polynôme de Tutte

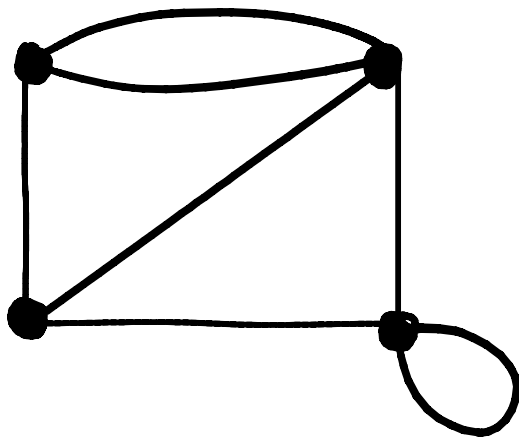
CARTES PLANAIRES

Carte planaire = graphe connexe planaire
+ plongement de ce graphe
dans le plan, considéré
à déformation près

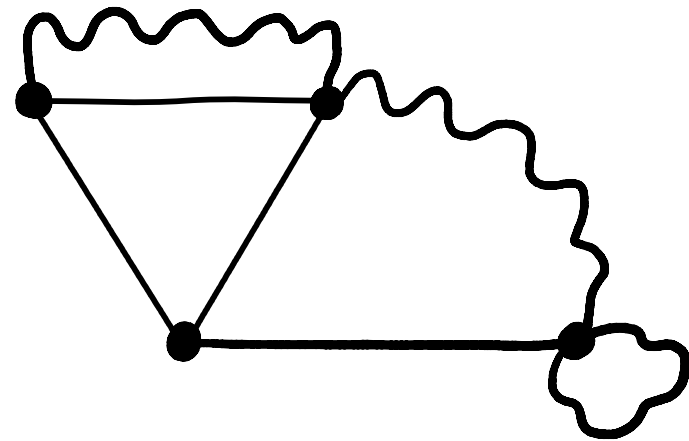


CARTES PLANAIRE

Carte planaire = graphe connexe planaire
+ plongement de ce graphe
dans le plan, considéré
à déformation près

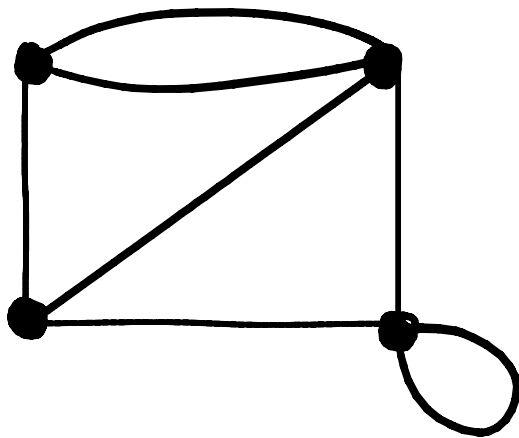


=

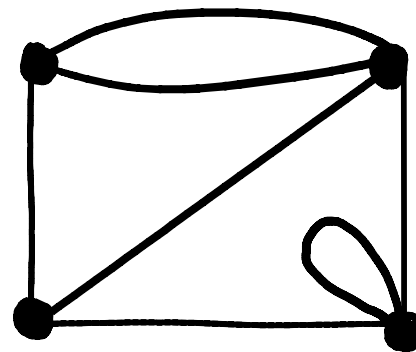


CARTES PLANAIRES

Carte planaire = graphe connexe planaire
+ plongement de ce graphe
dans le plan, considéré
à déformation près



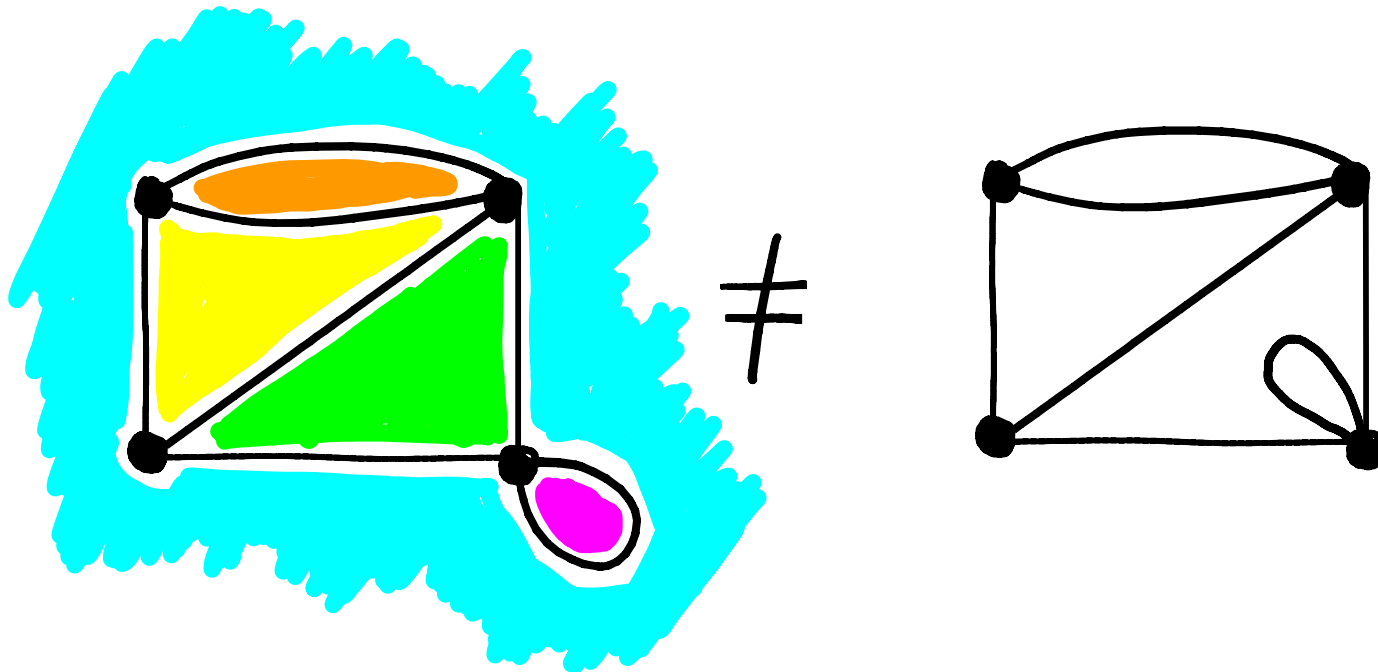
≠



CARTES PLANAIRES

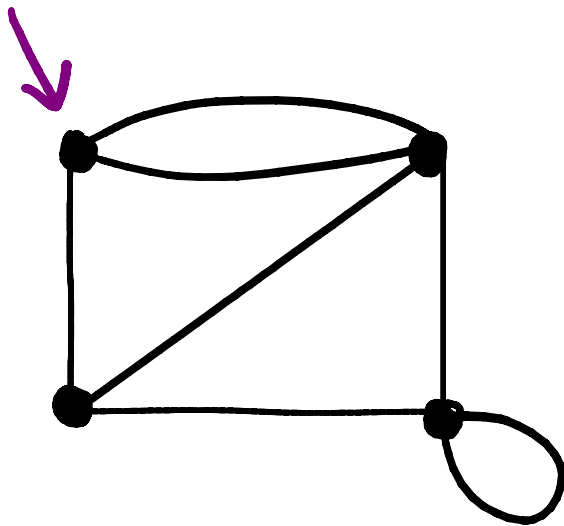
Carte planaire = graphe connexe planaire
+ plongement de ce graphe
dans le plan, considéré
à déformation près

faces



CARTES PLANAIRE

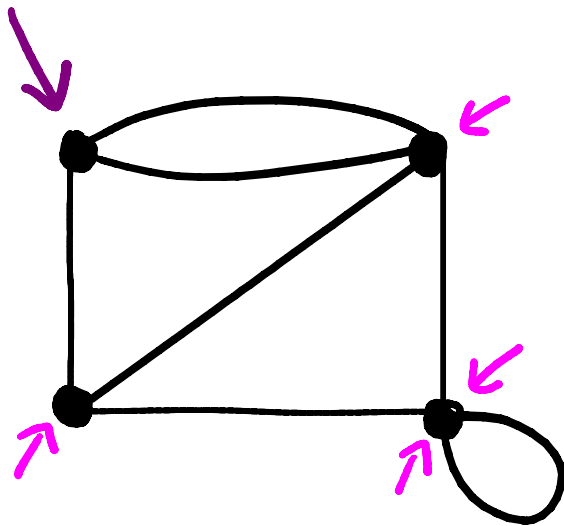
Carte planaire = graphe connexe planaire
+ plongement de ce graphe
dans le plan, considéré
à déformation près



On enracine la carte
sur un coin de la face
externe.

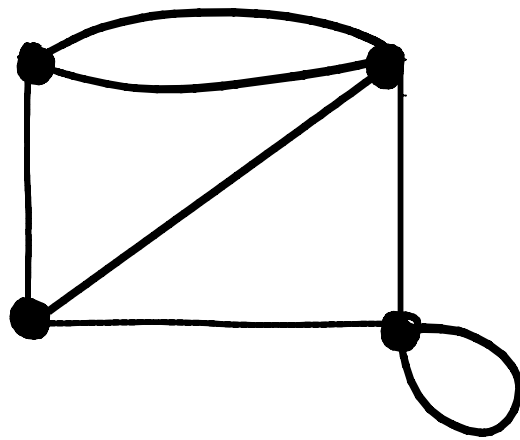
CARTES PLANAIRES

Carte planaire = graphe connexe planaire
+ plongement de ce graphe
dans le plan, considéré
à déformation près

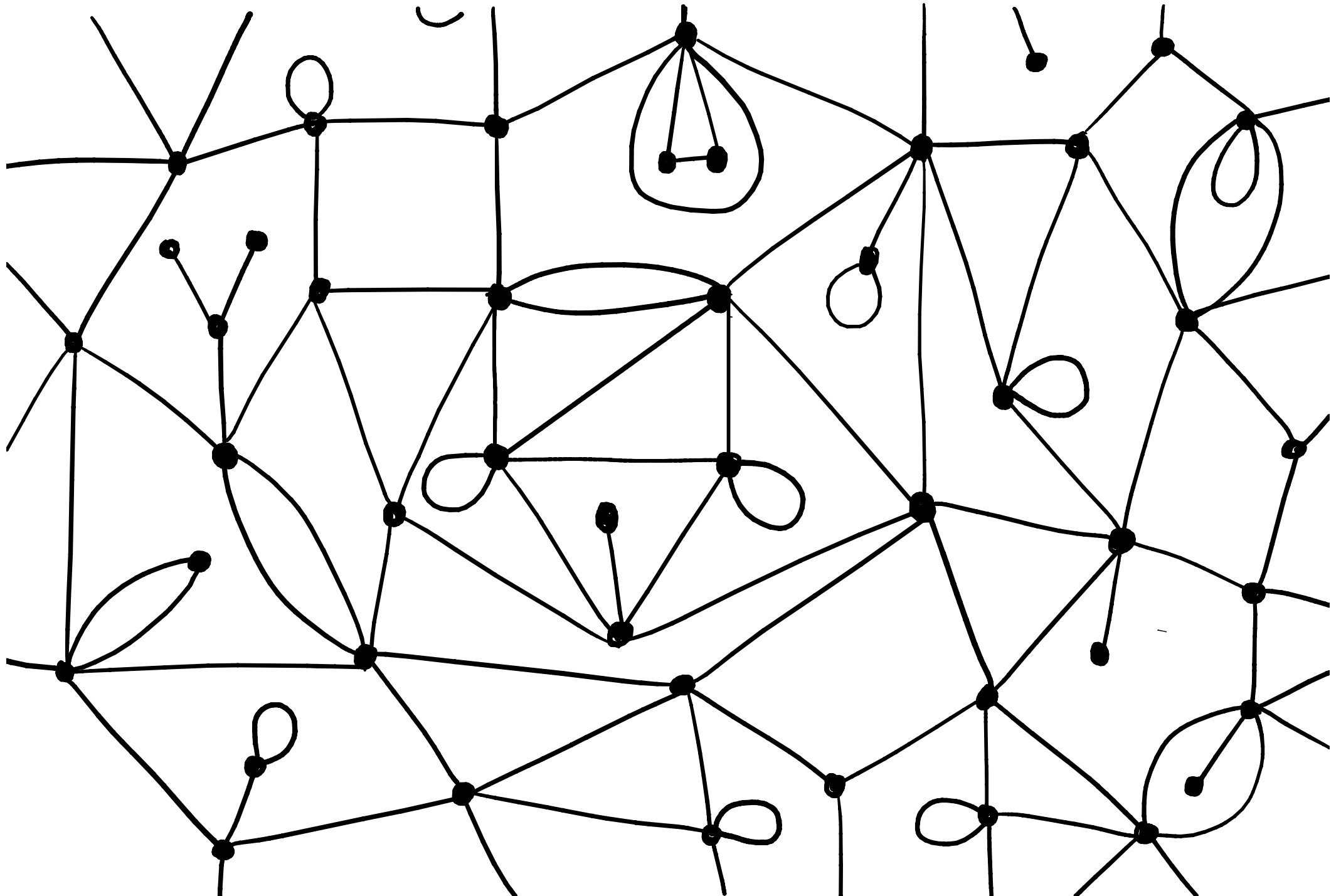


On enracine la carte
sur un coin de la face
externe.

GRANDES CARTES



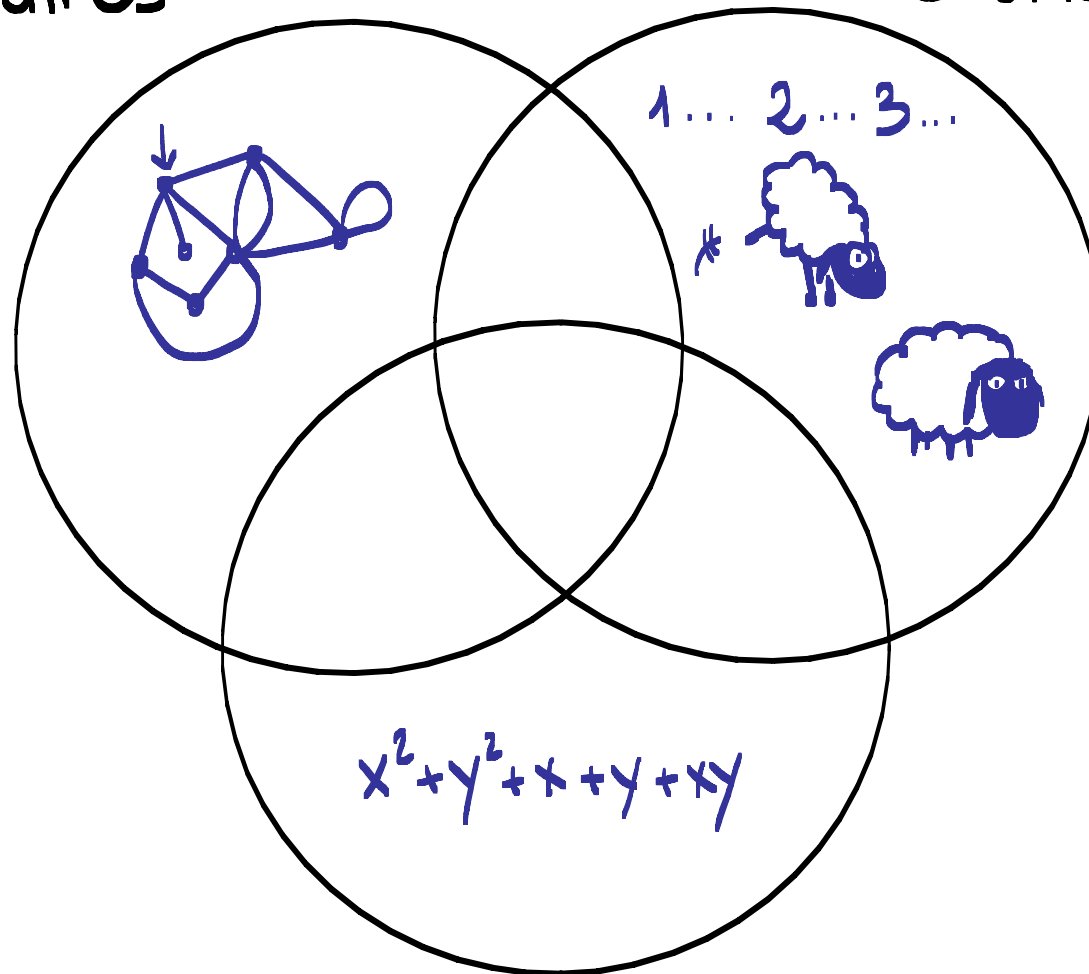
GRANDES CARTES



LES TROIS THÈMES DE MA THÈSE

Cartes
planaires

Combinatoire
énumérative

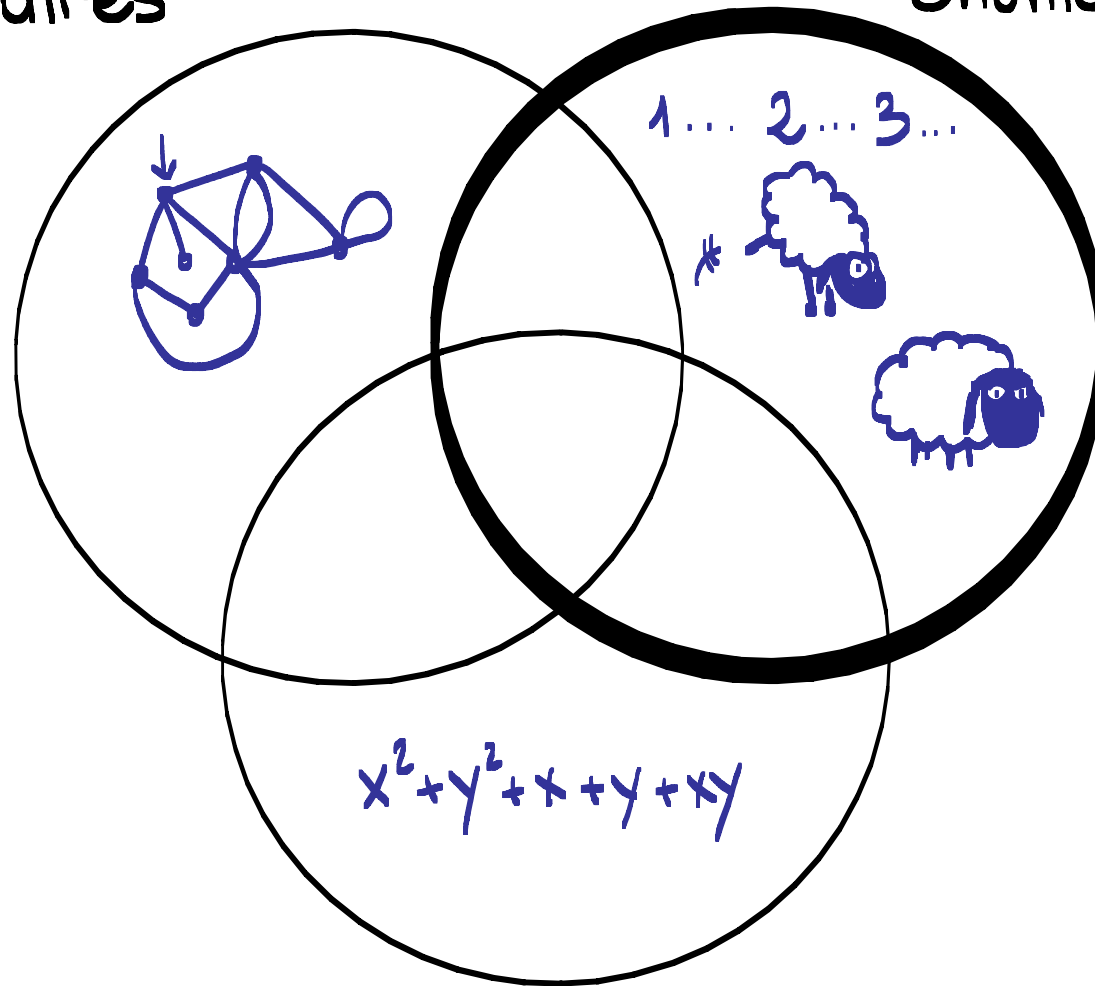


Polynôme de Tutte

LES TROIS THÈMES DE MA THÈSE

Cartes
planaires

Combinatoire
énumérative

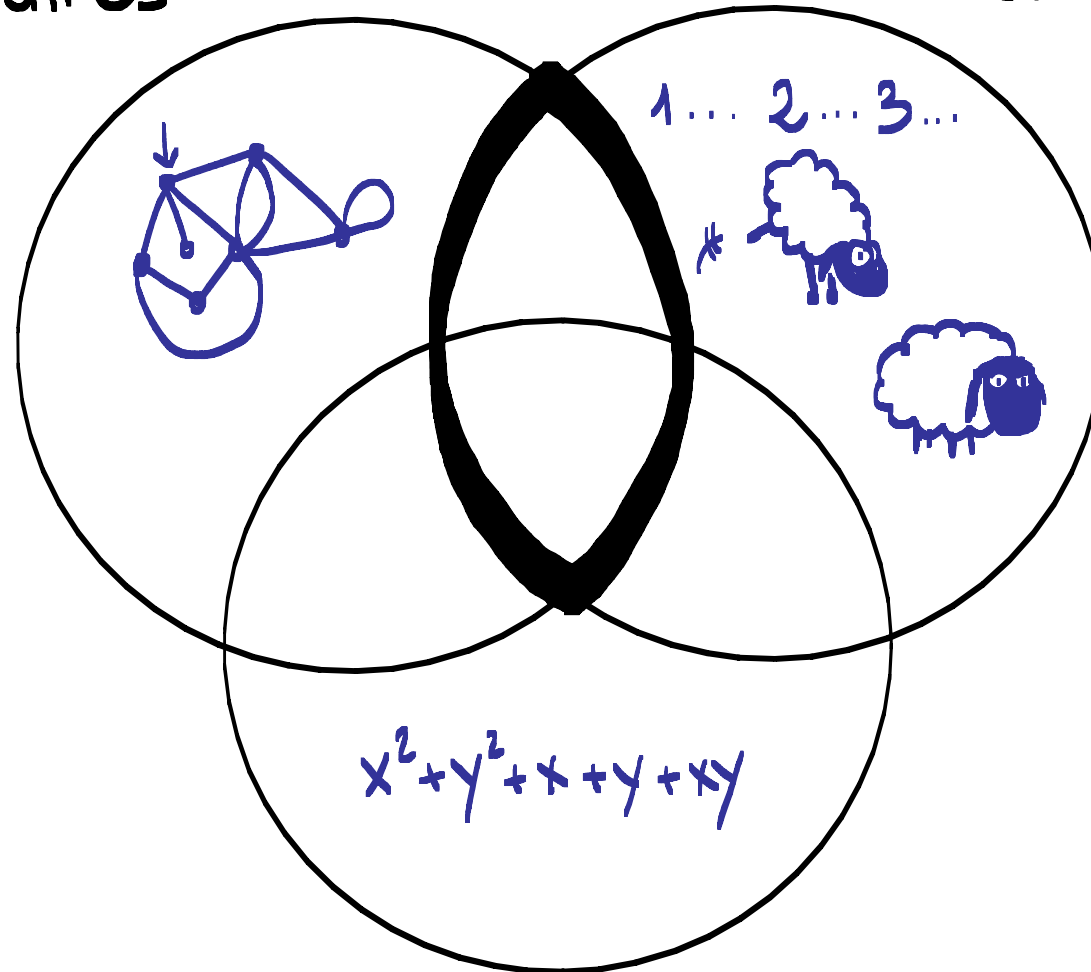


Polynôme de Tutte

LES TROIS THÈMES DE MA THÈSE

Cartes
planaires

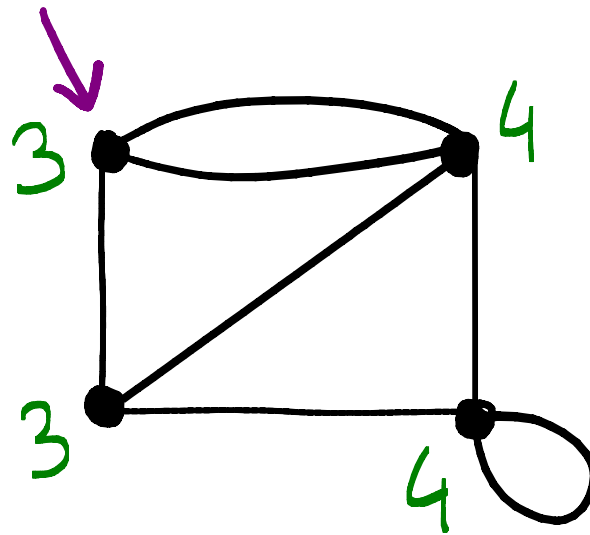
Combinatoire
énumérative



Polynôme de Tutte

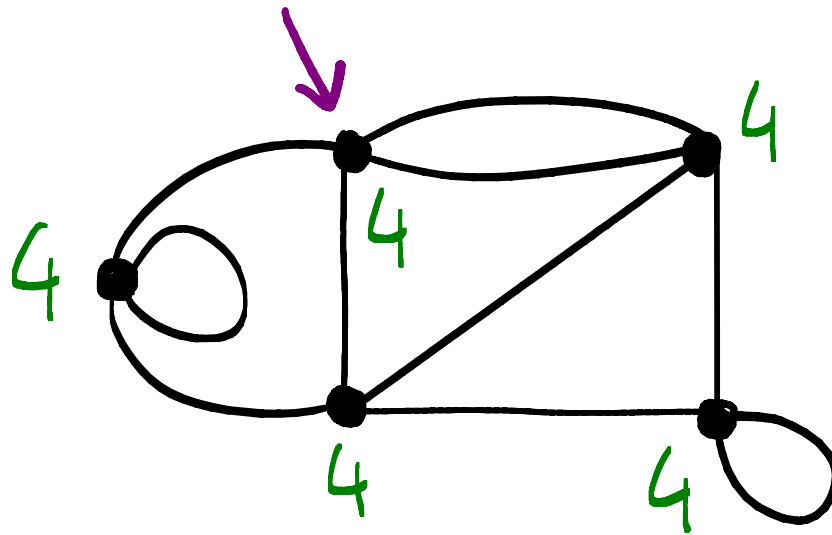
ÉNUMÉRATION DES CARTES TÉTRAVALENTES

Carte tétravalente = carte où chaque sommet a degré 4.



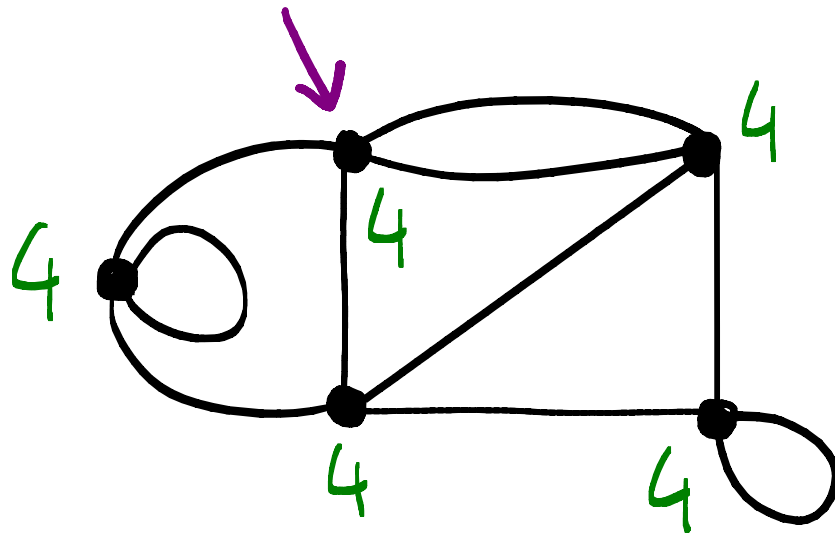
ÉNUMÉRATION DES CARTES TÉTRAVALENTES

Carte tétravalente = carte où chaque sommet a degré 4.



ÉNUMÉRATION DES CARTES TÉTRAVALENTES

Carte tétravalente = carte où chaque sommet a degré 4.

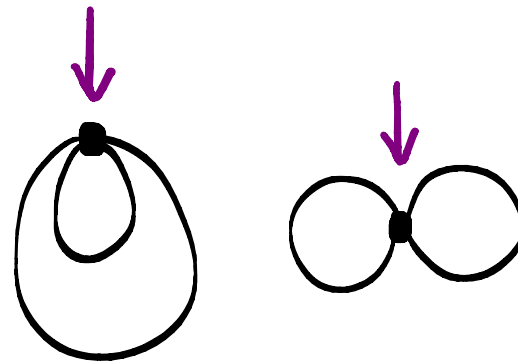


$$q_n = \text{nombre de cartes tétravalentes à } (n+2) \text{ faces}$$
$$= 2 \frac{3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n} \quad [\text{Tutte, 64}]$$

ÉNUMÉRATION DES CARTES TÉTRAVALENTES

Carte tétravalente = carte où chaque sommet a degré 4.

$$q_1 = 2$$



q_n = nombre de cartes tétravalentes à $(n+2)$ faces

$$= 2 \frac{3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n} \quad [\text{Tutte, 64}]$$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

$$q_n = 2 \frac{3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$$

Formule de Stirling:

$$q_n \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} 12^n n^{-5/2}$$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

$$q_n = 2 \frac{3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$$

Formule de Stirling:

typique des cartes planaires

$$q_n \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} 12^n n^{-5/2}$$

NATURE DE LA SÉRIE GÉNÉRATRICE

Série génératrice des cartes tétravalentes :

$$Q(z) = \sum_{n \geq 1} q_n z^n$$

Nature de la série génératrice?

rationnelle \rightarrow algébrique \rightarrow holonome \rightarrow différentiellement algébrique

$$Q = \frac{P_1}{P_2}$$

admet un
poly annulateur

satisfait une EDL

satisfait une ED polynomiale

NATURE DE LA SÉRIE GÉNÉRATRICE

Série génératrice des cartes tétravalentes :

$$Q(z) = \sum_{n \geq 1} q_n z^n$$

Nature de la série génératrice?

rationnelle \rightarrow algébrique \rightarrow holonome \rightarrow différentiellement algébrique

$$Q = \frac{P_1}{P_2}$$

admet un
poly annulateur

satisfait une EDL

satisfait une ED polynomiale

$$Q = T - zT^3$$

$$T = 1 + 3zT^2$$

NATURE DE LA SÉRIE GÉNÉRATRICE

Série génératrice des cartes tétravalentes :

$$Q(z) = \sum_{n \geq 1} q_n z^n$$

Nature de la série génératrice?

rationnelle \rightarrow algébrique \rightarrow holonome \rightarrow différentiellement algébrique

$$Q = \frac{P_1}{P_2}$$

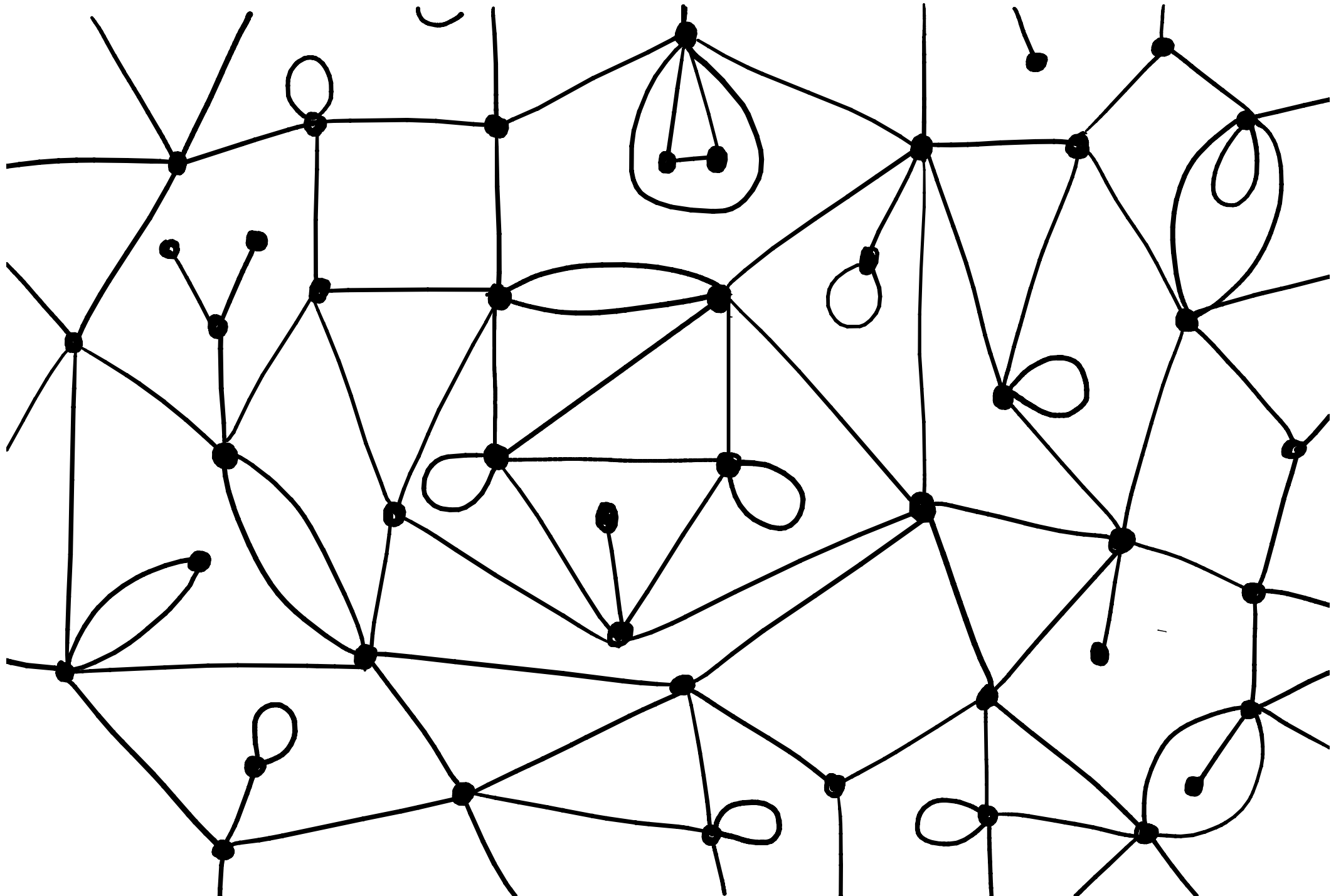
admet un
poly annulateur

satisfait une EDL

satisfait une ED polynomiale

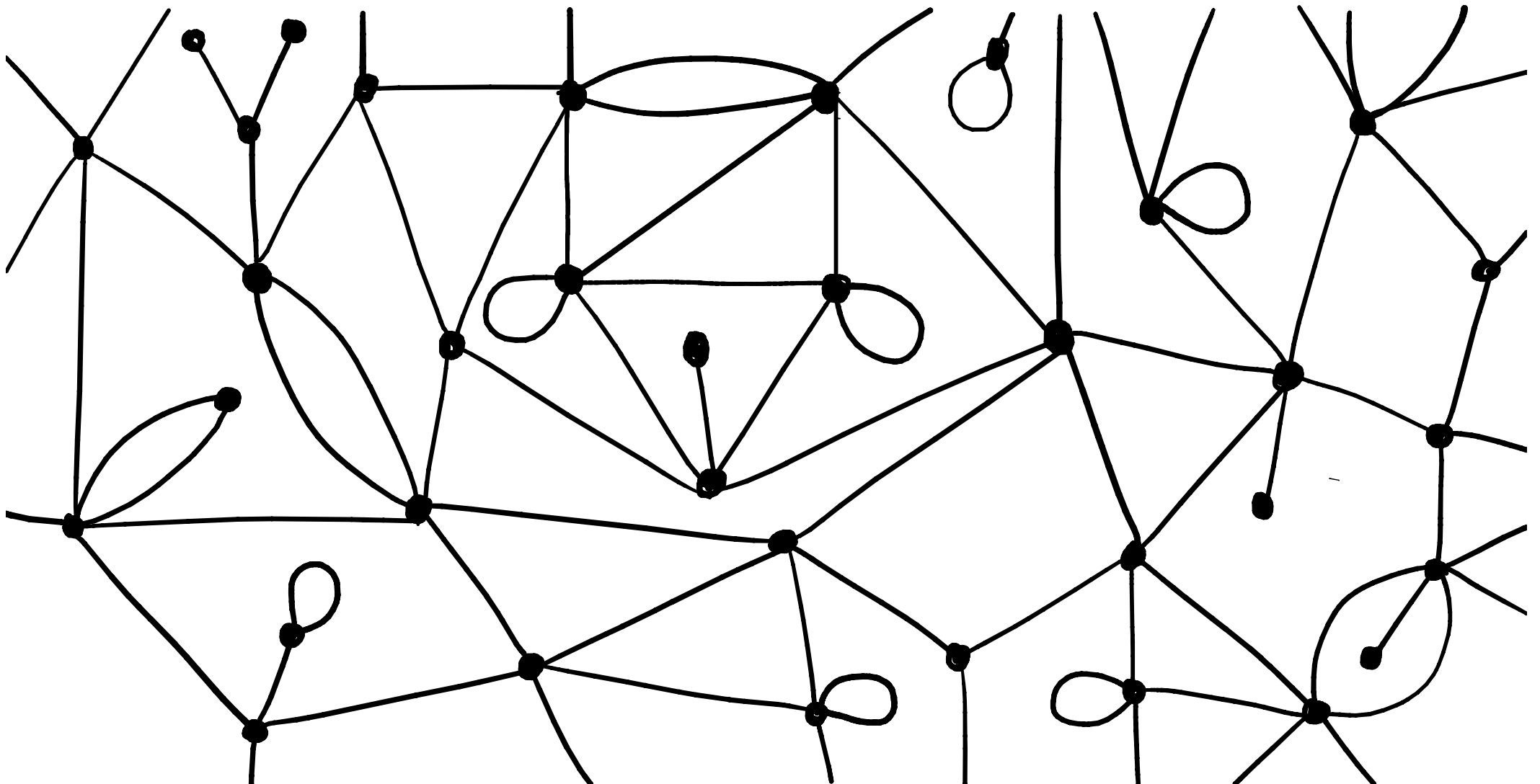
$$Q = T - zT^3 \quad T = 1 + 3zT^2$$

STRUCTURES ADDITIONNELLES



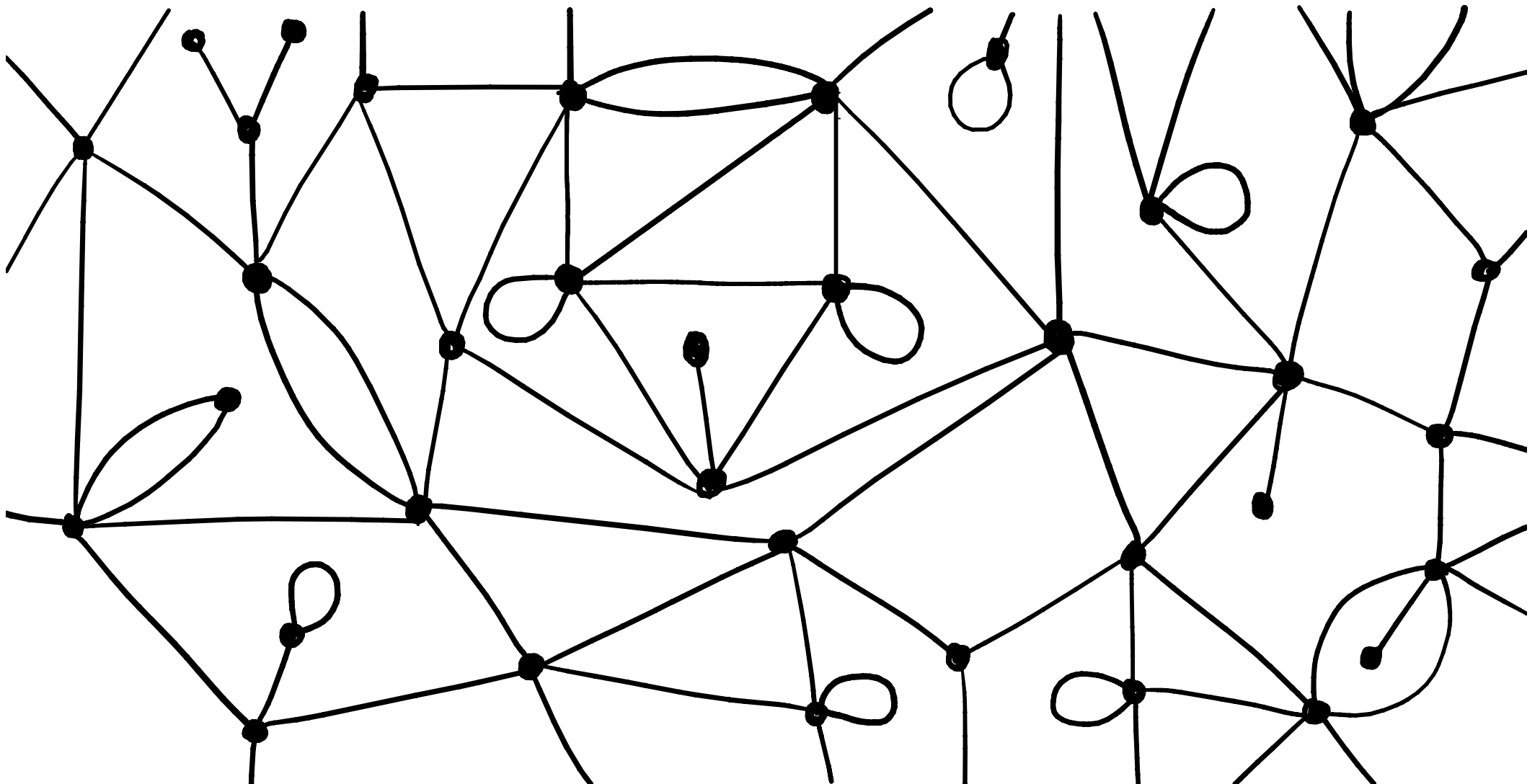
Structures additionnelles: arbre couvrant, coloriage,
percolation, modèle d'Ising/Potts, chemins auto-évitant...

[Tutte, Mullin, Kazakov, Borot, Bouttier, Guitter, Sportiello,
Eynard, Duplantier, Bousquet-Mélou, Schaeffer, Angel ...]

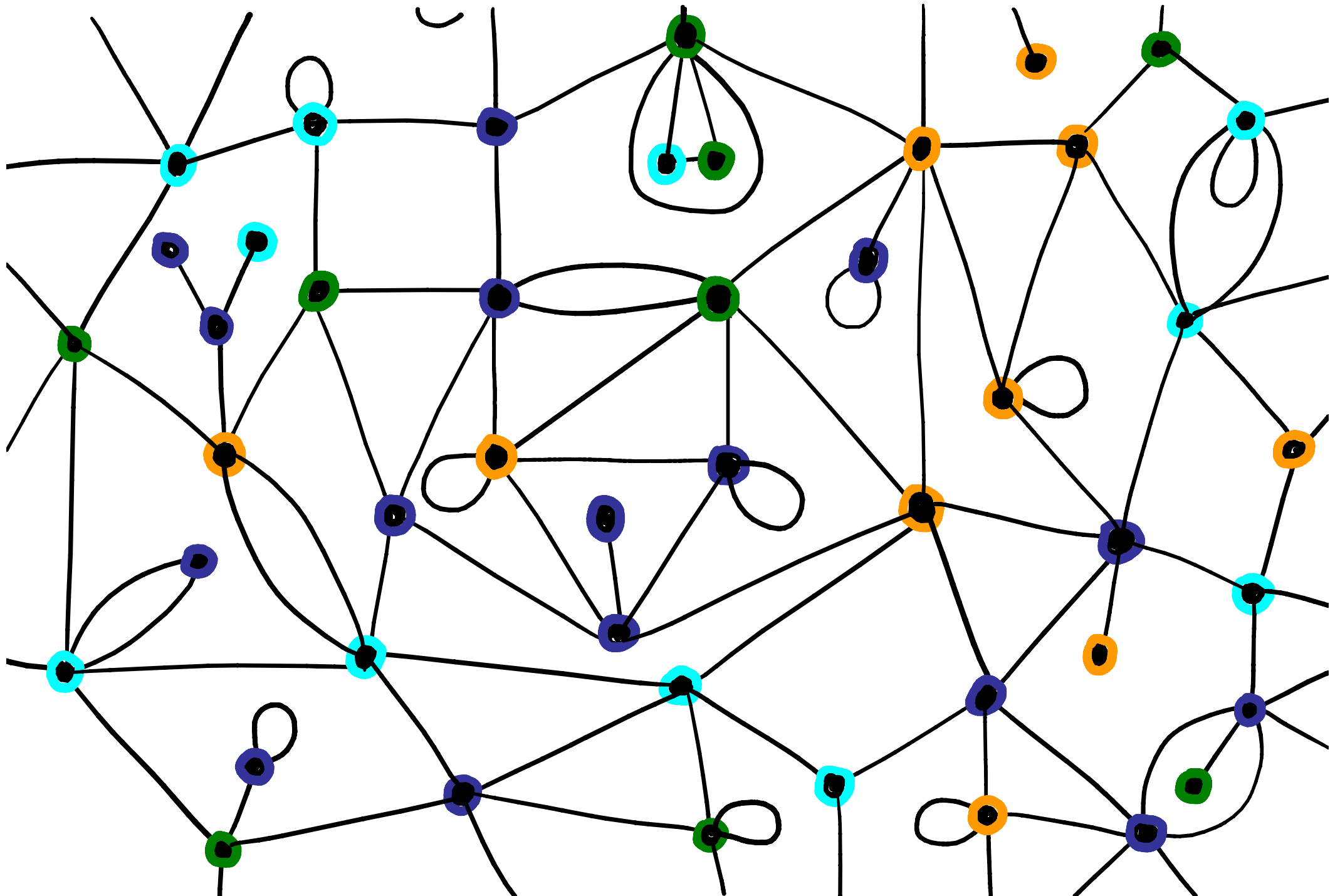


Structures additionnelles: arbre couvrant, coloriages,
percolation, modèle d'Ising/Potts, chemins auto-évitant...

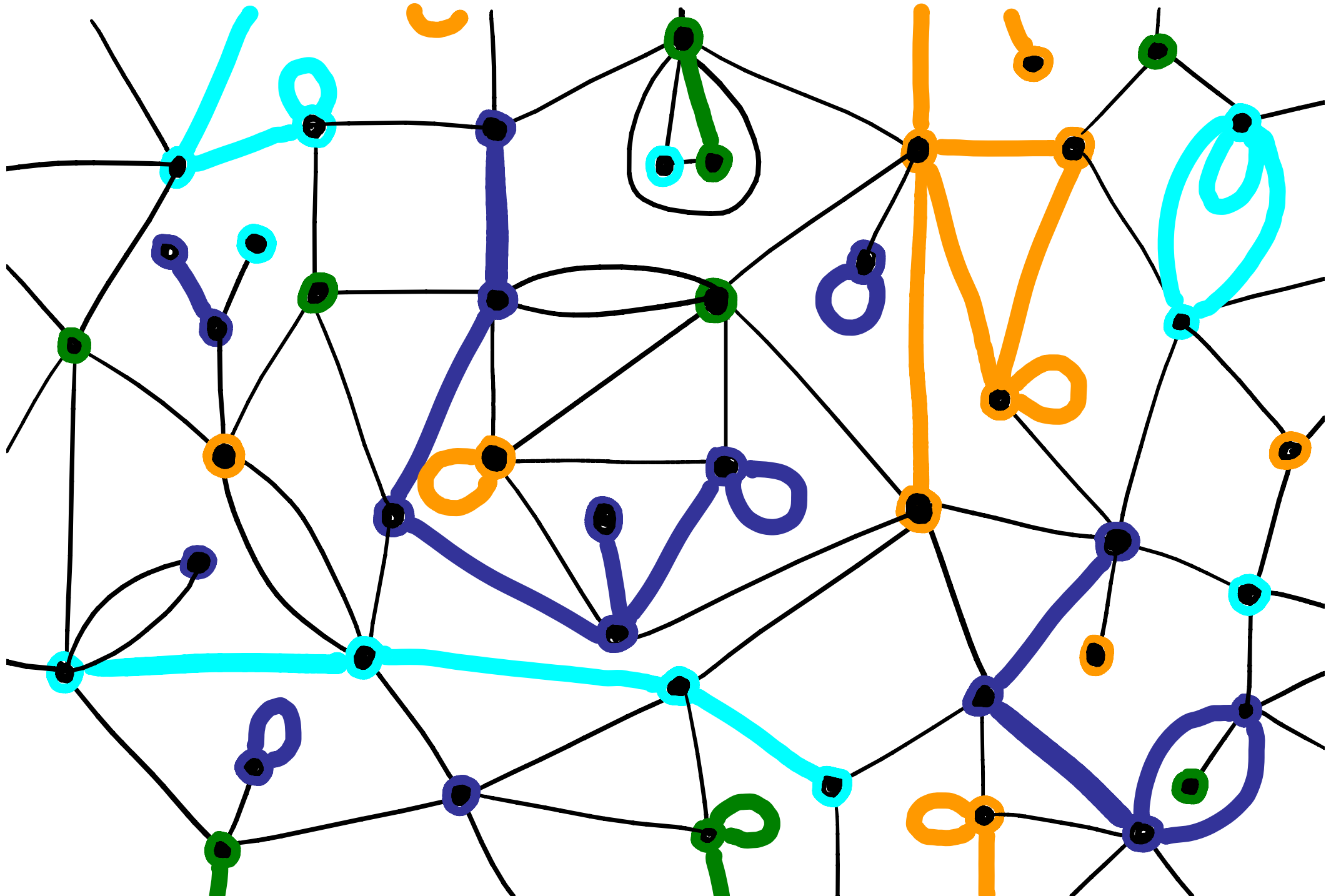
[Tutte, Mullin, Kazakov, Borot, Bouttier, Guitter, Sportiello,
Eynard, Duplantier, Bousquet-Mélou, Schaeffer, Angel ...]



MODÈLE DE POTTS



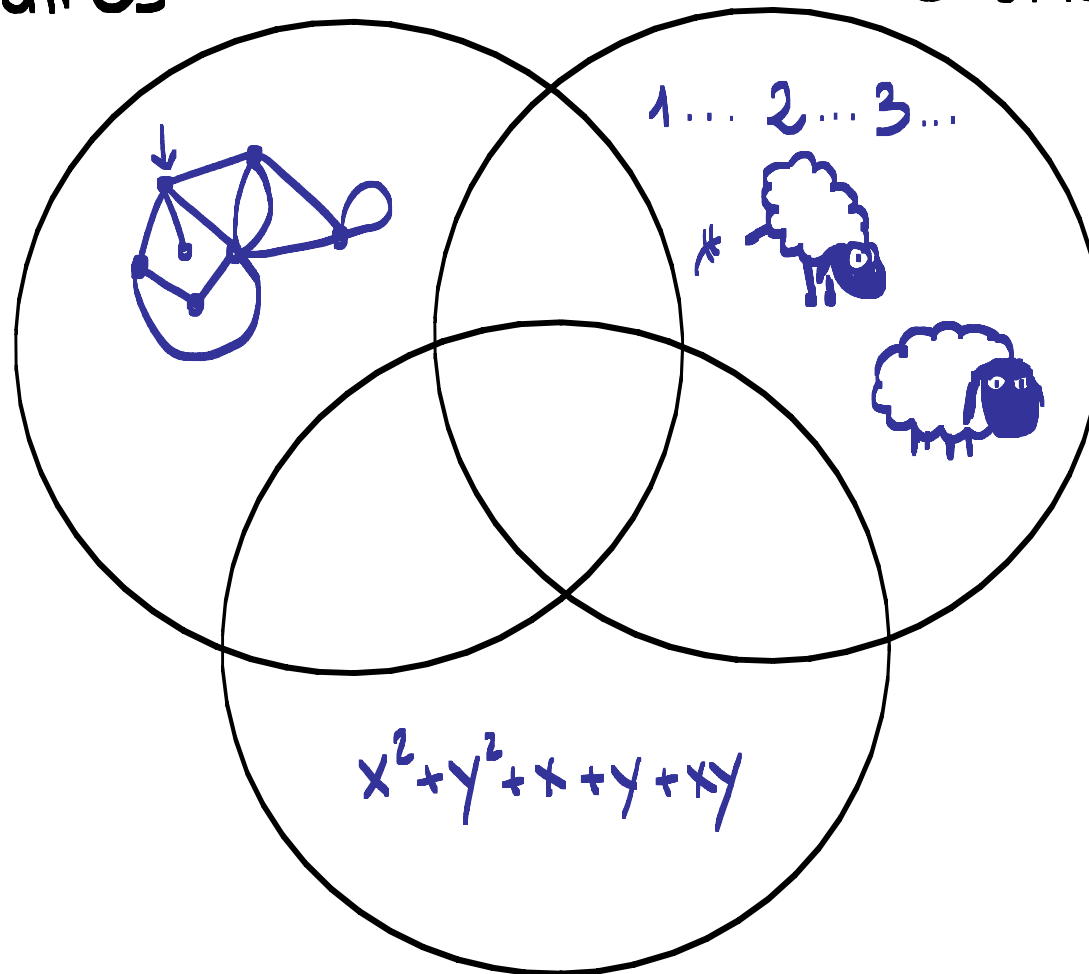
MODÈLE DE POTTS



LES TROIS THÈMES DE MA THÈSE

Cartes
planaires

Combinatoire
énumérative

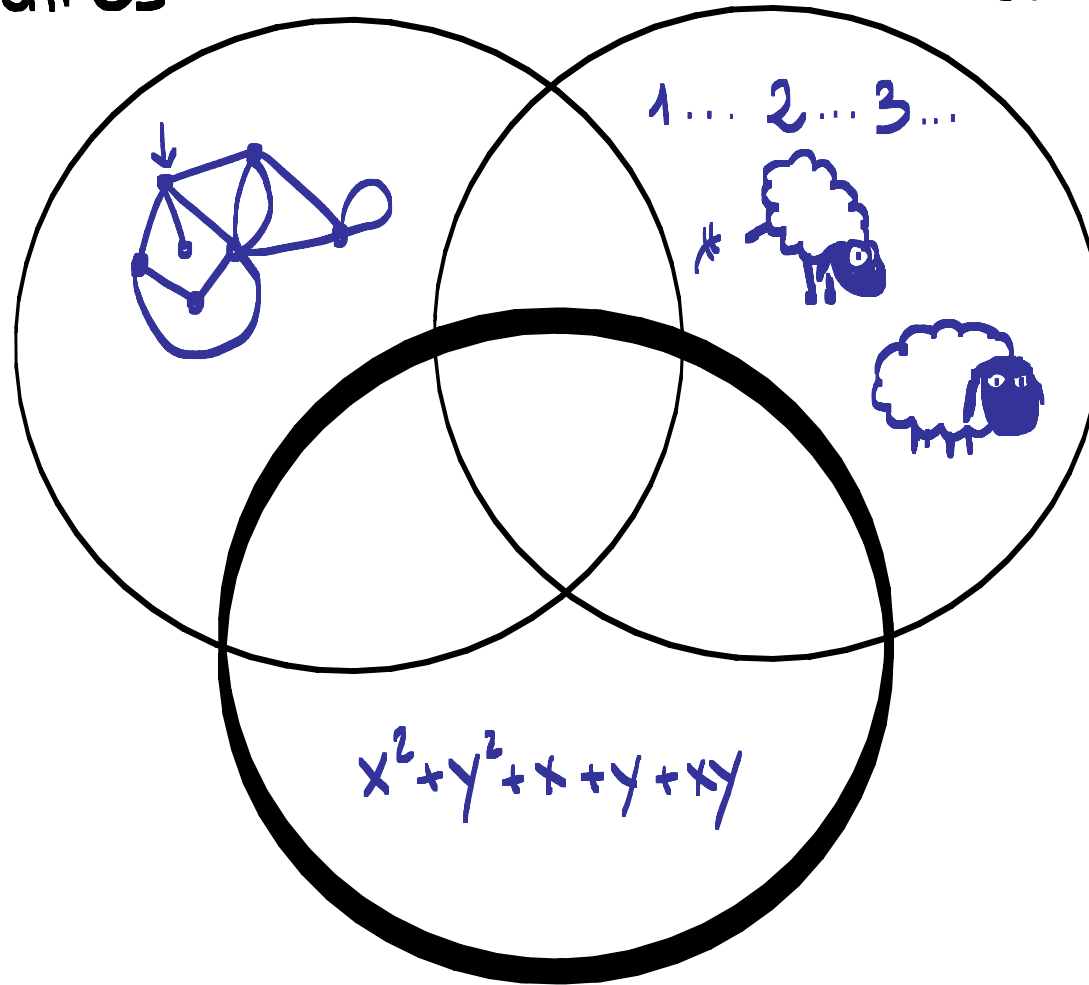


Polynôme de Tutte

LES TROIS THÈMES DE MA THÈSE

Cartes
planaires

Combinatoire
énumérative



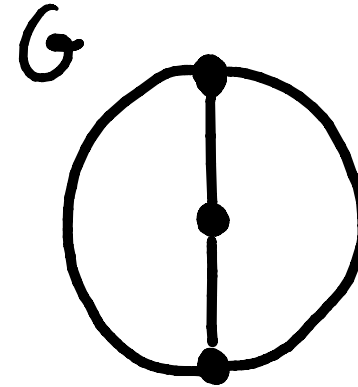
Polynôme de Tutte

SOUS-GRAPHES COUVRANTS

Sous-graphe couvrant de $G =$

graphe S tel que

- $\text{Sommets}(S) = \text{Sommets}(G)$
- $\text{Arêtes}(S) \subseteq \text{Arêtes}(G)$

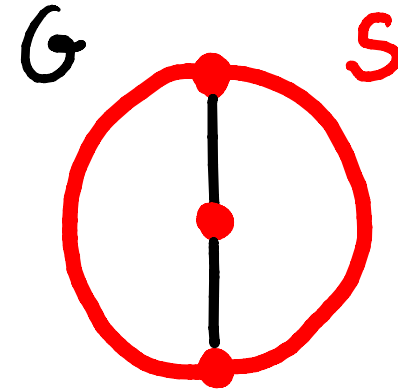


SOUS-GRAPHES COUVRANTS

Sous-graphe couvrant de $G =$

graphe S tel que

- $\text{Sommets}(S) = \text{Sommets}(G)$
- $\text{Arêtes}(S) \subseteq \text{Arêtes}(G)$

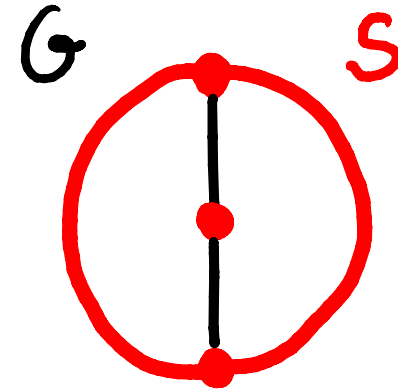


SOUS-GRAPHES COUVRANTS

Sous-graphe couvrant de $G =$

graphe S tel que

- $\text{Sommet}(S) = \text{Sommet}(G)$
- $\text{Arêtes}(S) \subseteq \text{Arêtes}(G)$



$$cc(S) = 2 \quad cycl(S) = 1$$

Deux paramètres:

$cc(S)$ = nombre de composantes connexes de S ,

$cycl(S)$ = nombre cyclomatique de S

= nombre minimal d'arêtes à supprimer pour que S n'ait pas de cycles.

POLYNÔME DE TUTTE

Polynôme de Tutte d'un graphe connexe $G =$

$$T_G(x, y) = \sum_{\substack{S \text{ sous-graphe} \\ \text{couvrant de } G}} (x-1)^{cc(S)-1} (y-1)^{\text{cycl}(S)}$$

Deux paramètres :

$cc(S)$ = nombre de composantes connexes de S ,

$\text{cycl}(S)$ = nombre cyclomatique de S

= nombre minimal d'arêtes à supprimer pour que S n'ait pas de cycles.

POLYNÔME DE TUTTE

Polynôme de Tutte d'un graphe connexe $G =$

$$T_G(x, y) = \sum_{\substack{S \text{ sous-graphe} \\ \text{couvrant de } G}} (x-1)^{cc(S)-1} (y-1)^{\text{cycl}(S)}$$

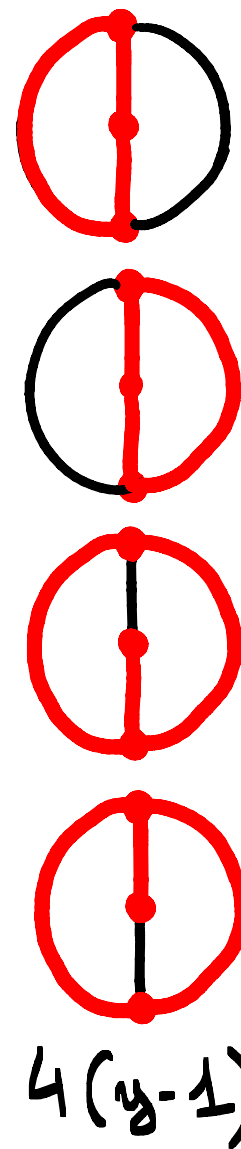
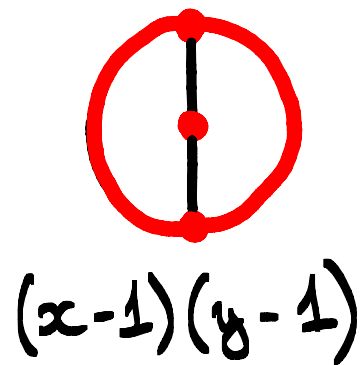
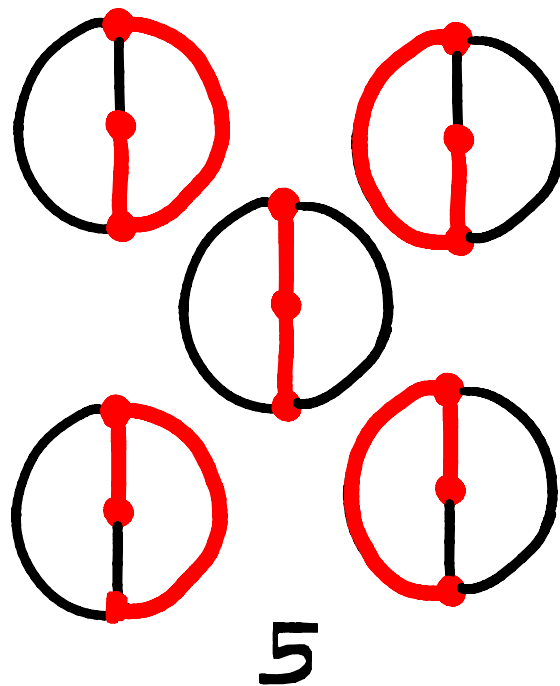
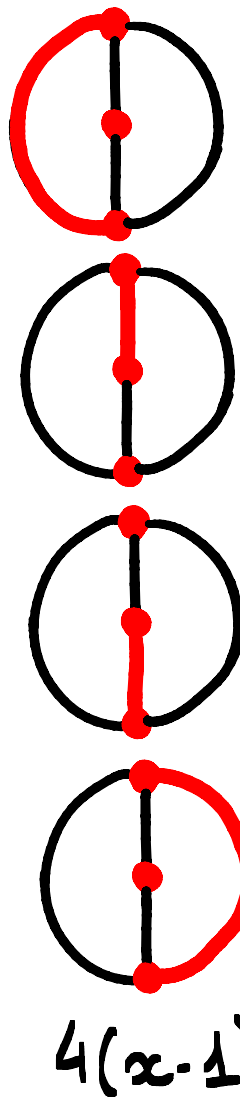
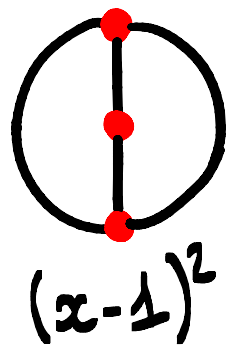
Prop: $T_G(x, y) \in \mathbb{N}[x, y]$

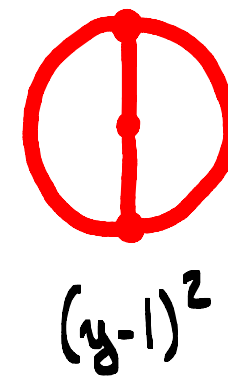
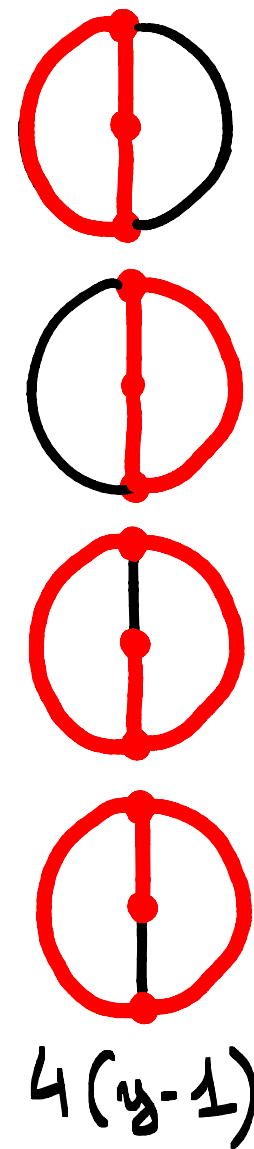
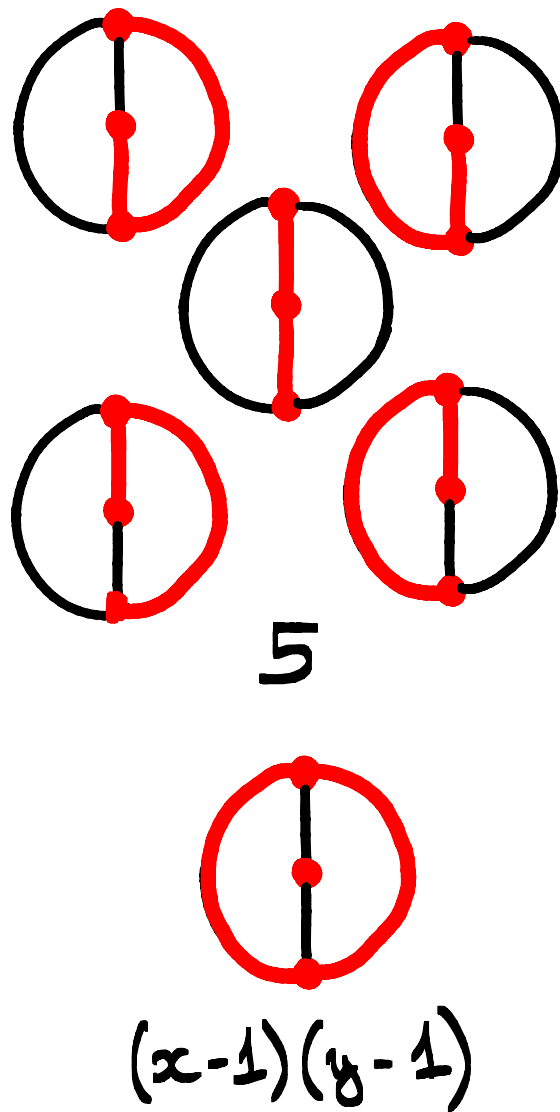
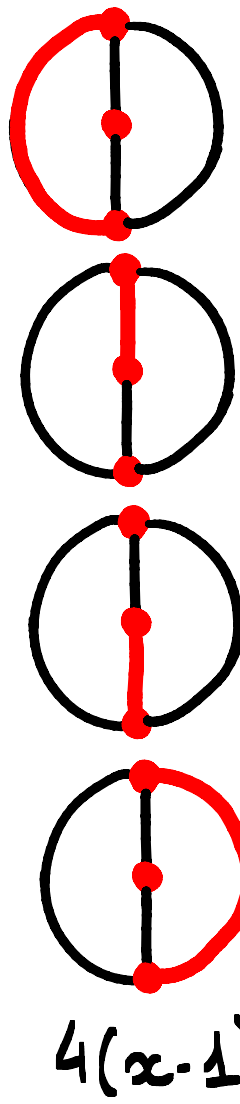
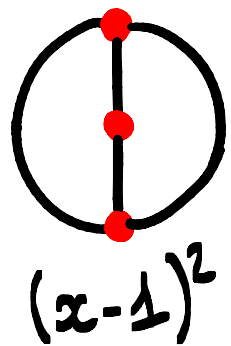
Deux paramètres:

$cc(S)$ = nombre de composantes connexes de S ,

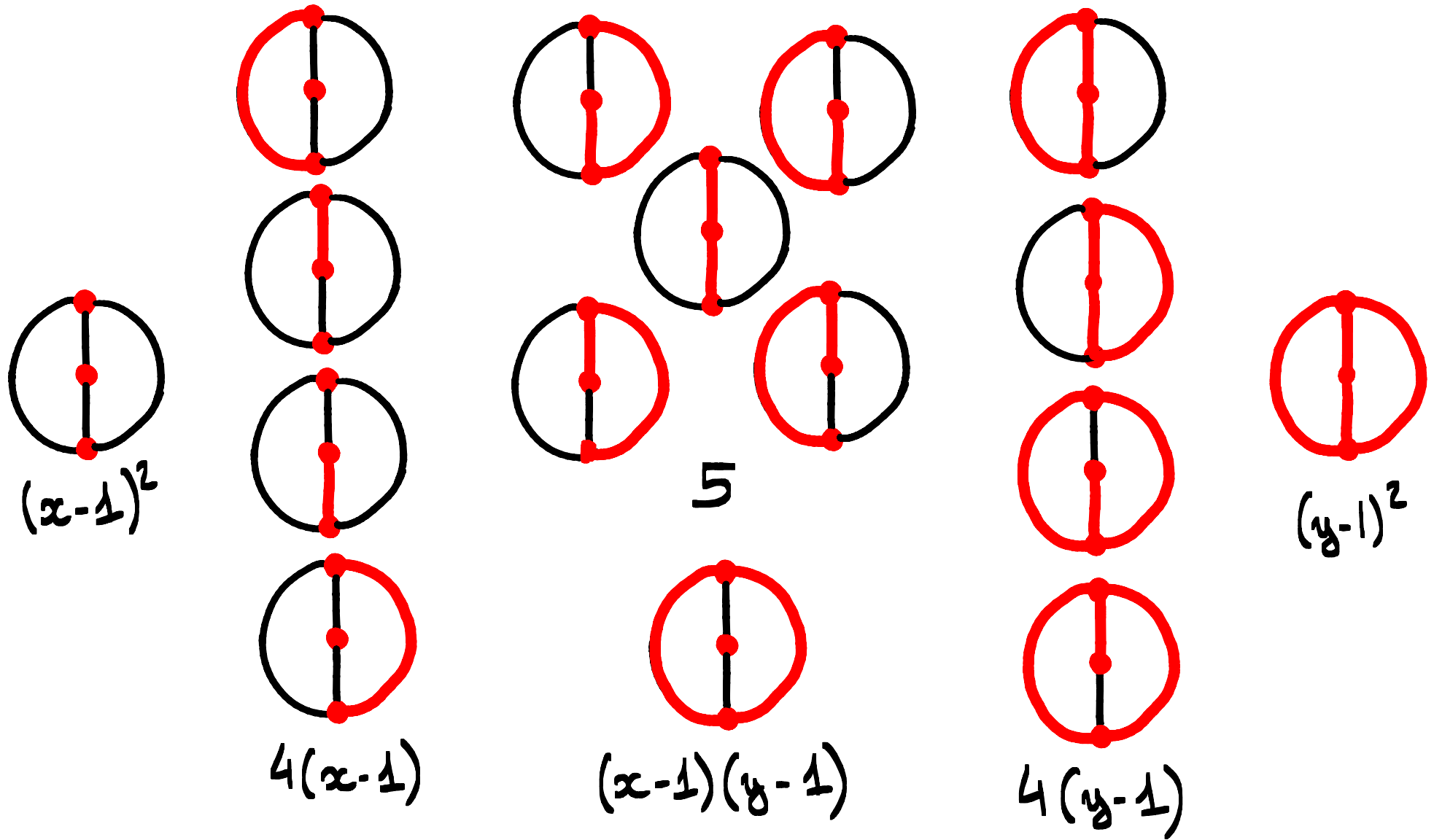
$\text{cycl}(S)$ = nombre cyclomatique de S

= nombre minimal d'arêtes à supprimer pour que S n'ait pas de cycles.





$$T_G(x, y) = (x-1)^2 + 4(x-1) + (x-1)(y-1) + 5 + 4(y-1) + (y-1)^2$$



$$\begin{aligned}
 T_G(x, y) &= (x-1)^2 + 4(x-1) + (x-1)(y-1) + 5 + 4(y-1) + (y-1)^2 \\
 &= x^2 + x + xy + y + y^2
 \end{aligned}$$

INTERPRÉTATION COMBINATOIRE DES COEFFICIENTS?

$$T_G(x, y) = \sum_{T \text{ arbre couvrant}} x^{\text{int}(T)} y^{\text{ext}(T)}$$

$\text{int}(T) =$ nombre d'arêtes internes actives

$\text{ext}(T) =$ nombre d'arêtes externes actives

→ sujet de la seconde partie

INTÉRÊTS

→ équivalent au modèle de Potts [Fortuin-Kasteleyn 72]

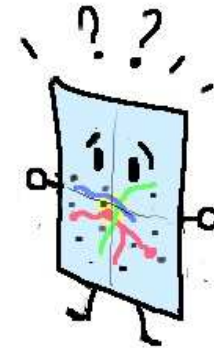
→ nombreuses spécialisations :

- polynôme chromatique de $G = (-1)^{\text{nbe sommets}} \times q \times T_G(1-q, 0)$
- polynôme de fiabilité (théorie des réseaux)
- polynôme de Jones d'un nœud alterné (th. des nœuds)
- polynôme énumérateur des poids (théorie des codes)
- configurations récurrentes du tas de sable

→ plein de belles propriétés...

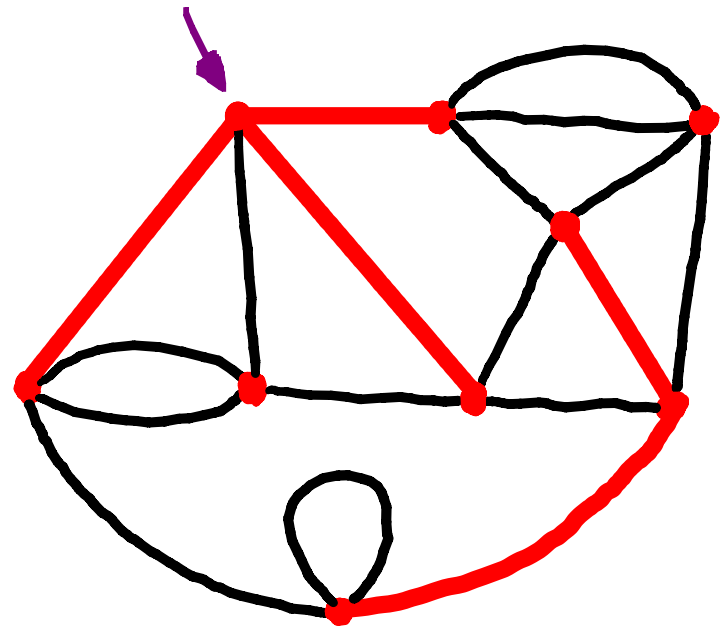
PARTIE I

CARTES FORESTIÈRES



CARTES FORESTIÈRES : DÉFINITION

Forêt couvrante de $G =$
sous-graphe couvrant
sans cycle

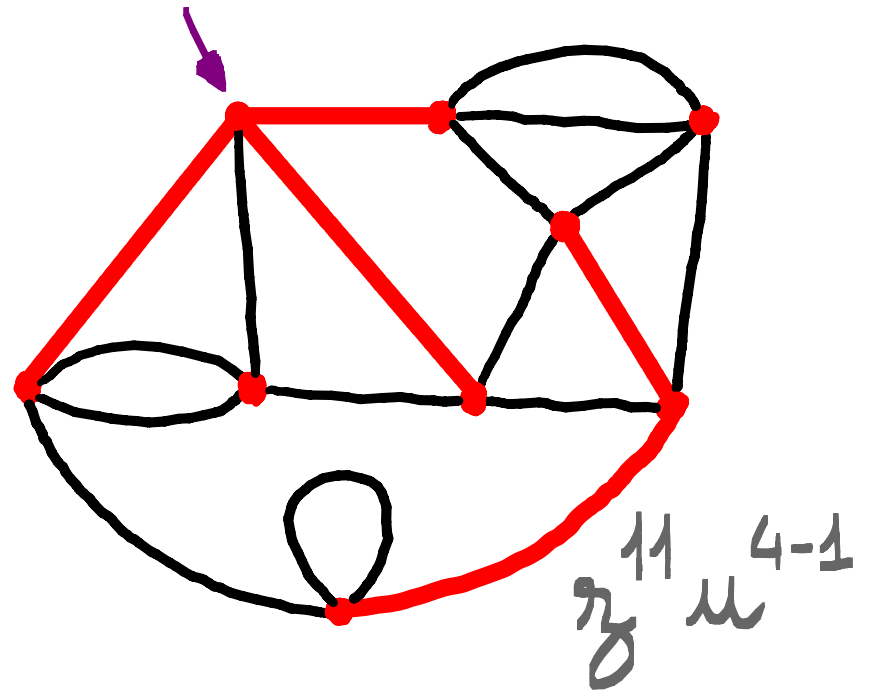


Carte forestière $(C, F) =$ carte planeaire $C +$ forêt couvrante F

$$F(z, u) = \sum_{\substack{(C, F) \text{ carte} \\ \text{forestière tétravalente}}} z^{\# \text{ faces}(C)} u^{cc(F) - 1}$$

CARTES FORESTIÈRES : DÉFINITION

Forêt couvrante de $G =$
 sous-graphe couvrant
 sans cycle



Carte forestière $(C, F) =$ carte planeaire $C +$ forêt couvrante F

$$F(\zeta, \mu) = \sum_{\substack{(C, F) \text{ carte} \\ \text{forestière tétravalente}}} \zeta^{\# \text{ faces}(C)} \mu^{cc(F) - 1}$$

VALEURS SPÉCIFIQUES DE μ

$$F(\mathbb{Z}, \mu) = \sum_{\substack{(C,F) \text{ carte} \\ \text{forestière tétravalente}}} \mathbb{Z}^{\# \text{ faces}(C)} \mu^{cc(F) - 1}$$

* $\mu = 1$: forêts couvrantes

* $\mu = 0$: arbres couvrants [Mullin, 1967]

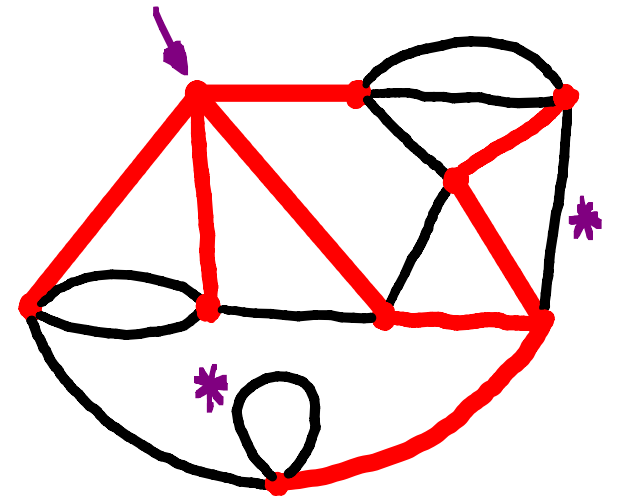
* $\mu = -1$: orientations acycliques sur les quadrangulations dans lesquelles la racine est accessible [Las Vergnas, 1984]

VALEURS GÉNÉRIQUES DE u

- 1) Sous-graphes connexes sur les quadrangulations (comptés par cycles)
 - 2) Polynôme de Tutte $T_C(u+1, 1)$
 - 3) Configurations récurrentes du tas de sable.
 - 4) Limite $q \rightarrow 0$ du modèle de Potts
- } Domaine naturel
 $u \in [-1, +\infty[$
-

2) \Rightarrow

$$F(z, u) = \sum_{\substack{\text{carte} \\ \text{tétravalente } C \\ \text{arbre couvrant } T}} z^{\# \text{faces}(C)} (u+1)^{\text{int}(T)}$$



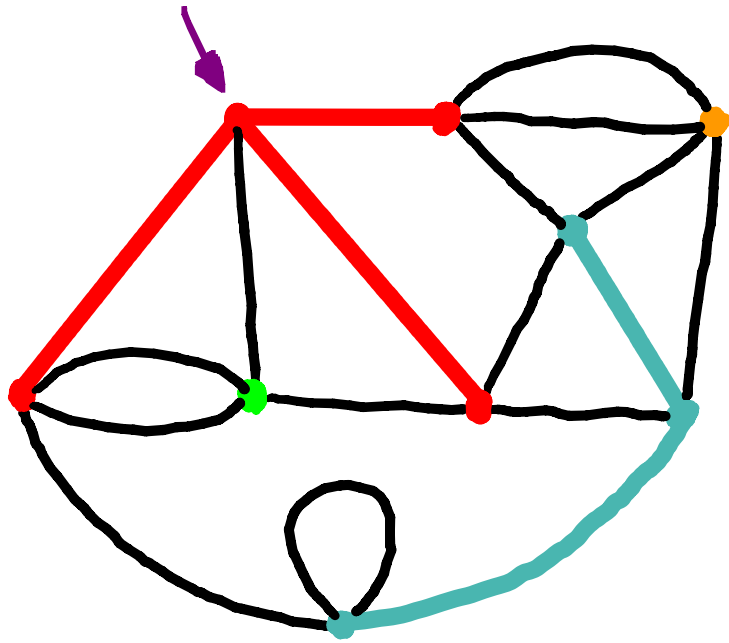
QUESTIONS

→ Caractérisation de F ?

→ Comportement asymptotique ?

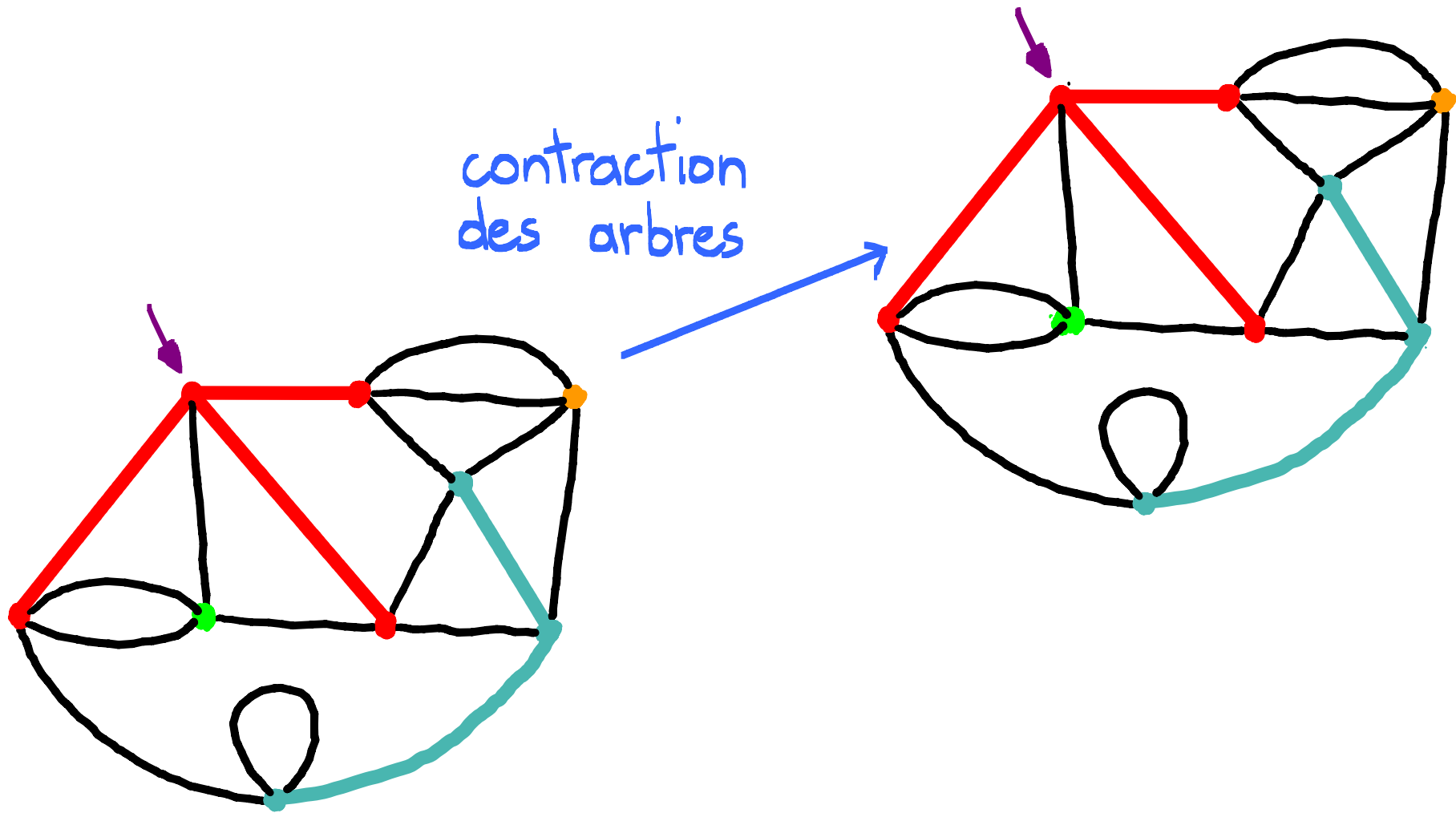
→ Nature de F ?

DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES

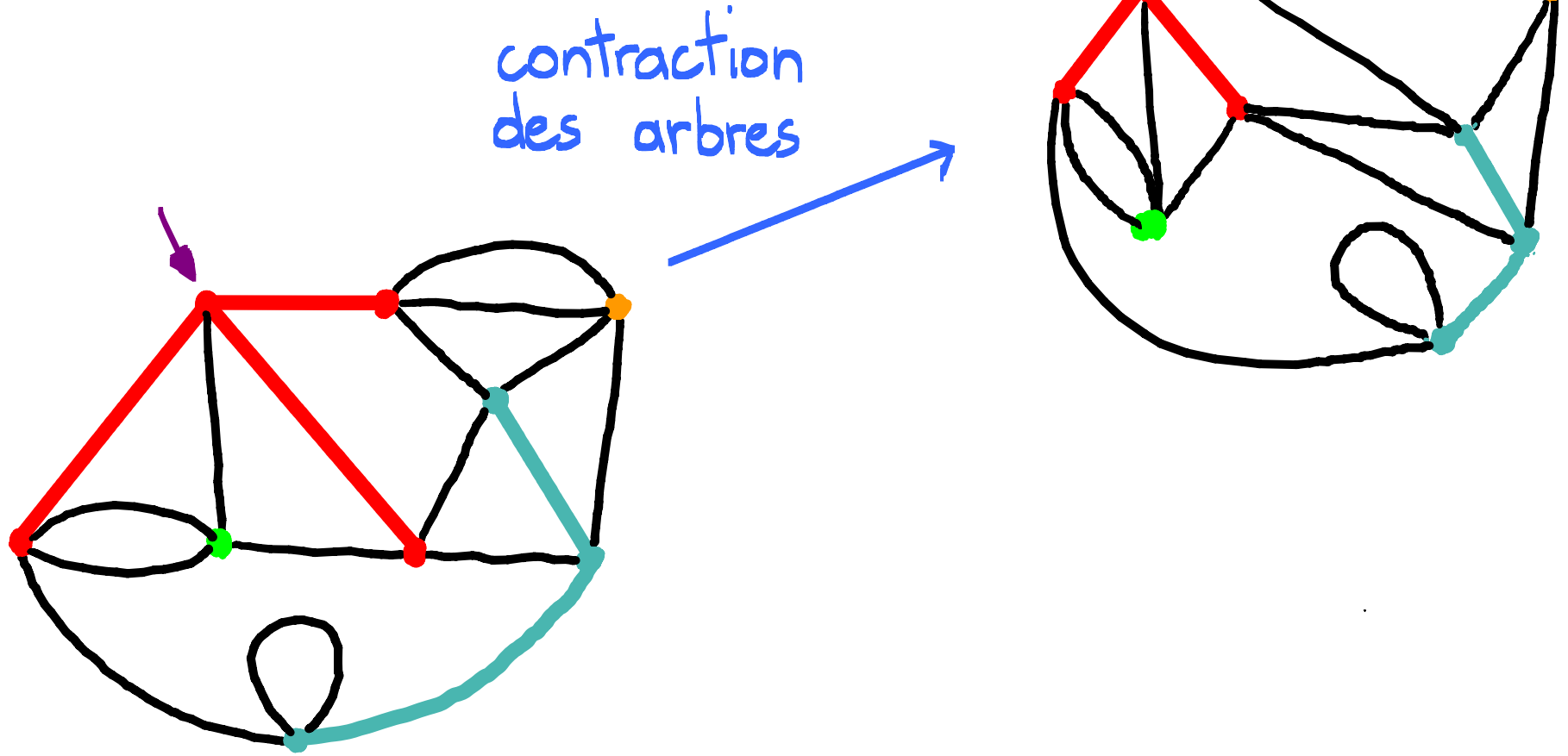


Idée de
[Bouttier - Di Francesco - Guitten, 2008]

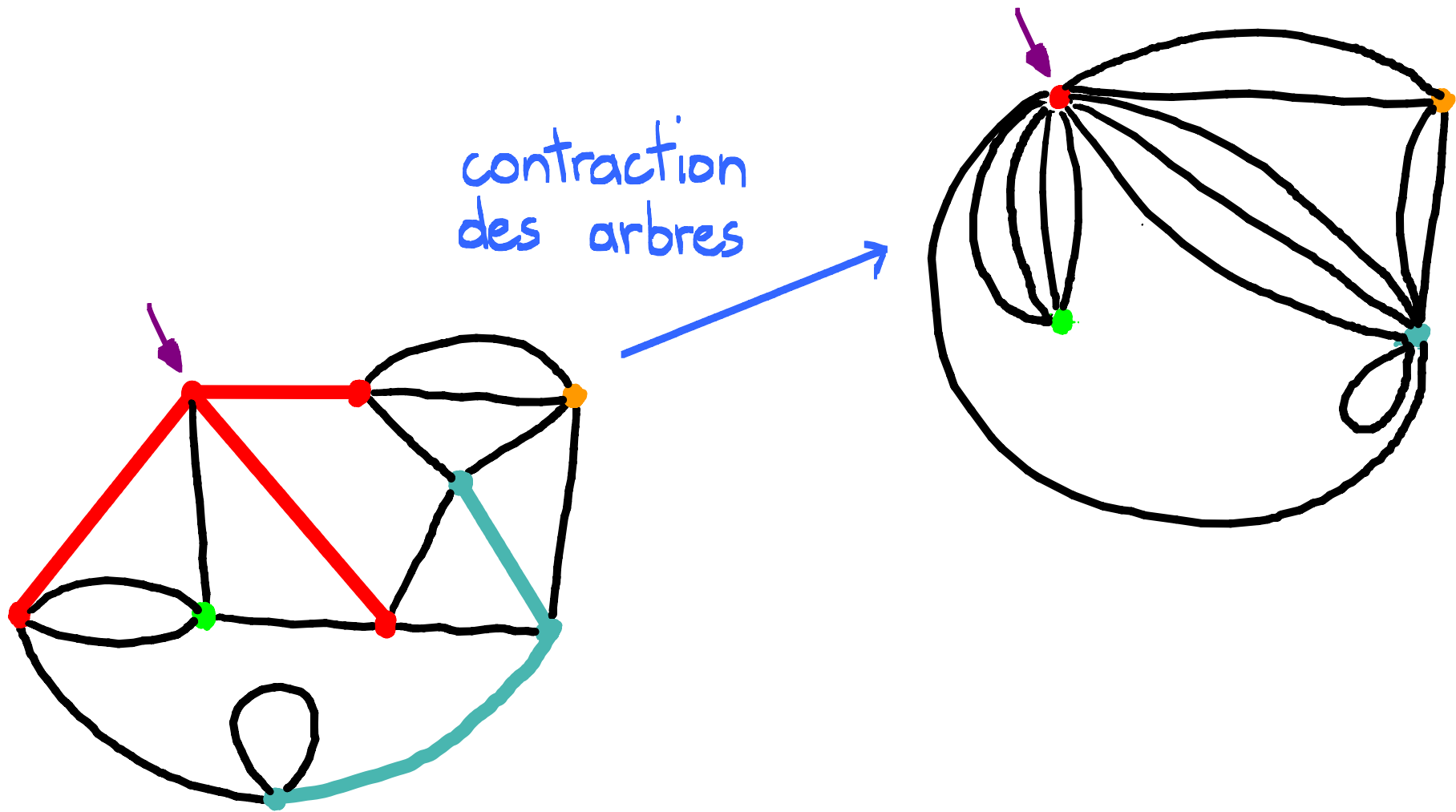
DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



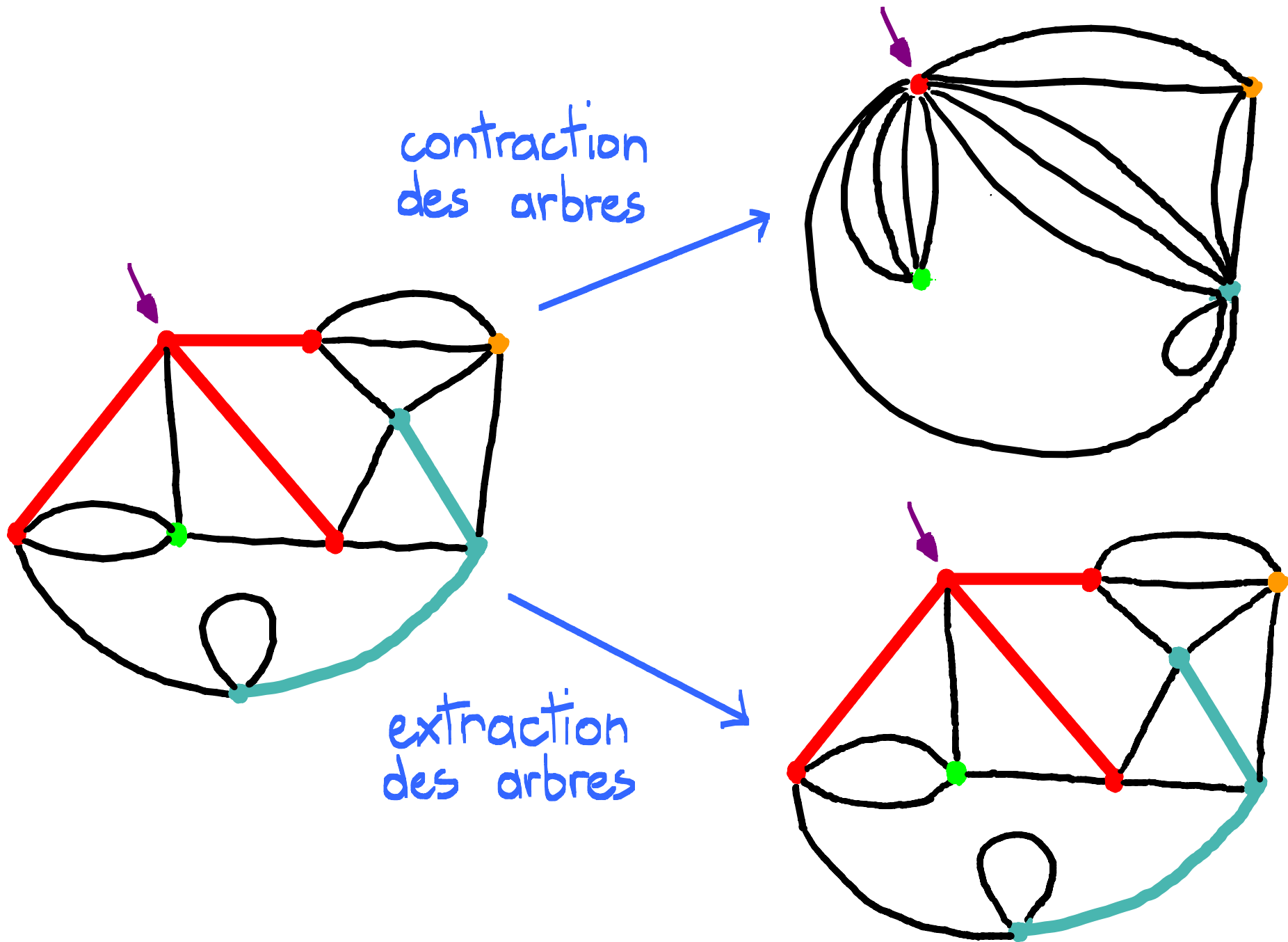
DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



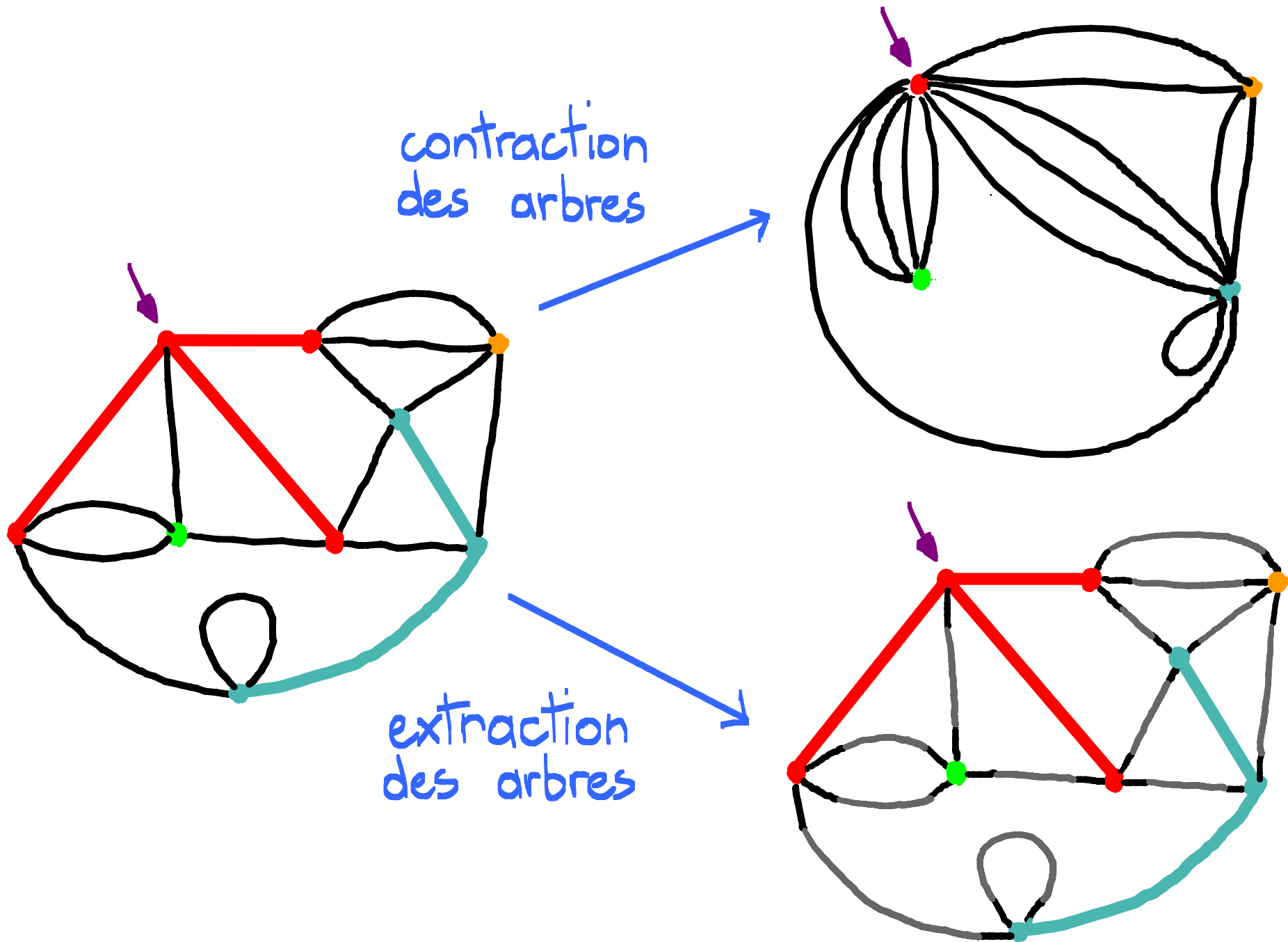
DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



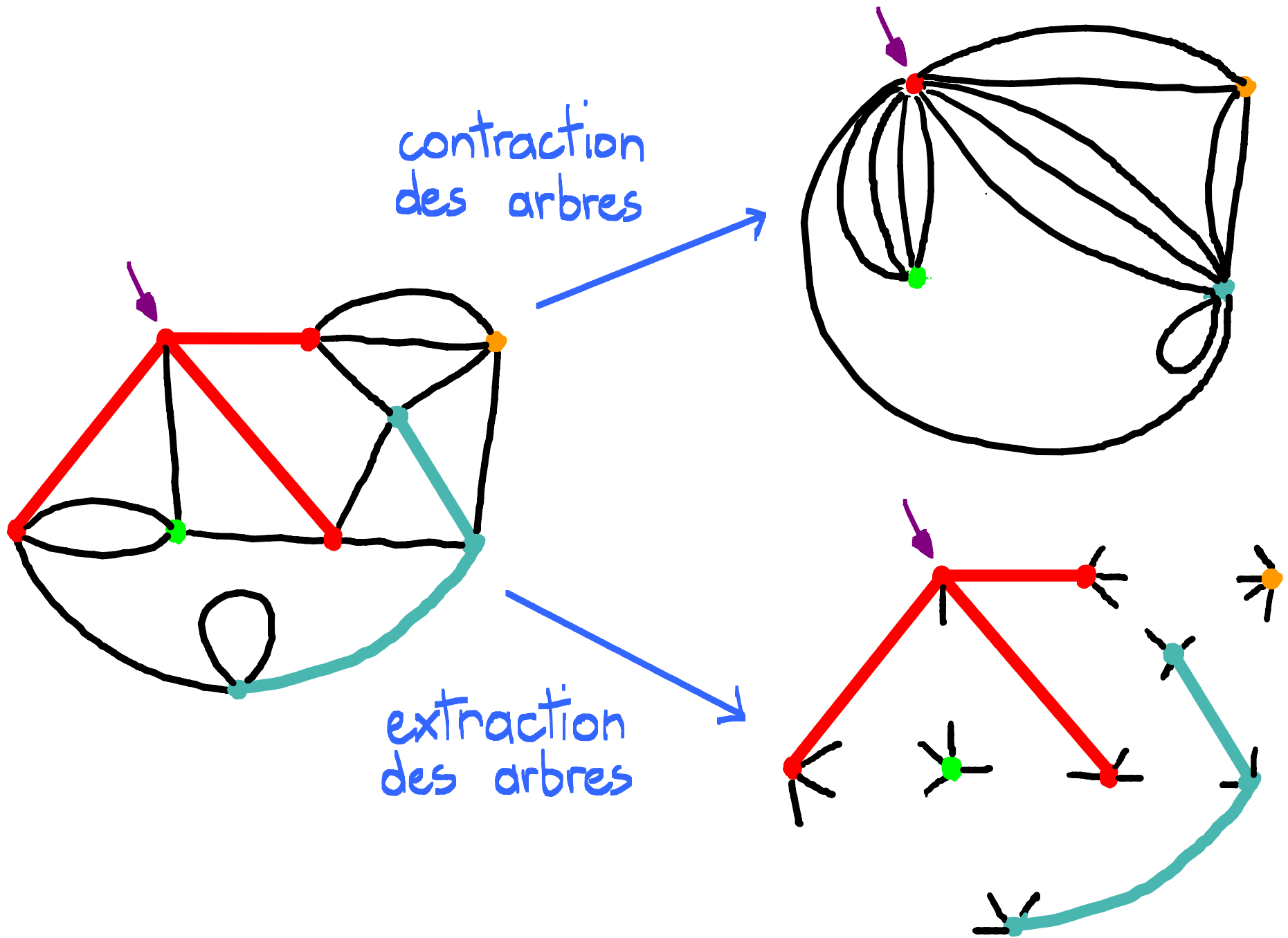
DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



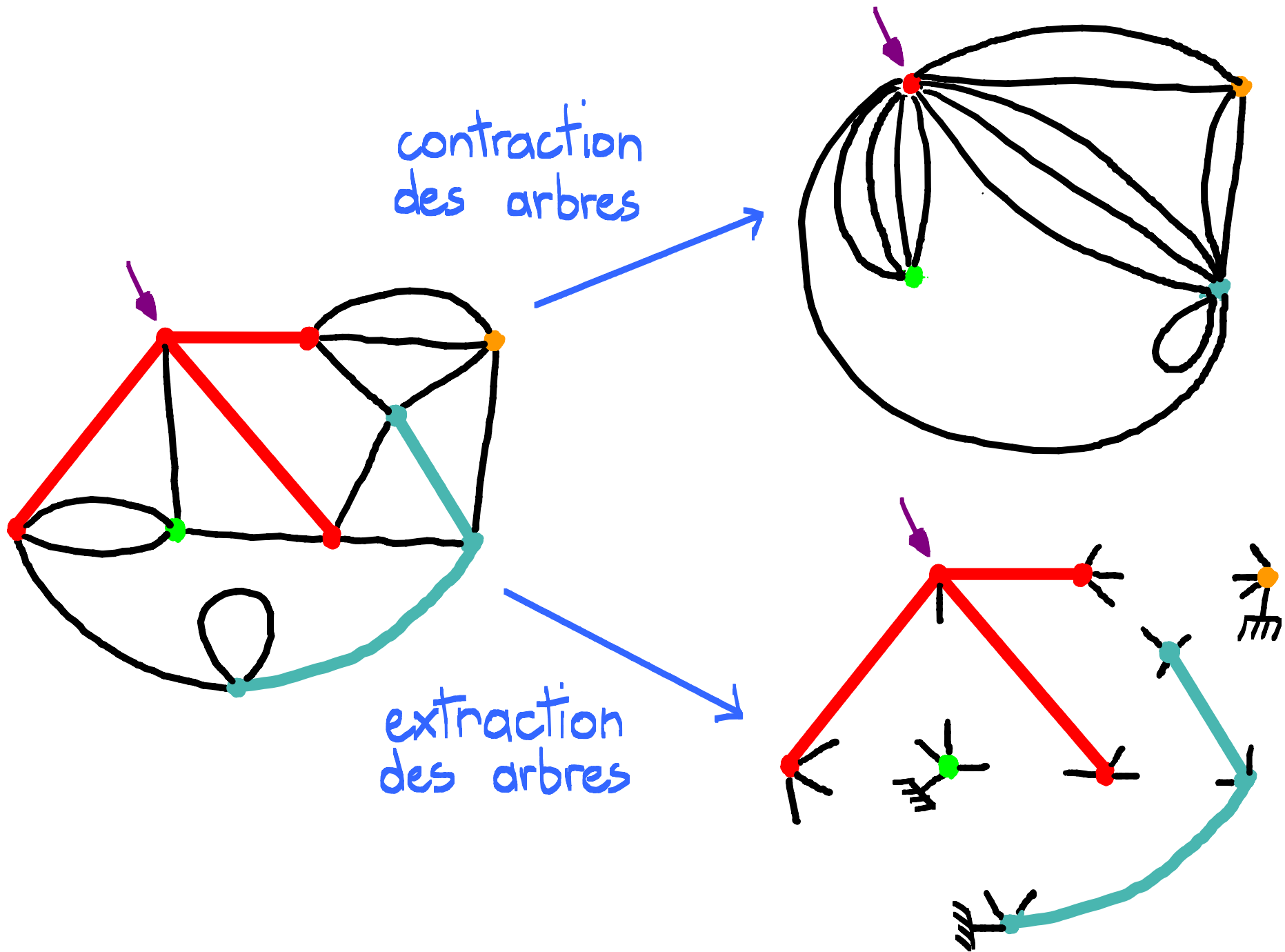
DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



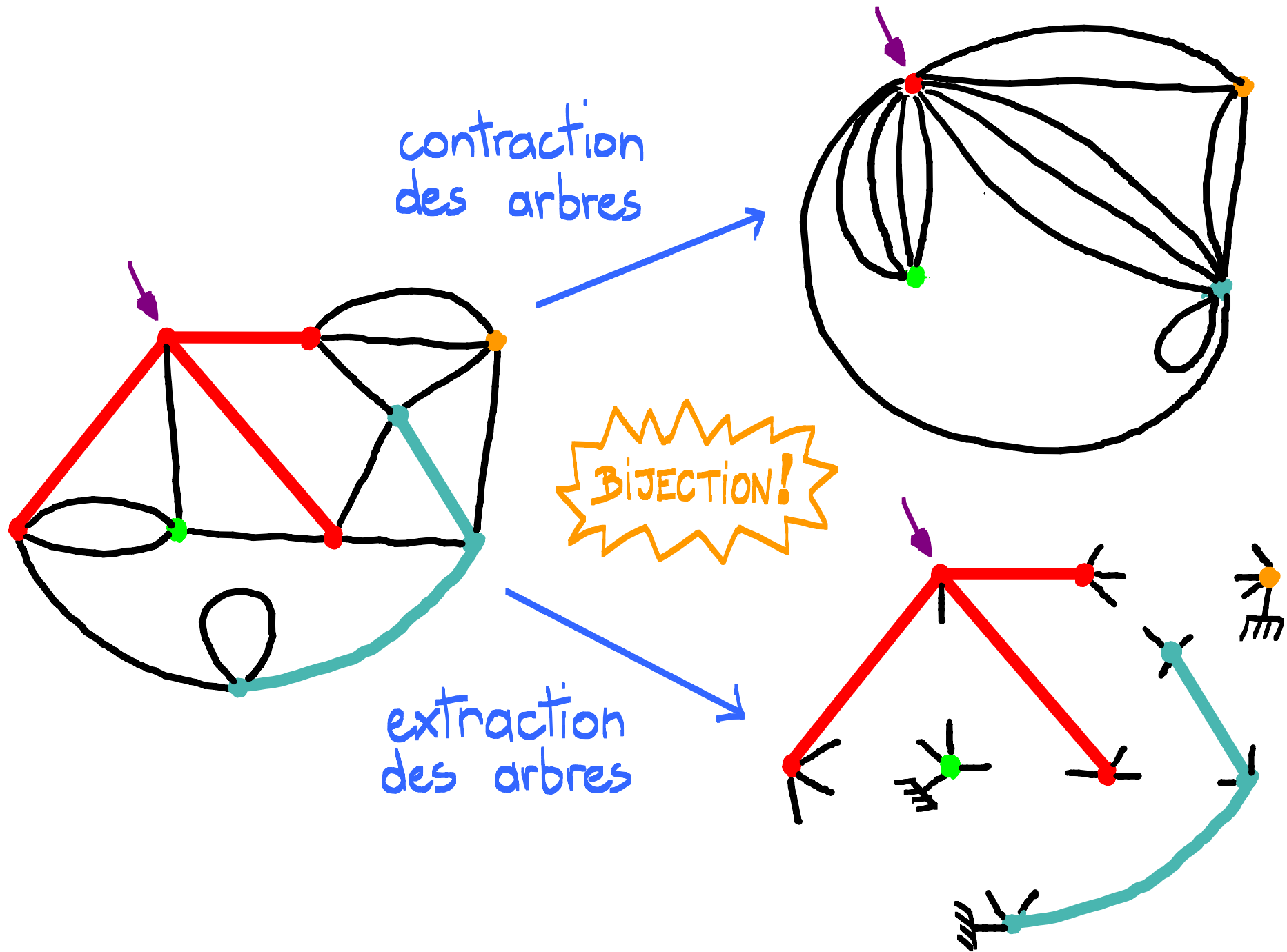
DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



TRADUCTION EN TERMES DE SÉRIES GÉNÉRATRICES

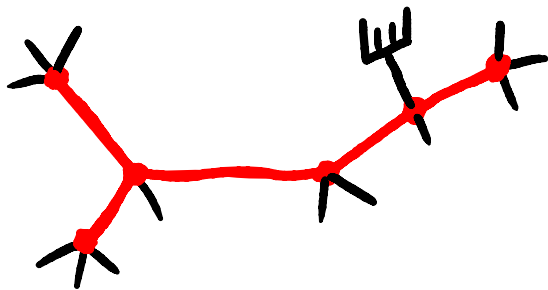
$$M(z, u; g_1, g_2, g_3, \dots; h_1, h_2, h_3, \dots) =$$

série génératrice des cartes planaires avec un poids :

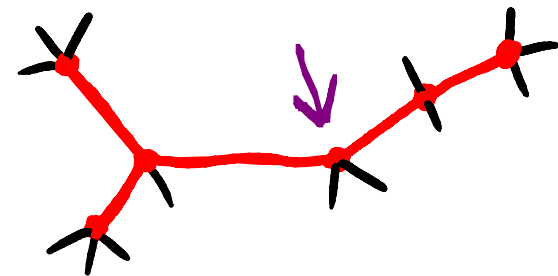
- z par face,
- $u g_k$ par sommet non racine de degré k ,
- h_k si le sommet racine a degré k .

$$F(z, u) = M(z, u; t_1, t_2, t_3, \dots; t_1^c, t_2^c, t_3^c, \dots)$$

$t_k = \#$ arbres tétravalents à k feuilles enracinés sur une feuille



$t_k^c = \#$ arbres tétravalents à k feuilles enracinés sur un coin.



TRADUCTION EN TERMES DE SÉRIES GÉNÉRATRICES

$$M(z, u; g_1, g_2, g_3, \dots; h_1, h_2, h_3, \dots) =$$

série génératrice des cartes planaires avec un poids :

- z par face,
- $u g_k$ par sommet non racine de degré k ,
- h_k si le sommet racine a degré k .

Cette série génératrice est connue!

cf [Bouttier - Guitter, 2012]

(et M' a une forme plus sympathique que M)

Notation : $x' = \frac{\partial X}{\partial z}$

LA SÉRIE GÉNÉRATRICE DES CARTES FORESTIÈRES

Théorème

Il existe une unique série R en z à coefficients dans $\mathbb{Q}[u]$ telle que :

$$R = z + u \sum_{i \geq 2} \frac{(3i-3)!}{(i-1)!^2 i!} R^i$$

De plus,

$$F' = 4 \sum_{i \geq 2} \frac{(3i-2)!}{(i-2)! i!^2} R^i$$

LA SÉRIE GÉNÉRATRICE DES CARTES FORESTIÈRES

Théorème

Il existe une unique série R en z à coefficients dans $\mathbb{Q}[u]$ telle que :

$$R = z + u \sum_{i \geq 2} \frac{(3i-3)!}{(i-1)!^2 i!} R^i$$

De plus,

$$F' = 4 \sum_{i \geq 2} \frac{(3i-2)!}{(i-2)! i!^2} R^i$$

Pour $u=0$, [Mullin]

$$R = z \quad \text{et} \quad F' = \sum_{i \geq 2} 4 \frac{(3i-2)!}{(i-2)! i!^2} z^i \quad \text{holonome}$$

LA SÉRIE GÉNÉRATRICE DES CARTES FORESTIÈRES

Théorème

Il existe une unique série R en z à coefficients dans $\mathbb{Q}[u]$ telle que :

$$R = z + u \phi(R)$$

De plus,

$$F' = \Theta(R)$$

où

$$\phi(x) = \sum_{i \geq 2} \frac{(3i-3)!}{(i-1)!^2 i!} x^i, \quad \Theta(x) = 4 \sum_{i \geq 2} \frac{(3i-2)!}{(i-2)! i!^2} x^i.$$

UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE POUR F

$$\mathcal{R} = \mathcal{Y} + u \phi(\mathcal{R}) \quad F' = \Theta(\mathcal{R})$$

Prop F est différentiellement algébrique.

(La raison fondamentale : l'holonomie de ϕ et Θ)

UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE POUR F

$$\mathbb{R} = \mathbb{Z} + u \phi(\mathbb{R}) \quad F' = \Theta(\mathbb{R})$$

Prop F est différentiellement algébrique.

(La raison fondamentale : l'holonomie de ϕ et Θ)

recoupe le résultat de Bernardi et Bousquet-Mélou :

La série génératrice de Potts pour les cartes planaires est différentiellement algébrique.

(mais établi de manière plus douloureuse)

UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE POUR F

$$\mathcal{R} = \mathcal{Z} + u \phi(\mathcal{R}) \quad F' = \Theta(\mathcal{R})$$

Prop F est différentiellement algébrique.

(La raison fondamentale : l'holonomie de ϕ et Θ)

Peut-on calculer explicitement une équation différentielle ?

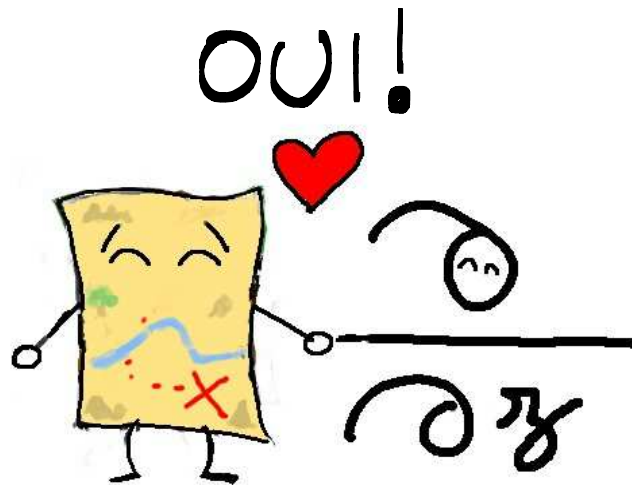
UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE POUR F

$$\mathbb{R} = \mathbb{C} + u \phi(\mathbb{R}) \quad F' = \Theta(\mathbb{R})$$

Prop F est différentiellement algébrique.

(La raison fondamentale : l'holonomie de ϕ et Θ)

Peut-on calculer explicitement une équation différentielle ?



UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE POUR F

$$\begin{aligned} & 9F'^2 F''^5 \mu^6 + 36 F'^2 F''^3 F''' \mu^5 \eta + 144 F'^2 F''^4 \mu^5 - 12(21\eta - 1) F' F''^5 \mu^5 + 432 F'^2 F''^2 F''' \mu^4 \eta \\ & - 48(24\eta - 1) F' F''^3 F''' \mu^4 \eta + 864 F'^2 F''^3 \mu^4 - 96(27\eta - 2) F' F''^4 \mu^4 + 4(27\eta - 1)(15\eta - 1) F''^5 \mu^4 \\ & + 1728 F'^2 F'' F''' \mu^3 \eta - 288(21\eta - 2) F' F''^2 F''' \mu^3 \eta + 10368 F' F''^2 \mu^2 \eta^3 + 16(27\eta - 1)(21\eta - 1) F''^3 F''' \mu^3 \eta \\ & + 2304 F'^2 F''^2 \mu^3 - 288(31\eta - 4) F' F''^3 \mu^3 - 64(6\mu\eta - 162\eta^2 + 33\eta - 1) F''^4 \mu^3 + 2304 F'^2 F''' \mu^2 \eta \\ & - 2304(6\eta - 1) F' F'' F''' \mu^2 \eta - 192(8\mu\eta - 54\eta^2 + 29\eta - 1) F''^2 F''' \mu^2 \eta - 768(2\mu + 189\eta - 7) F''^2 \mu \eta^3 \\ & + 2304 F'^2 F'' \mu^2 - 3072(3\eta - 1) F' F''^2 \mu^2 - 192(24\mu\eta - 27\eta^2 + 55\eta - 2) F''^3 \mu^2 - 1536(21\eta - 2) F' F''' \mu \eta \\ & - 768(12\mu\eta + 81\eta^2 + 24\eta - 1) F'' F''' \mu \eta + 1536(9\eta + 2) F' F'' \mu - 512(39\mu\eta + 81\eta^2 + 51\eta - 2) F''^2 \mu \\ & + 36864 F' \eta - 1024(12\mu\eta - 162\eta^2 + 33\eta - 1) F''' \eta - 1024(36\mu\eta + 27\eta - 1) F'' - 24576 \eta = 0. \end{aligned}$$

équation différentielle d'ordre 2 en F' et de degré 7
(mais pas en F)

UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE POUR F

$$\begin{aligned}
 & 9F'^2 F''^5 \mu^6 + 36F'^2 F''^3 F''' \mu^5 \eta_2 + 144F'^2 F''^4 \mu^5 - 12(21\eta_2 - 1)F'F''^5 \mu^5 + 432F'^2 F''^2 F''' \mu^4 \eta_2 \\
 & - 48(24\eta_2 - 1)F'F''^3 F''' \mu^4 \eta_2 + 864F'^2 F''^3 \mu^4 - 96(27\eta_2 - 2)F'F''^4 \mu^4 + 4(27\eta_2 - 1)(15\eta_2 - 1)F''^5 \mu^4 \\
 & + 1728F'^2 F'' F''' \mu^3 \eta_2 - 288(21\eta_2 - 2)F'F''^2 F''' \mu^3 \eta_2 + 10368F'F''^2 \mu^2 \eta_2^3 + 16(27\eta_2 - 1)(21\eta_2 - 1)F''^3 F''' \mu^3 \eta_2 \\
 & + 2304F'^2 F''^2 \mu^3 - 288(31\eta_2 - 4)F'F''^3 \mu^3 - 64(6\mu\eta_2 - 162\eta_2^2 + 33\eta_2 - 1)F''^4 \mu^3 + 2304F'^2 F''' \mu^2 \eta_2 \\
 & - 2304(6\eta_2 - 1)F'F'' F''' \mu^2 \eta_2 - 192(8\mu\eta_2 - 54\eta_2^2 + 29\eta_2 - 1)F''^2 F''' \mu^2 \eta_2 - 768(2\mu + 189\eta_2 - 7)F''^2 \mu^2 \eta_2^3 \\
 & + 2304F'^2 F'' \mu^2 - 3072(3\eta_2 - 1)F'F''^2 \mu^2 - 192(24\mu\eta_2 - 27\eta_2^2 + 55\eta_2 - 2)F''^3 \mu^2 - 1536(21\eta_2 - 2)F'F''' \mu \eta_2 \\
 & - 768(12\mu\eta_2 + 81\eta_2^2 + 24\eta_2 - 1)F'' F''' \mu \eta_2 + 1536(9\eta_2 + 2)F'F'' \mu - 512(39\mu\eta_2 + 81\eta_2^2 + 51\eta_2 - 2)F''^2 \mu \\
 & + 36864F' \eta_2 - 1024(12\mu\eta_2 - 162\eta_2^2 + 33\eta_2 - 1)F''' \eta_2 - 1024(36\mu\eta_2 + 27\eta_2 - 1)F'' - 24576\eta_2 = 0.
 \end{aligned}$$

équation différentielle d'ordre 2 en F' et de degré 7
(mais pas en F)

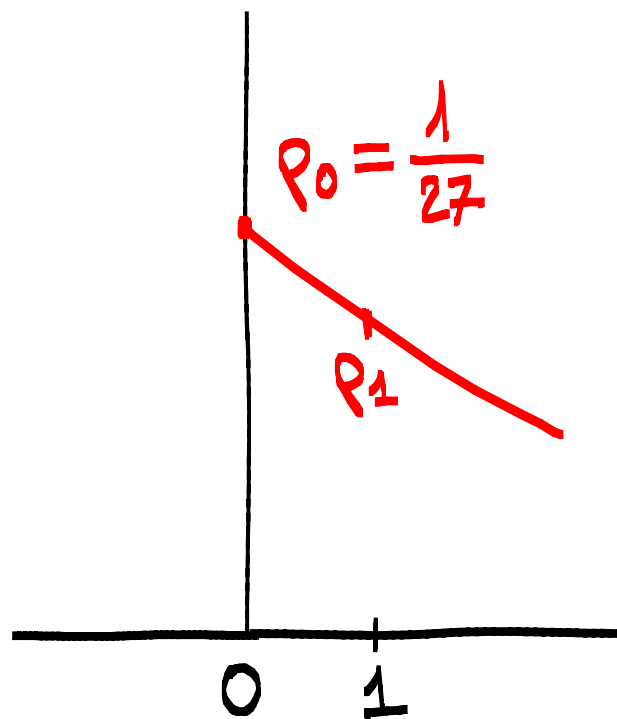
(De plus, c'est l'équation d'ordre minimal) ←

Merci à
Alin Bostan
Bruno Salvy
et Michael Singer.

RAYON DE CONVERGENCE

Fixons μ ,

$\rho_\mu =$ rayon de convergence de $F(z, \mu) = \sum_n f_n(\mu) z^n$.



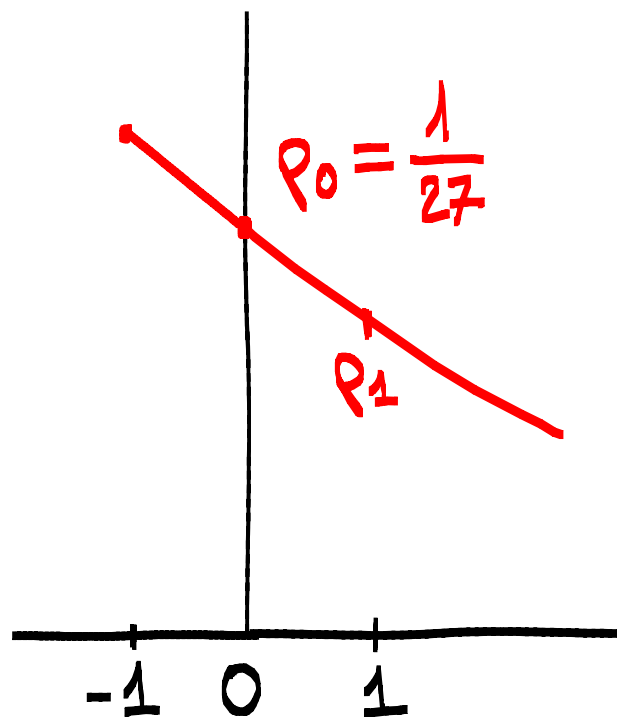
$$\begin{cases} \rho_\mu = z_\mu - \mu \phi(z_\mu) \\ \phi'(z_\mu) = \frac{1}{\mu} \end{cases}$$

RAYON DE CONVERGENCE

Fixons $\mu \in [-1, +\infty[$,

$\rho_\mu =$ rayon de convergence de $F(z, \mu) = \sum_n f_n(\mu) z^n$.

ρ_μ est affine
sur $[-1, 0]$!



$$\begin{cases} \rho_\mu = z_\mu - \mu \phi(z_\mu) \\ \phi'(z_\mu) = \frac{1}{\mu} \end{cases} \quad (\mu > 0)$$

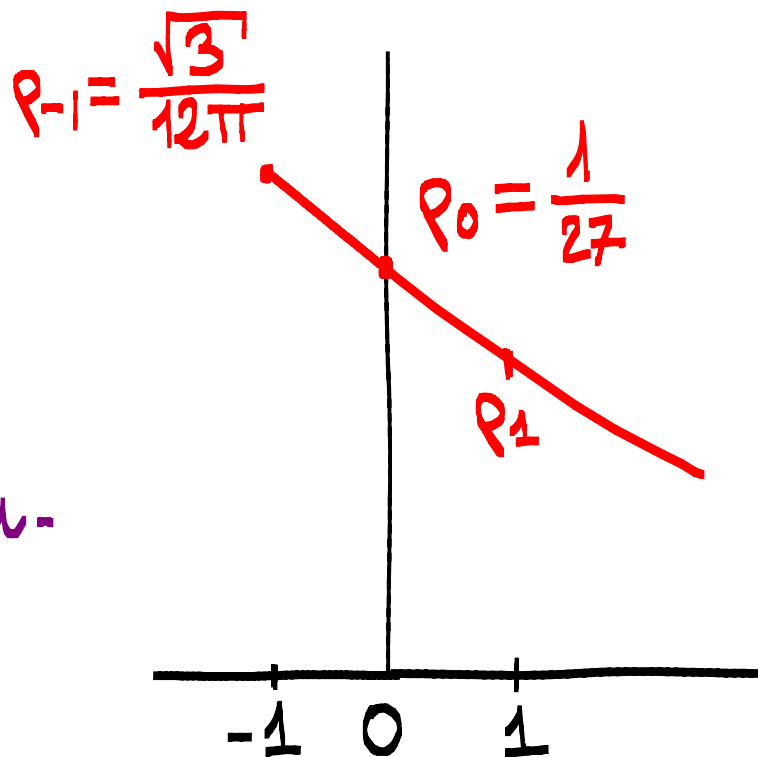
RAYON DE CONVERGENCE

Fixons $\mu \in [-1, +\infty[$,

$\rho_\mu =$ rayon de convergence de $F(z, \mu) = \sum_n f_n(\mu) z^n$.

ρ_μ est affine
sur $[-1, 0]$!

$$\rho_\mu = \frac{1}{27}(1+\mu) - \frac{\sqrt{3}}{12\pi}\mu.$$



$$\begin{cases} \rho_\mu = z_\mu - \mu \phi(z_\mu) \\ \phi'(z_\mu) = \frac{1}{\mu} \end{cases} \quad (\mu > 0)$$

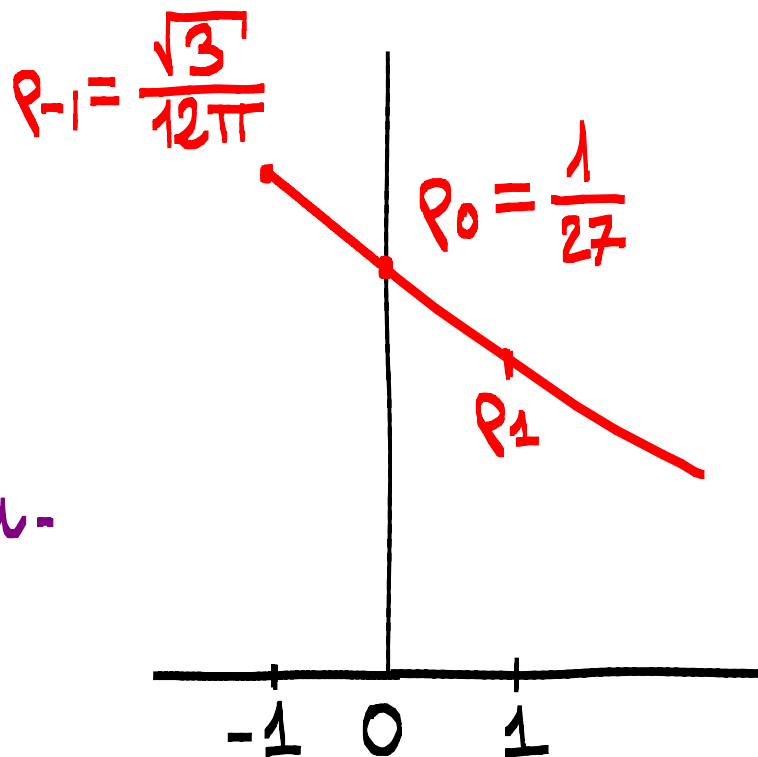
RAYON DE CONVERGENCE

Fixons $\mu \in [-1, +\infty[$,

$\rho_\mu =$ rayon de convergence de $F(z, \mu) = \sum_n f_n(\mu) z^n$.

ρ_μ est affine
sur $[-1, 0]$!

$$\rho_\mu = \frac{1}{27}(1+\mu) - \frac{\sqrt{3}}{12\pi}\mu.$$



$$\begin{cases} \rho_\mu = z_\mu - \mu \phi(z_\mu) \\ \phi'(z_\mu) = \frac{1}{\mu} \end{cases} \quad (\mu > 0)$$

Cor

ρ_{-1} est transcendant :
 $F(z, -1)$ n'est pas holonome.

TRANSITION DE PHASE EN 0

$$f_n(u) = [z^n] F(z, u)$$

$$-1 \leq u < 0$$

$$f_n(u) \sim \frac{c u \rho u^{-n}}{n^3 \ln^2 n}$$

Nouvelle
"classe d'universalité"
pour les cartes

$$u = 0$$

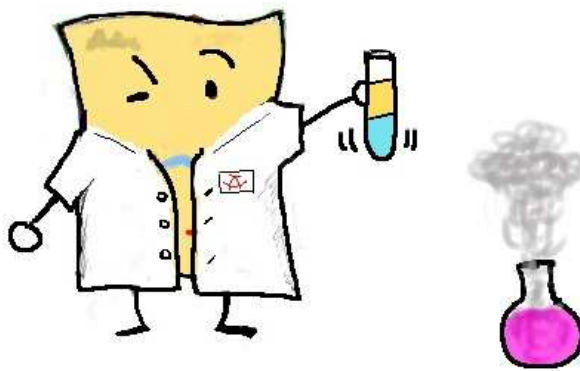
$$f_n(u) \sim \frac{c u \rho u^{-n}}{n^3}$$

cartes avec un
arbre couvrant

$$0 < u$$

$$f_n(u) \sim \frac{c u \rho u^{-n}}{n^{5/2}}$$

↑
standard



TRANSITION DE PHASE EN 0

$$f_n(u) = [z^n] F(z, u)$$

$$-1 \leq u < 0$$

$$f_n(u) \sim \frac{c_u \rho_u^{-n}}{n^3 \ln^2 n}$$

Nouvelle
"classe d'universalité"
pour les cartes

$$u = 0$$

$$f_n(u) \sim \frac{c_u \rho_u^{-n}}{n^3}$$

cartes avec un
arbre couvrant

↑
holonome

$$0 < u$$

$$f_n(u) \sim \frac{c_u \rho_u^{-n}}{n^{5/2}}$$

↑
standard

Cor

Pour $u \in [-1, 0[$, $F(z, u)$ n'est pas holonome.

EXTENSION DES RÉSULTATS

On se donne une liste de degrés autorisés.

	eulérien		non eulérien	
Systeme fonctionnel	$R = z + u \phi(R)$ $F' = \Theta(R)$		$R = z + u \phi_1(R, S)$ $S = u \phi_2(R, S)$ $F' = \Theta(R, S)$	
Nature de $F(z, u)$	différentiellement algébrique si l'ensemble des degrés autorisés est union finie de suites arithmétiques			
	apériodique	périodique	apériodique	périodique
Comportement asymptotique	tétravalent ✓ cartes eulériennes générales ✓	$(2l)$ -valent $l \geq 3$ ✓	cubique ✓ cartes générales ?	$(2l+1)$ -valent, $l \geq 2$?

EXTENSION DES RÉSULTATS

On se donne une liste de degrés autorisés.

équations
couplées ☹️

	eulérien		non eulérien ↓	
Systeme fonctionnel	$R = z + u \phi(R)$ $F' = \Theta(R)$		$R = z + u \phi_1(R, S)$ $S = u \phi_2(R, S)$ $F' = \Theta(R, S)$	
Nature de $F(z, u)$	différentiellement algébrique si l'ensemble des degrés autorisés est union finie de suites arithmétiques			
	apériodique	périodique	apériodique	périodique
Comportement asymptotique	tétravalent ✓ cartes eulériennes générales ✓	$(2l)$ -valent $l \geq 3$ ✓	cubique ✓ cartes générales ?	$(2l+1)$ -valent, $l \geq 2$?

EXTENSION DES RÉSULTATS

On se donne une liste de degrés autorisés.

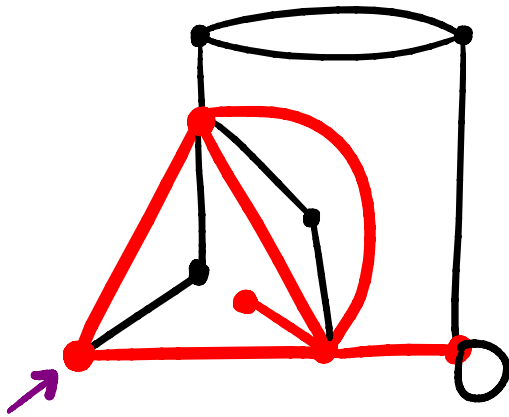
équations
couplées ☹️

	eulérien		non eulérien ↓	
Systeme fonctionnel	$R = z + u \phi(R)$ $F' = \Theta(R)$		$R = z + u \phi_1(R, S)$ $S = u \phi_2(R, S)$ $F' = \Theta(R, S)$	
Nature de $F(z, u)$	différentiellement algébrique si l'ensemble des degrés autorisés est union finie de suites arithmétiques			
	apériodique	périodique	apériodique	périodique
Comportement asymptotique	tétravalent ✓ cartes eulériennes générales ✓	(2l)-valent l ≥ 3 ✓	cubique ✓ cartes générales ?	(2l+1)-valent, l ≥ 2 ?
	Perspectives			

AUTRES PERSPECTIVES

→ Approfondir les résultats probabilistes

→ Cartes munies d'un animal de lien

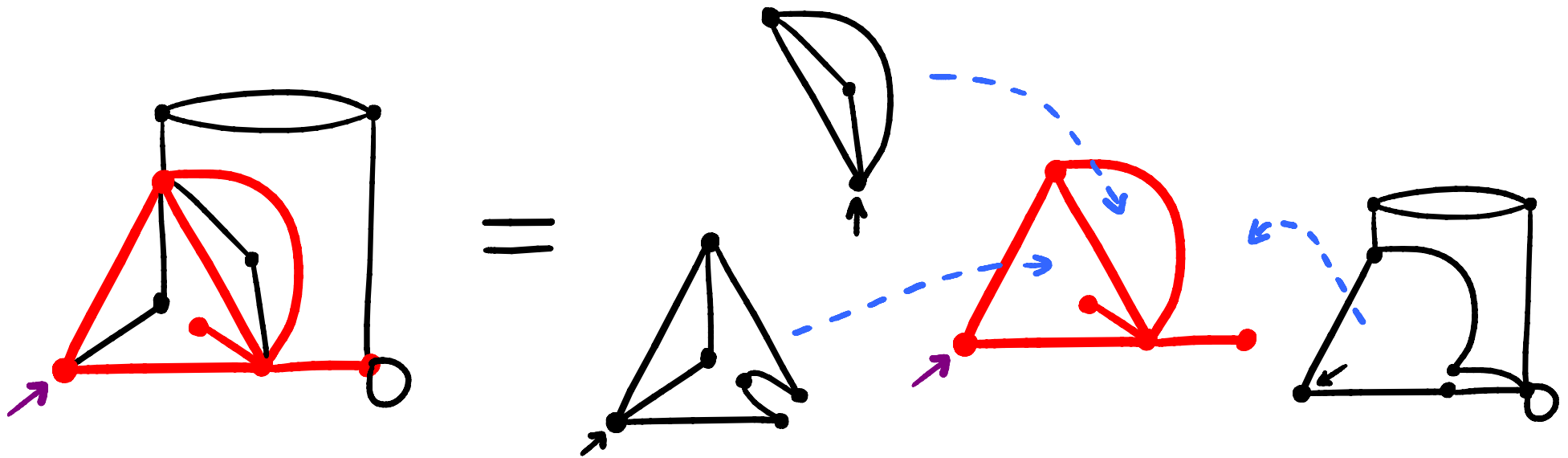


Objectif : Percolation de lien sur des cartes

AUTRES PERSPECTIVES

→ Approfondir les résultats probabilistes

→ Cartes munies d'un animal de lien



Objectif : Percolation de lien sur des cartes

PARTIE II

ACTIVITÉS POUR LE POLYNÔME DE TUTTE



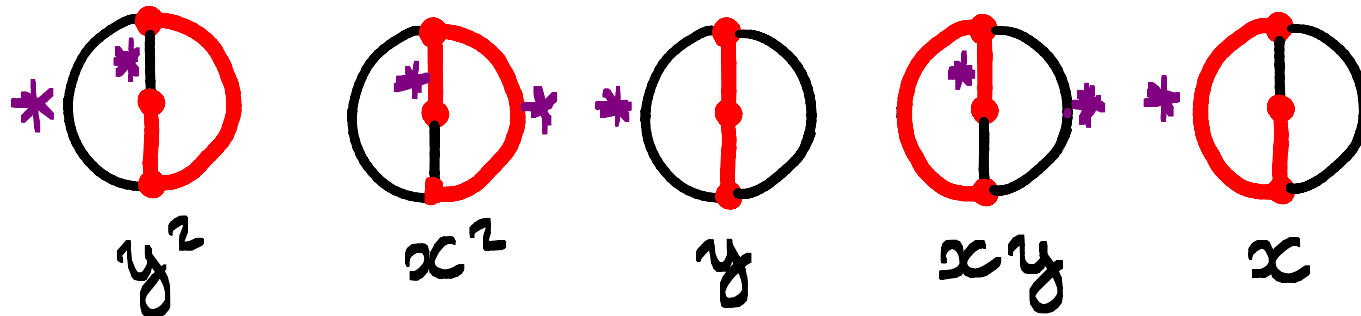
COMMENT INTERPRÉTER LES COEFFICIENTS ?

Principe : Associer à chaque arbre couvrant un ensemble d'arêtes dites "actives" tel que

$$T_G(x, y) = \sum_{T \text{ arbre couvrant}} x^{\text{int}(T)} y^{\text{ext}(T)}$$

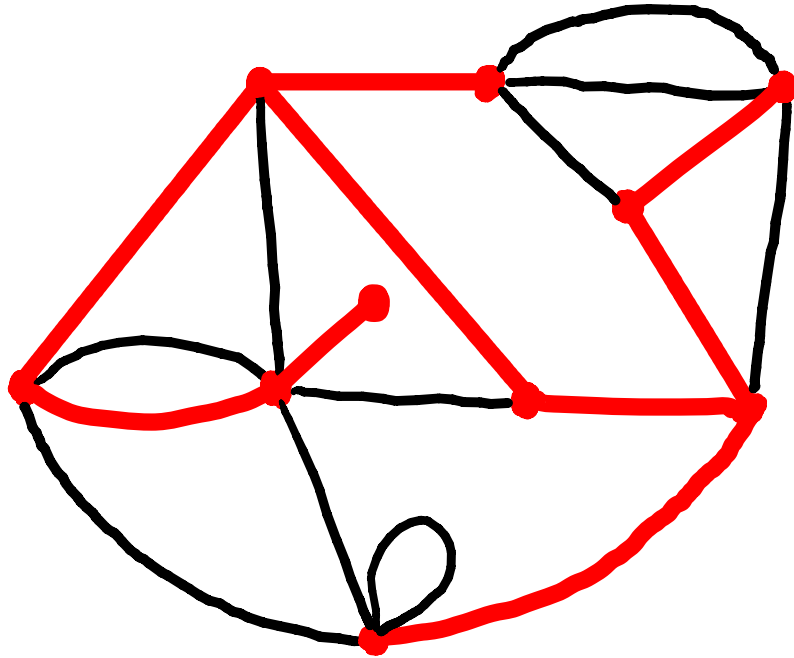
où $\text{int}(T) =$ nombre d'arêtes internes actives

$\text{ext}(T) =$ nombre d'arêtes externes actives



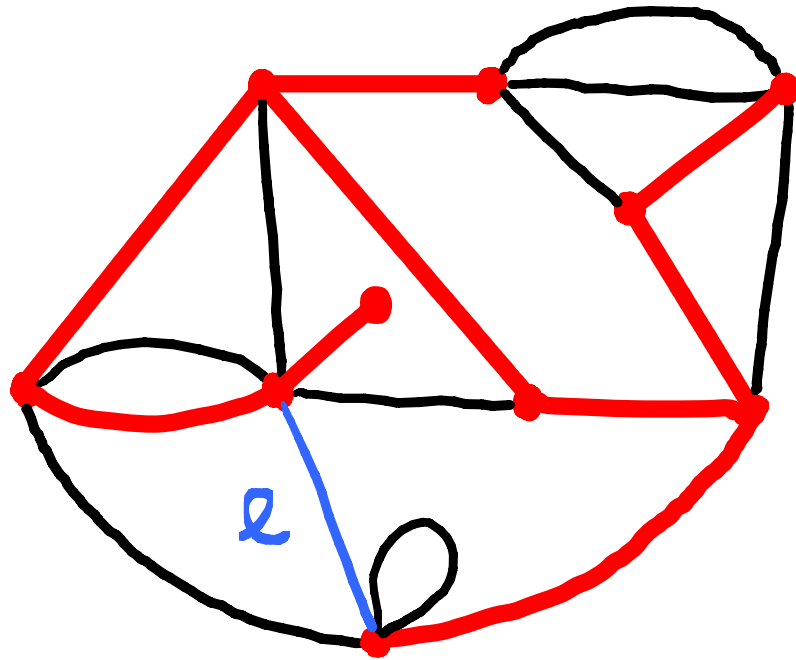
CYCLE / COCYCLE FONDAMENTAL

Soient T un arbre couvrant et e une arête,



CYCLE / COCYCLE FONDAMENTAL

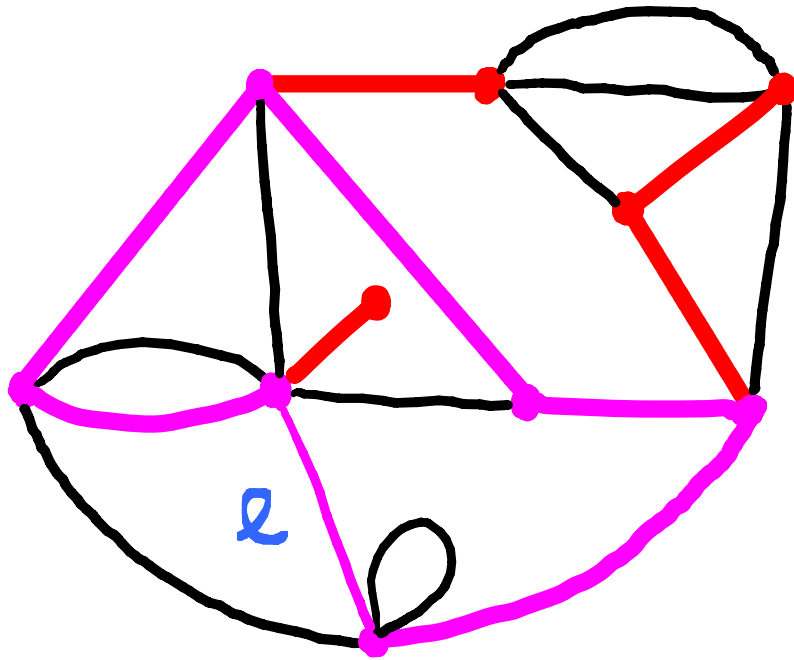
Soient T un arbre couvrant et e une arête externe,



cycle fondamental = unique cycle dans $T \cup \{e\}$

CYCLE / COCYCLE FONDAMENTAL

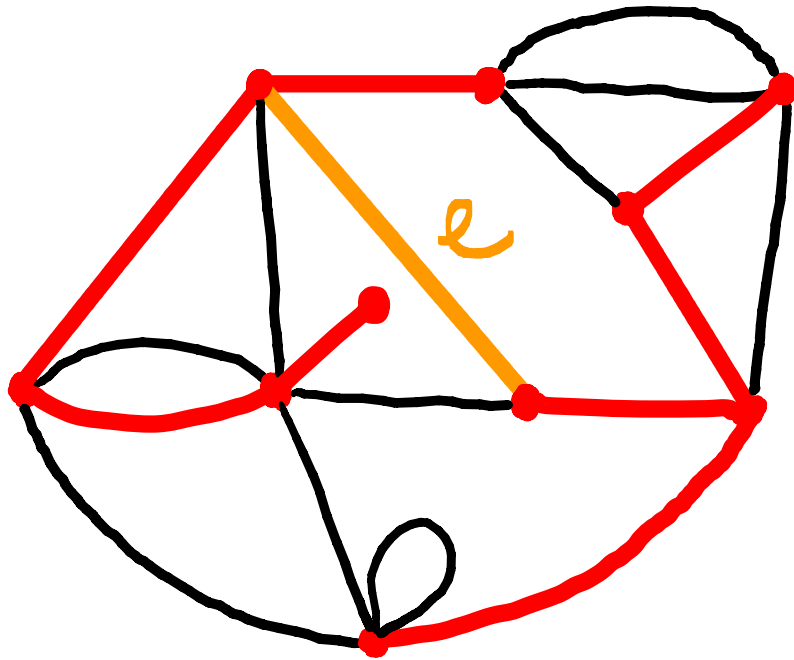
Soient T un arbre couvrant et e une arête externe,



cycle fondamental = unique cycle dans $T \cup \{e\}$

CYCLE / COCYCLE FONDAMENTAL

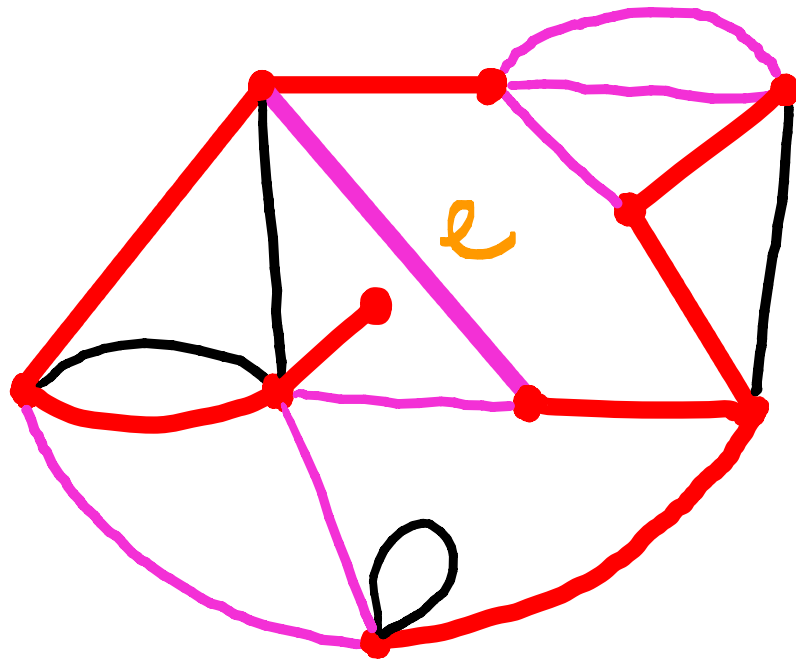
Soient T un arbre couvrant et e une arête interne,



cocycle fondamental = unique cocycle dans $T \cup \{e\}$

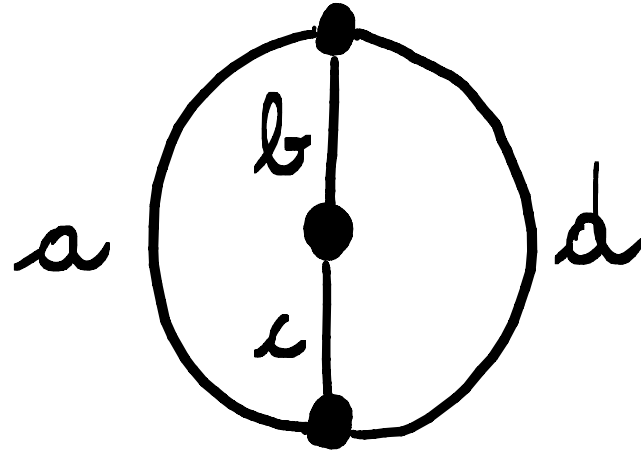
CYCLE / COCYCLE FONDAMENTAL

Soient T un arbre couvrant et e une arête interne,



cocycle fondamental = unique cocycle dans $T^c \cup \{e\}$

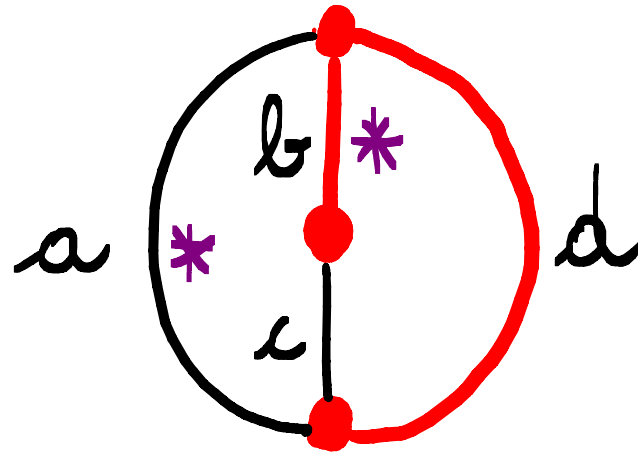
ACTIVITÉ SELON TUTTE



On étiquette et ordonne les arêtes :

$$a < b < c < d$$

ACTIVITÉ SELON TUTTE

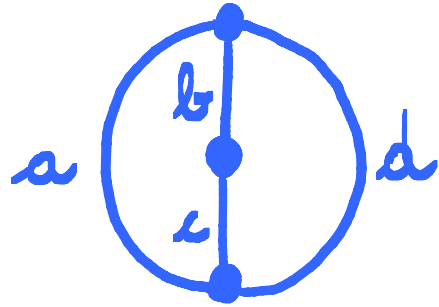


On étiquette et ordonne les arêtes :

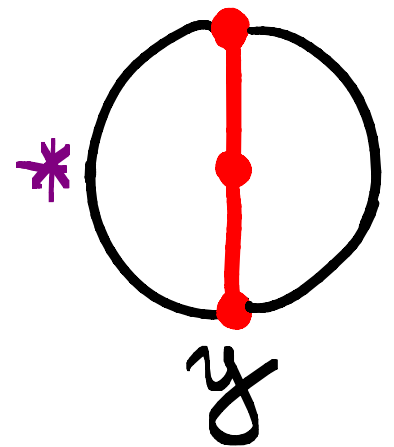
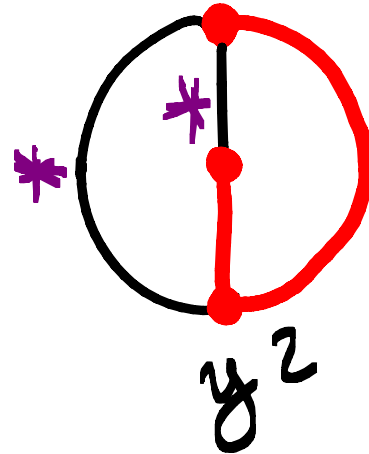
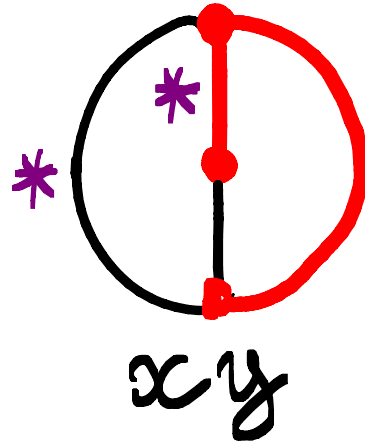
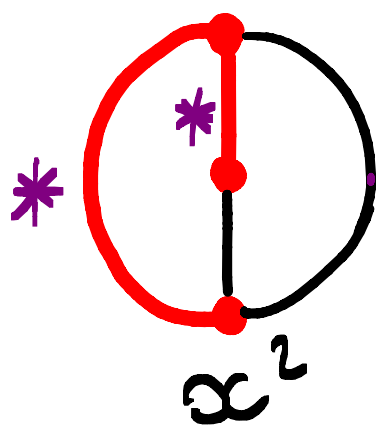
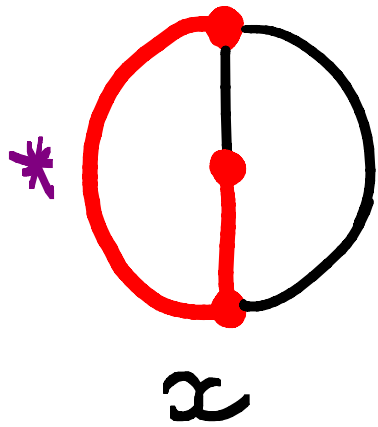
$$a < b < c < d$$

Arête active = arête minimale dans son cycle / cocycle fondamental

ACTIVITÉ SELON TUTTE



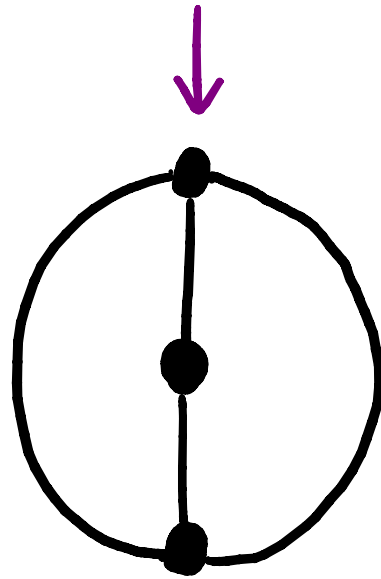
$$a < b < c < d$$



$$T_G(x, y) = x^2 + x + xy + y + y^2$$

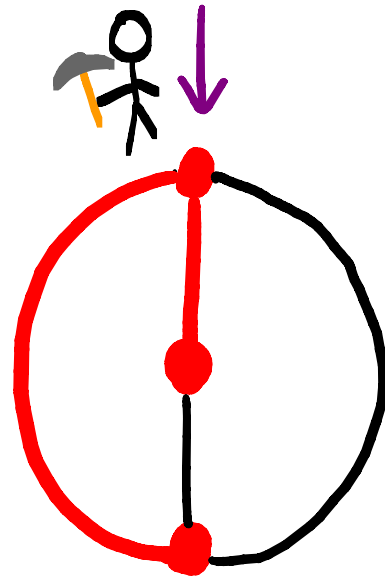
ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + un enracinement



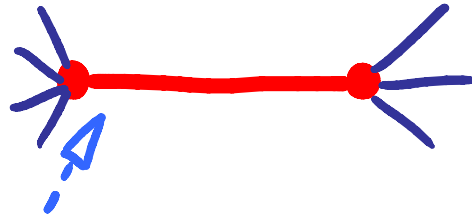
ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + un enracinement



Règles :

arête interne

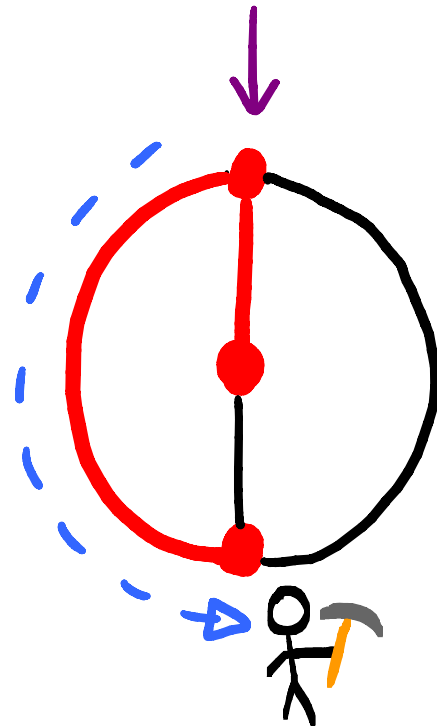


arête externe



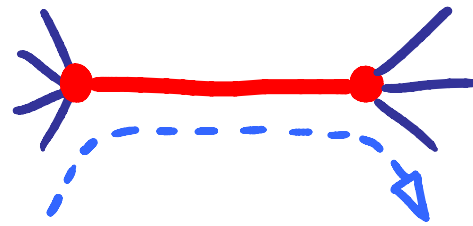
ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + un enracinement



Règles :

arête interne



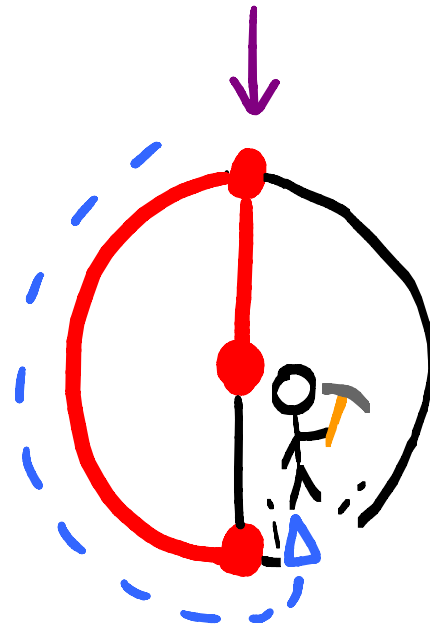
On longe -

arête externe



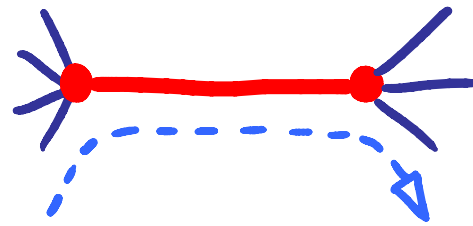
ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + un enracinement



Règles :

arête interne



On longe -

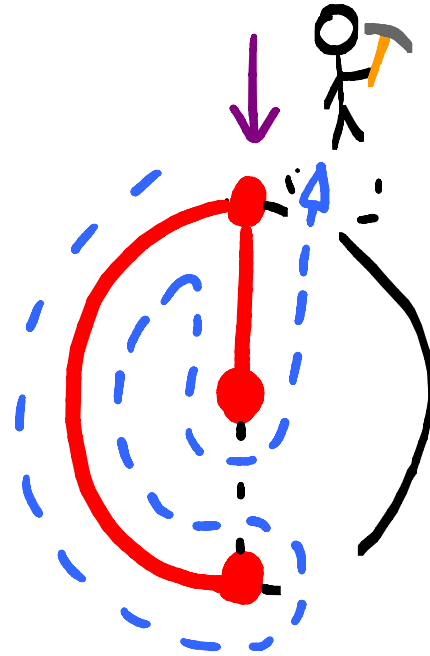
arête externe



On traverse.

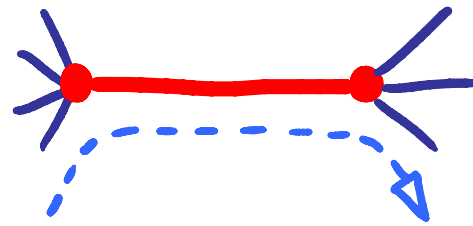
ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + un enracinement



Règles :

arête interne



On longe -

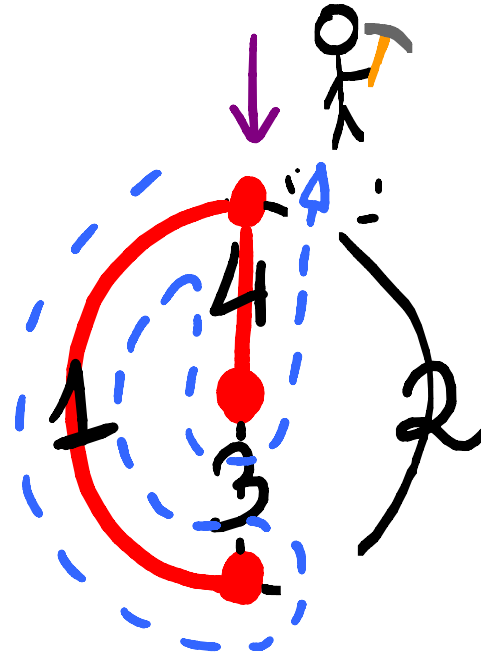
arête externe



On traverse.

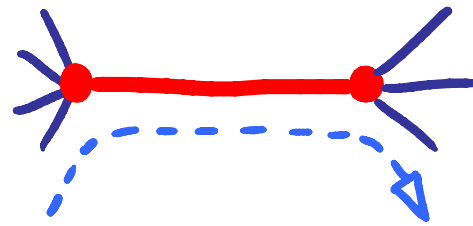
ACTIVITÉ SELON BERNARDI : TOUR DE L'ARBRE

On fixe un plongement + un enracinement



Règles :

arête interne



On longe -

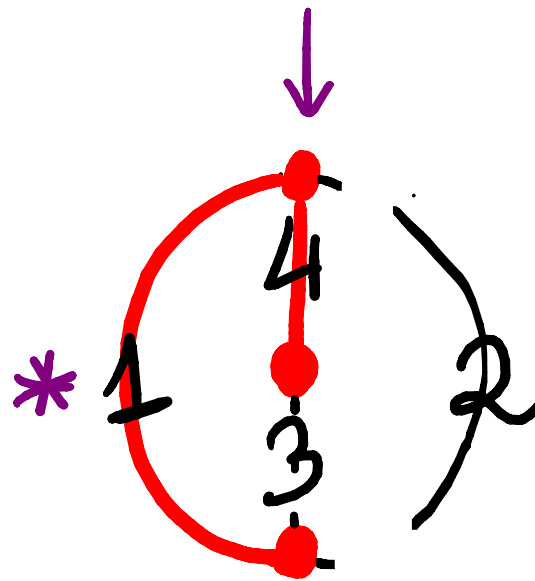
arête externe



On traverse.

ACTIVITÉ SELON BERNARDI : DÉFINITION

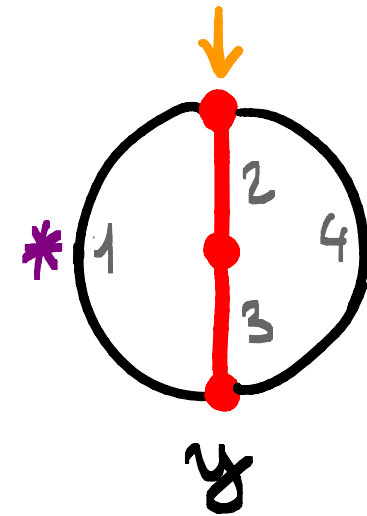
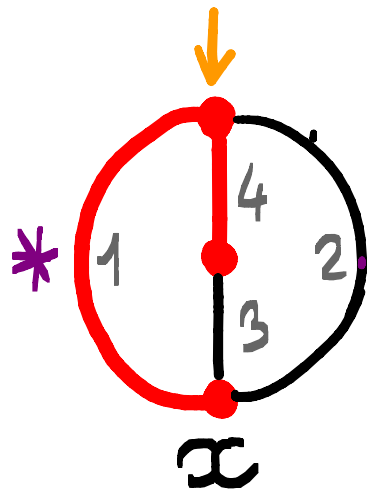
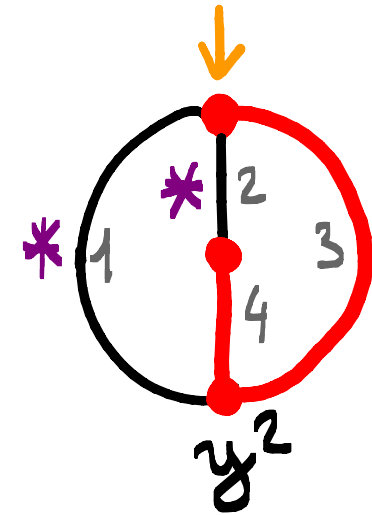
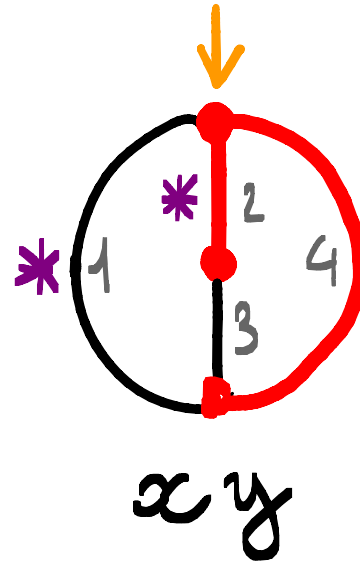
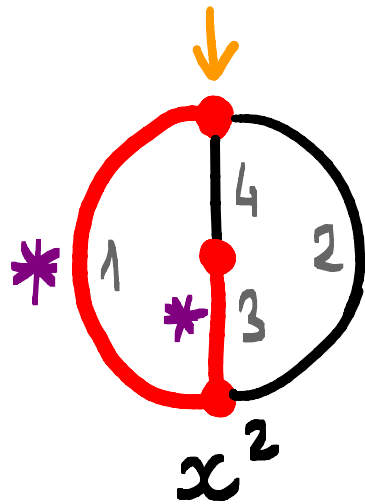
On fixe un plongement + un enracinement



Arête active = arête minimale dans son cycle/cocycle fondamental

(selon l'ordre de visite des arêtes lors du tour de l'arbre)

ACTIVITÉ SELON BERNARDI : DÉFINITION



$$T_G(x, y) = x^2 + x + xy + y + y^2$$

QUESTION

Y a-t-il un dénominateur commun entre ces deux activités?

QUESTION

Y a-t-il un dénominateur commun entre ces deux activités?

→ Oui, son nom: Δ -activité

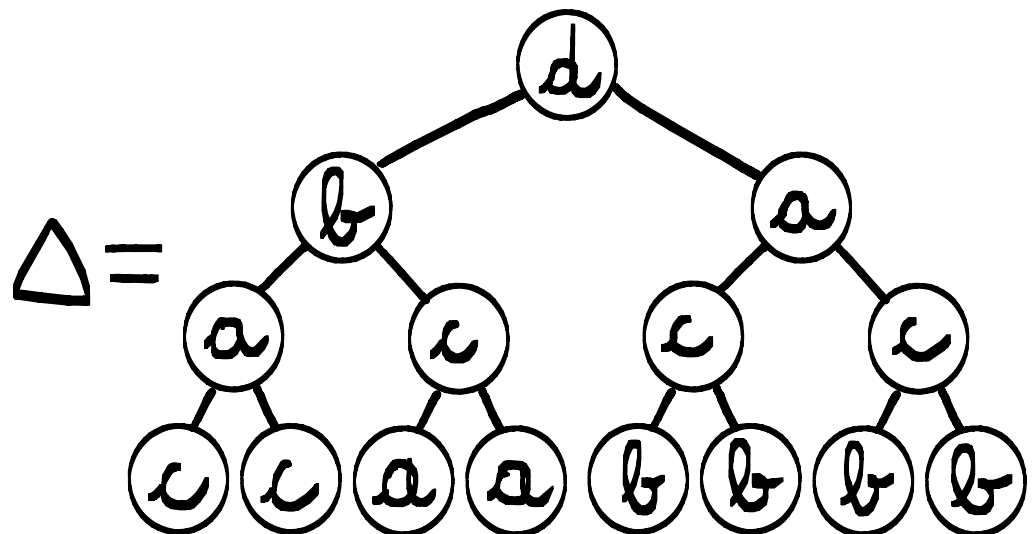
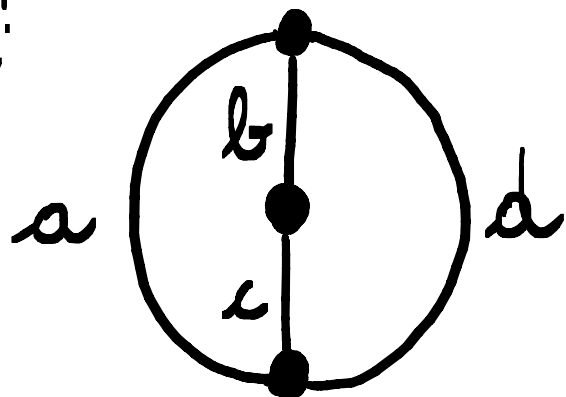


ARBRE DE DÉCISION

Fixons G un graphe.

Arbre de décision = arbre binaire plan Δ avec un étiquetage $\text{Sommets}(\Delta) \rightarrow \text{Arêtes}(G)$ tel que le long de n'importe quel chemin allant de la racine jusqu'à une feuille, la suite des étiquettes forme une permutation de $\text{Arêtes}(G)$.

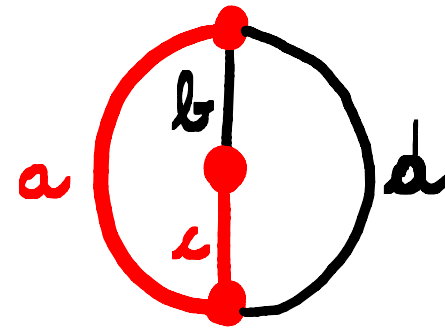
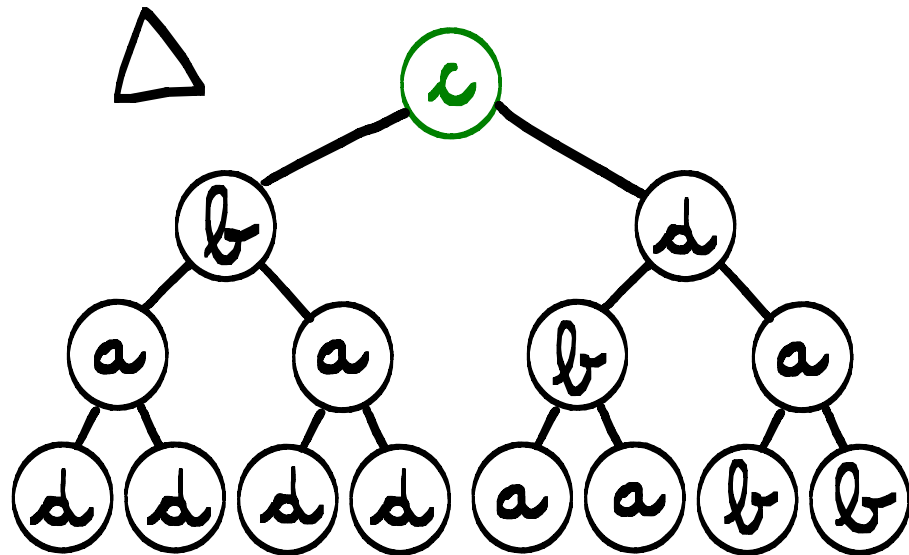
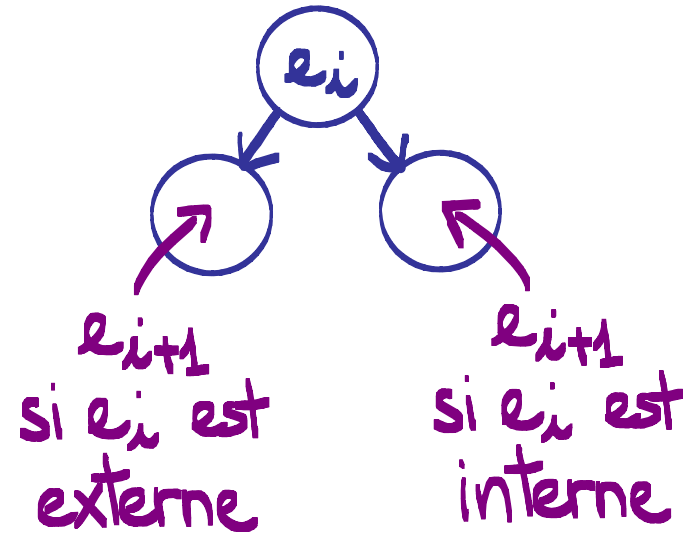
Ex:



Δ -ACTIVITÉ

Étant donné un arbre couvrant,
on définit un ordre sur les arêtes selon la règle:

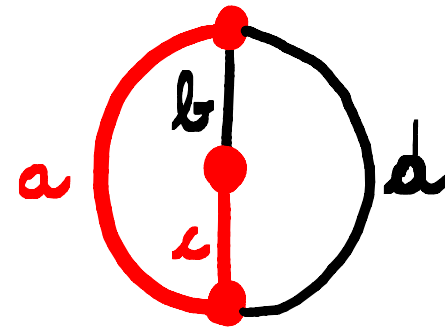
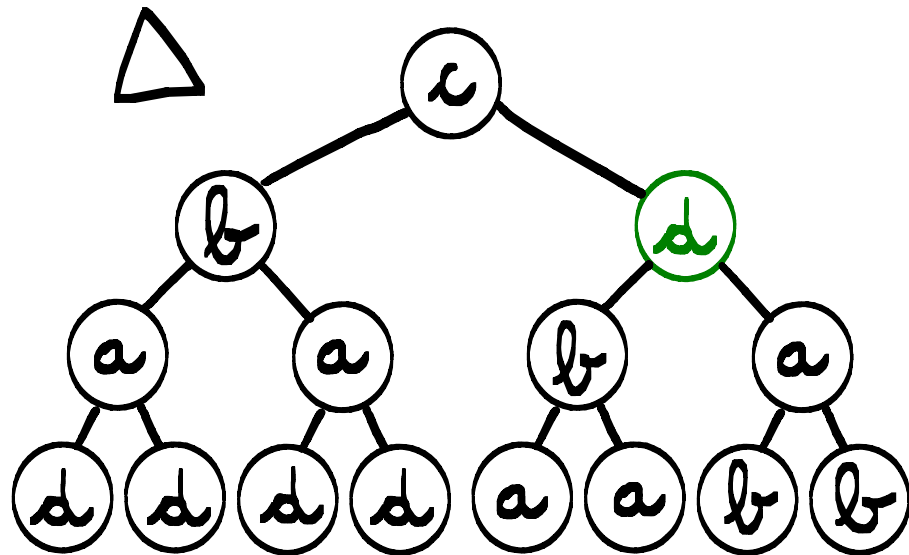
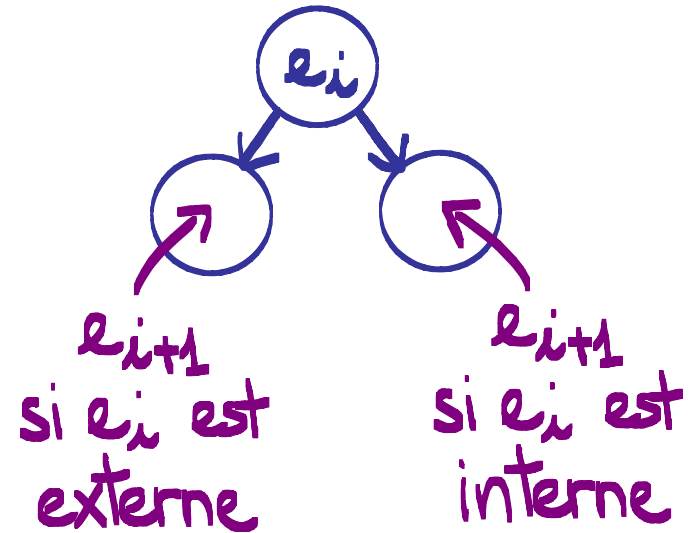
e_1 = étiquette de la
racine de Δ



Δ -ACTIVITÉ

Étant donné un arbre couvrant,
on définit un ordre sur les arêtes selon la règle:

e_1 = étiquette de la
racine de Δ

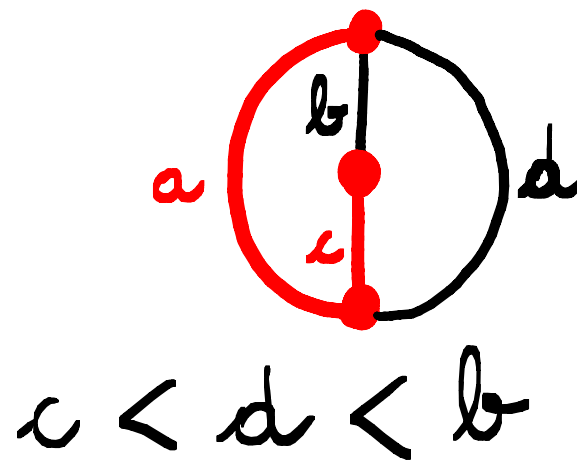
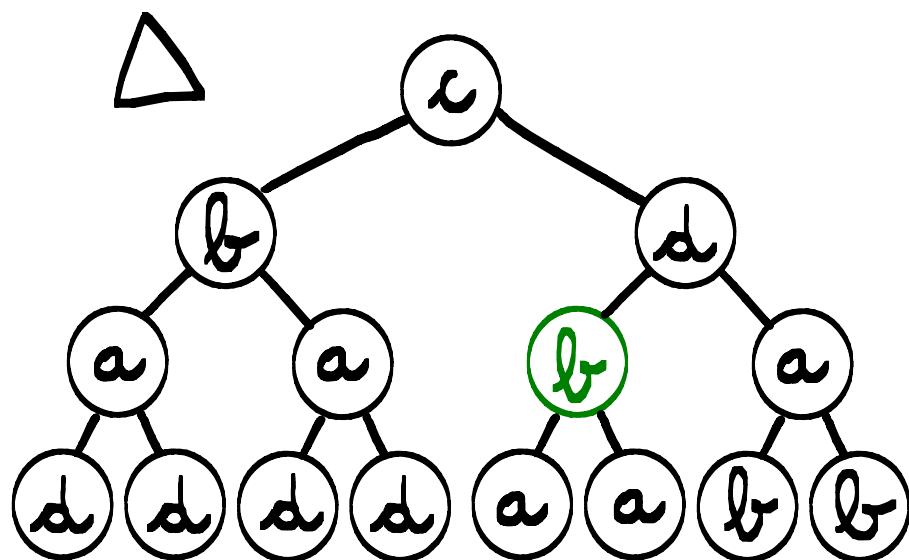
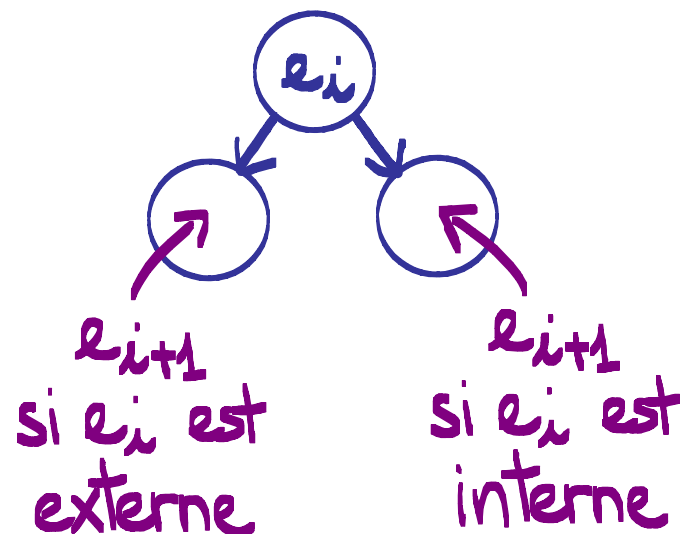


$c < d$

Δ -ACTIVITÉ

Étant donné un arbre couvrant,
on définit un ordre sur les arêtes selon la règle:

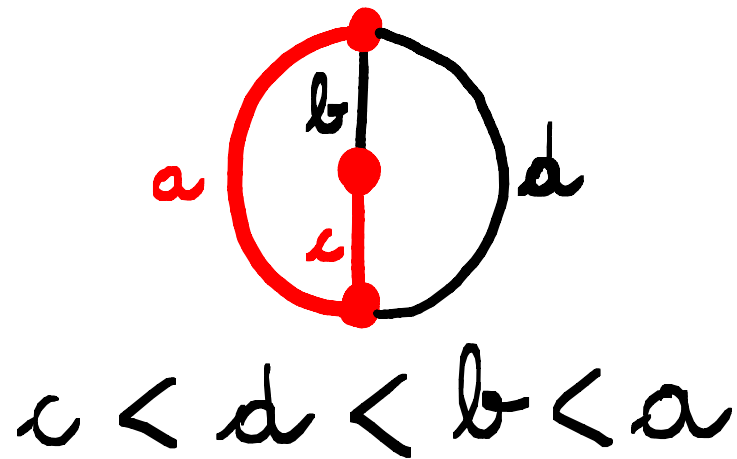
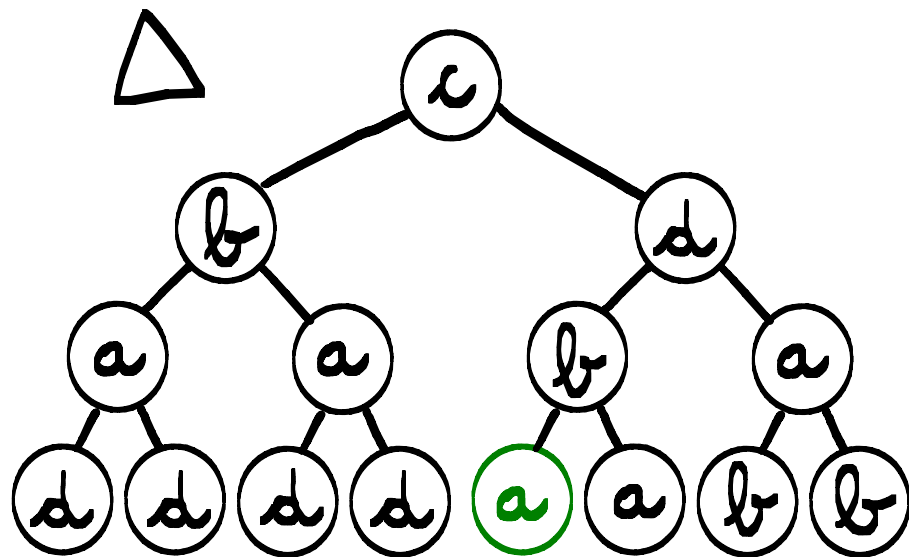
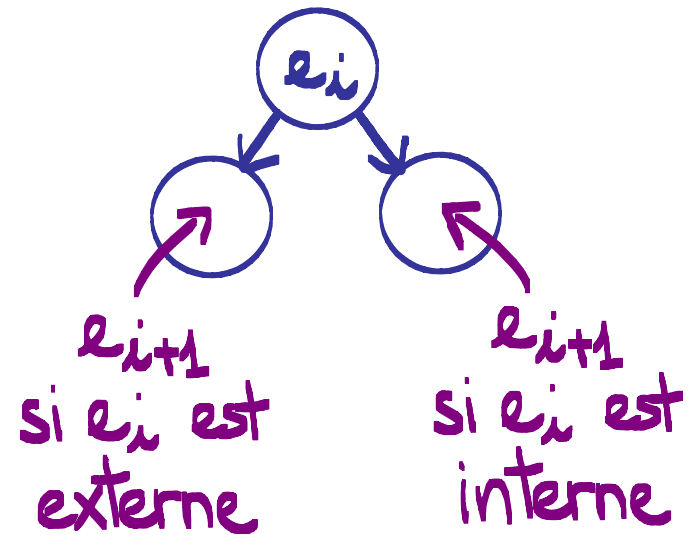
e_1 = étiquette de la
racine de Δ



Δ -ACTIVITÉ

Étant donné un arbre couvrant,
on définit un ordre sur les arêtes selon la règle:

e_1 = étiquette de la
racine de Δ



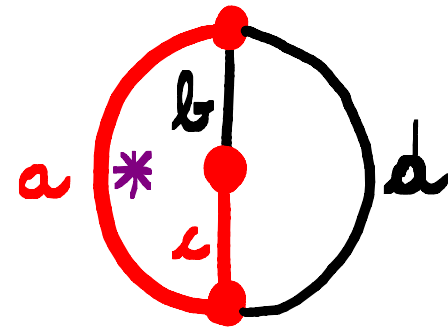
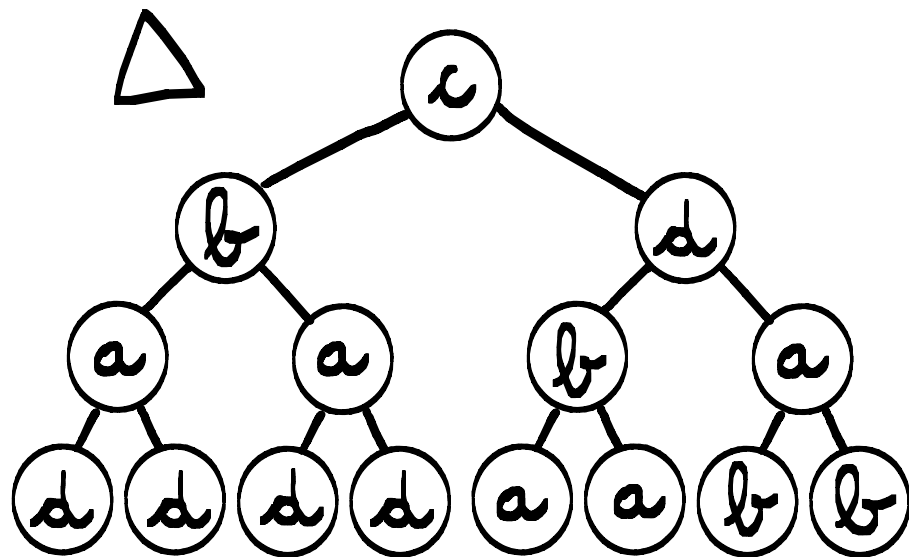
Δ -ACTIVITÉ

arête Δ -active = arête maximale dans son cycle/cocycle fondamental

Théorème Pour tout graphe G et arbre de décision Δ ,

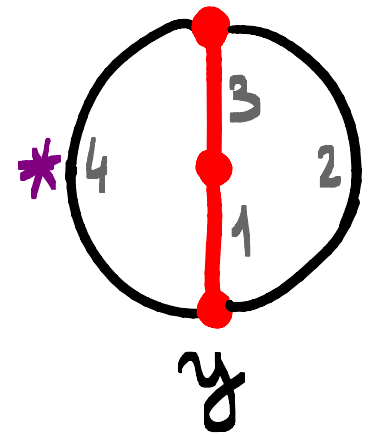
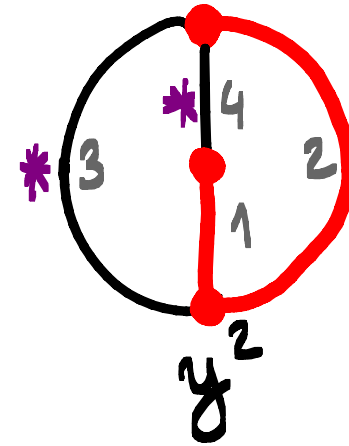
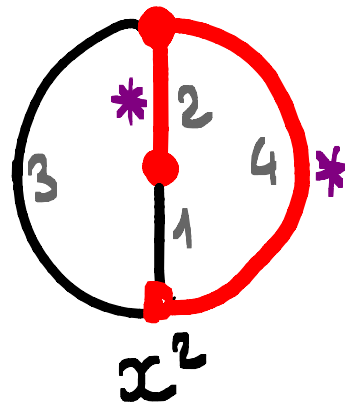
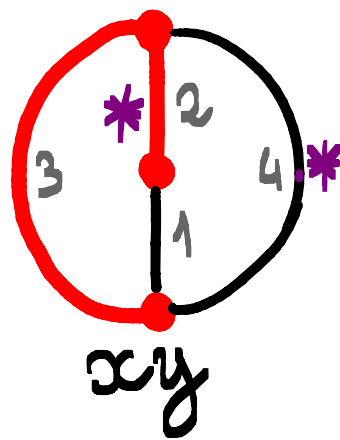
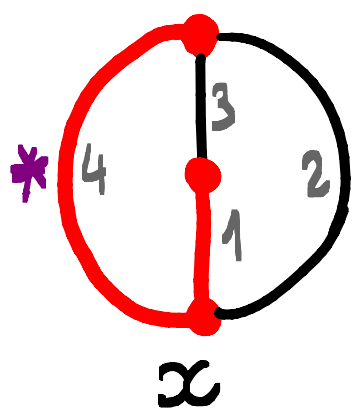
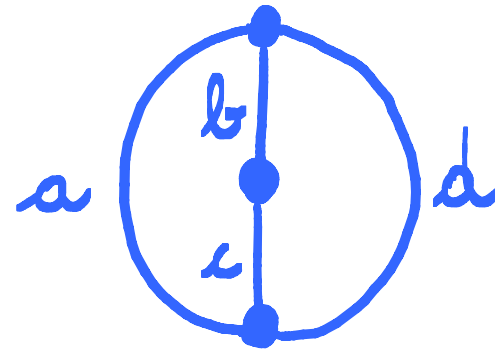
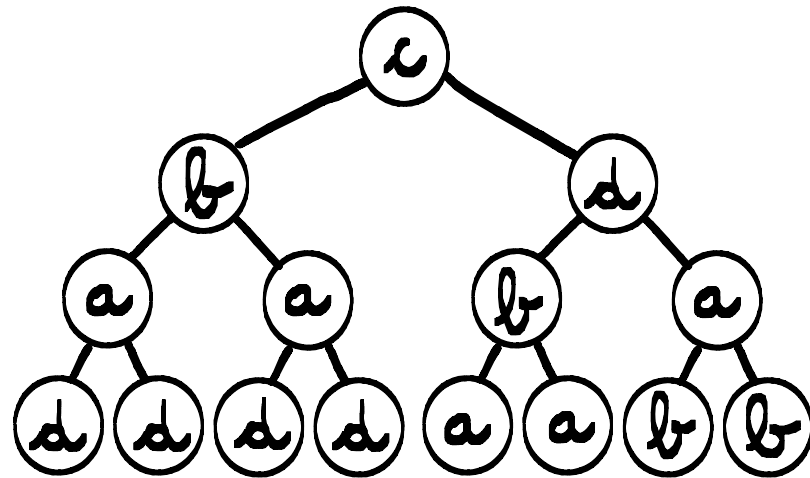
$$T_G(x, y) = \sum_{T \text{ arbre couvrant}} x^{i(T)} y^{e(T)}$$

$i(T) = \#$ arêtes internes Δ -actives, $e(T) = \#$ arêtes externes Δ -actives



$$c < d < b < a$$

Δ -ACTIVITÉ

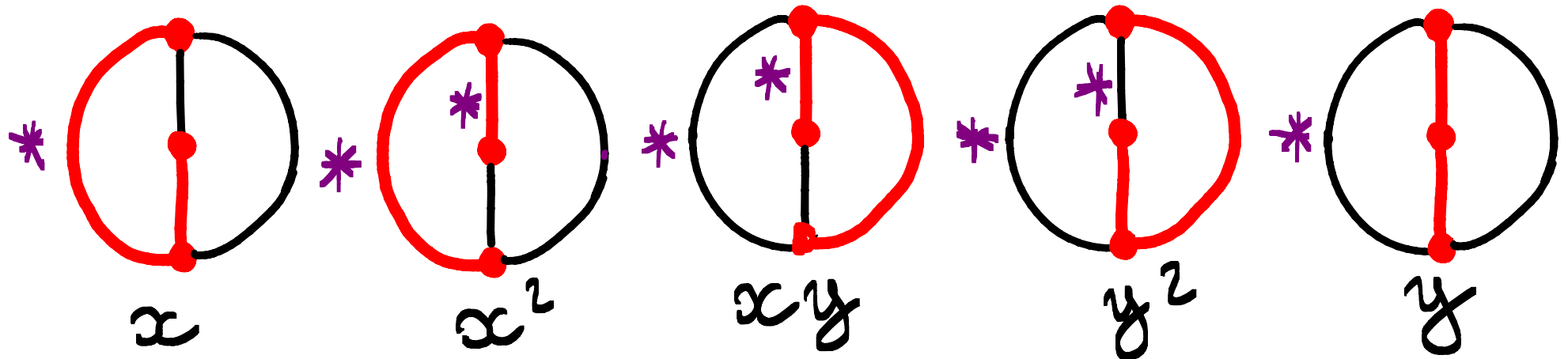
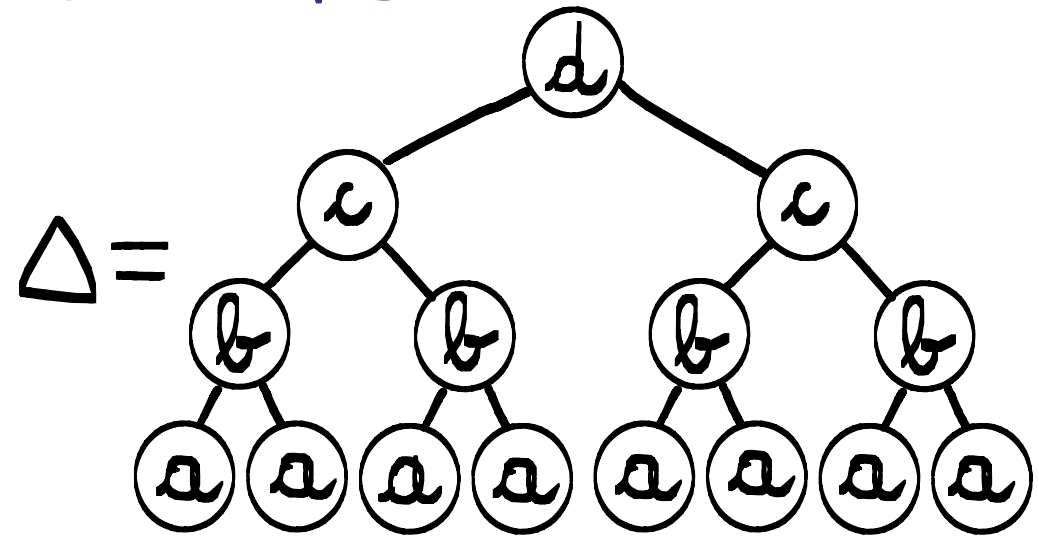
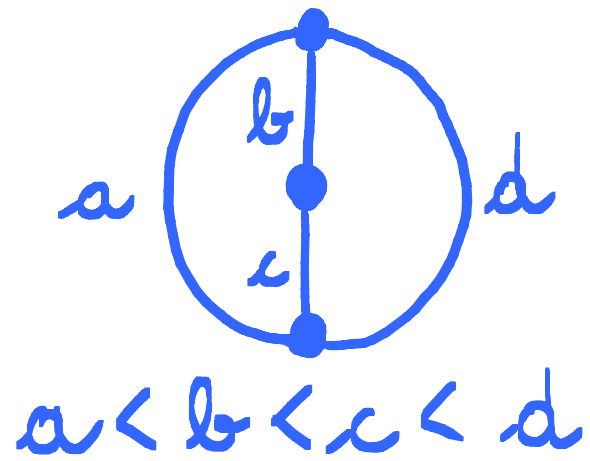


$$T_G(x, y) = x^2 + x + xy + y + y^2$$

Δ -ACTIVITÉ

On retrouve les premières activités :

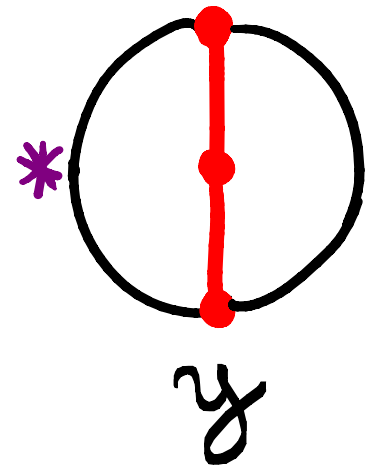
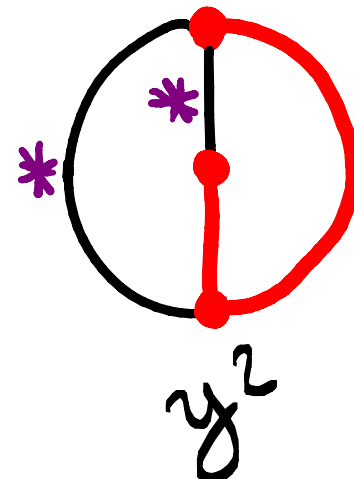
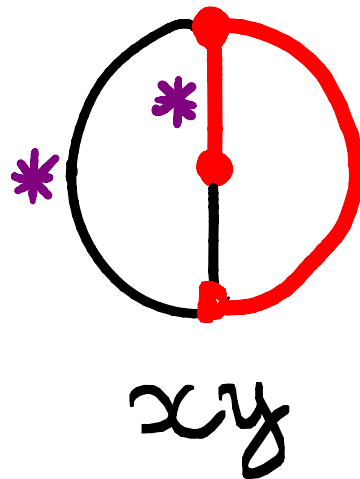
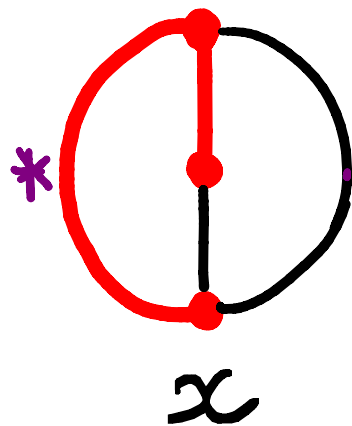
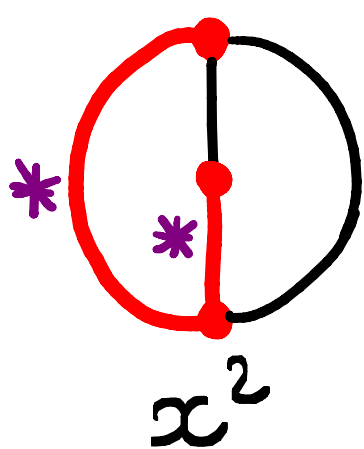
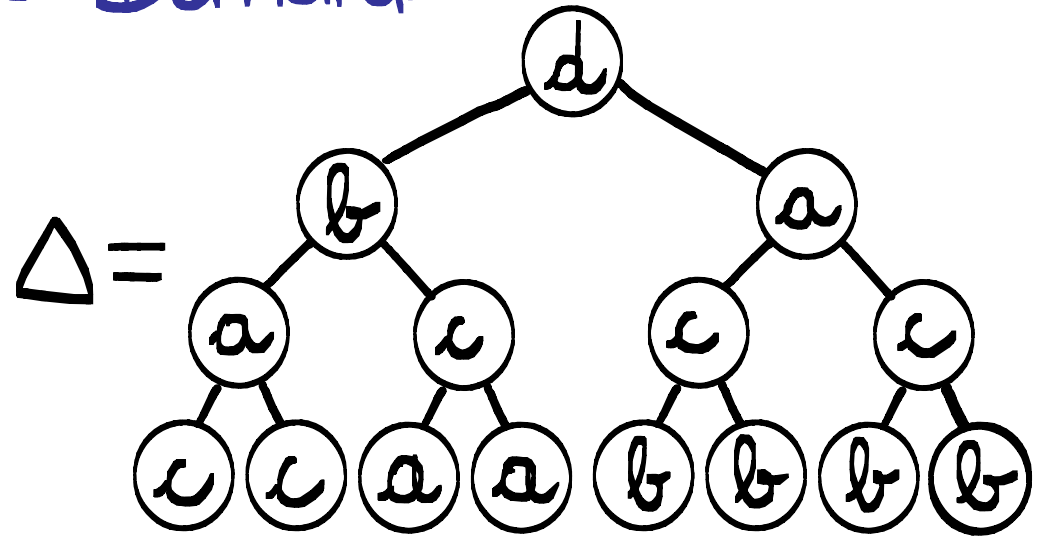
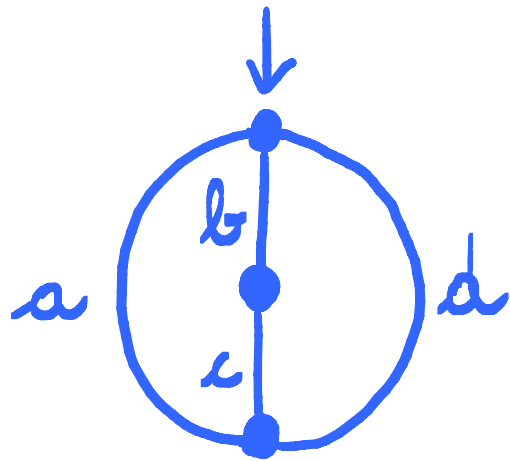
celle de Tutte



Δ -ACTIVITÉ

On retrouve les premières activités :

celle de Bernardi



D'AUTRES PROPRIÉTÉS

→ nombreuses descriptions

→ propriété de Crapo :

$$\text{Sous-graphes}(G) = \bigcup_{\substack{T \text{ arbre} \\ \text{couvrant de } G}} [T \setminus \text{Ad}(T), T \cup \text{Ad}(T)]$$

→ induit d'autres activités "naturelles"

D'AUTRES PROPRIÉTÉS

→ nombreuses descriptions

→ propriété de Crapo :

$$\text{Sous-graphes}(G) = \bigcup_{\substack{T \text{ arbre} \\ \text{couvrant de } G}} [T \setminus \text{Ad}(T), T \cup \text{Ad}(T)]$$

→ induit d'autres activités "naturelles"

Conjecture Toute activité qui décrit le polynôme de Tutte et qui préserve la propriété de Crapo est une Δ -activité.

MERCI POUR
VOTRE ATTENTION

