

CARTES PLANAIRES ET FORÊTS COUVRANTES

Julien COURTIEL (Bordeaux)



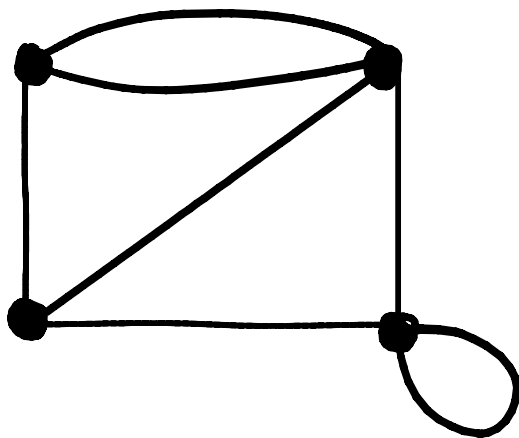
En collaboration avec Mireille BOUSQUET-MÉLOU

DÉFINITIONS DE BASE



CARTES PLANAIRES

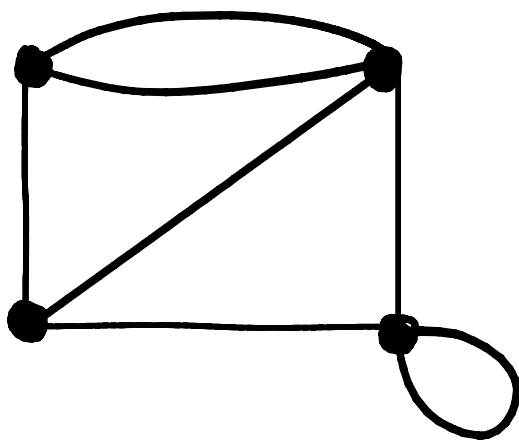
Carte planaire = graphe connexe
+ plongement de ce graphe
dans le plan, considéré
à déformation près.



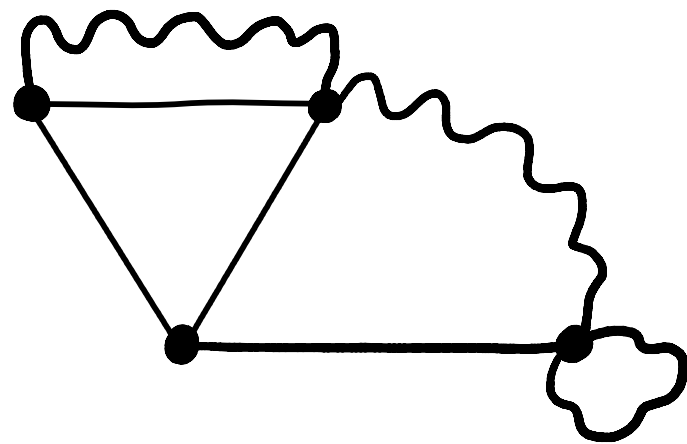
CARTES PLANAIRES

Carte planaire = graphe connexe

+ plongement de ce graphe dans le plan, considéré à déformation près.



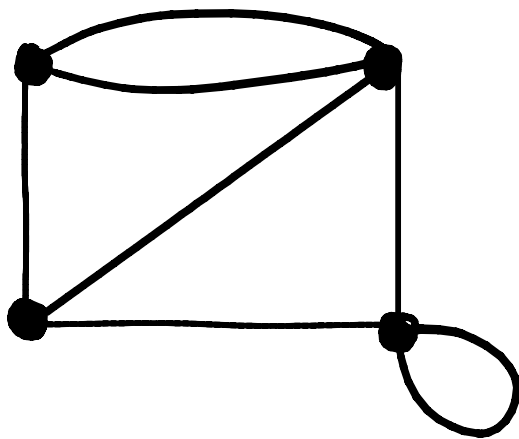
=



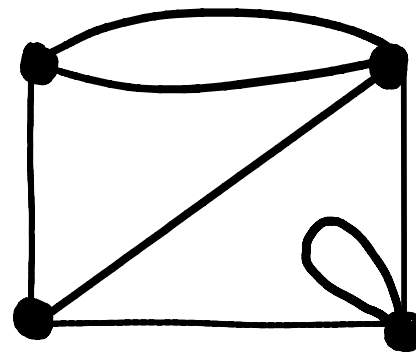
CARTES PLANAIRES

Carte planaire = graphe connexe

+ plongement de ce graphe dans le plan, considéré à déformation près.



\neq

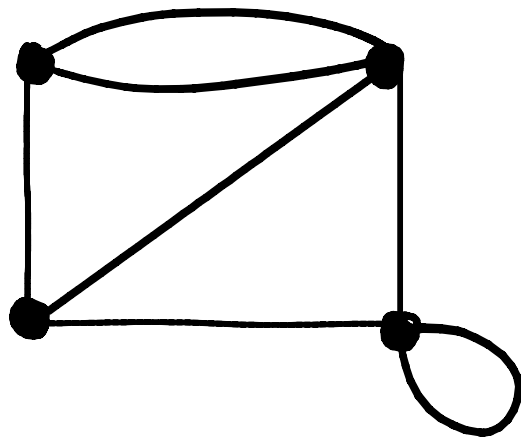


CARTES PLANAIRES

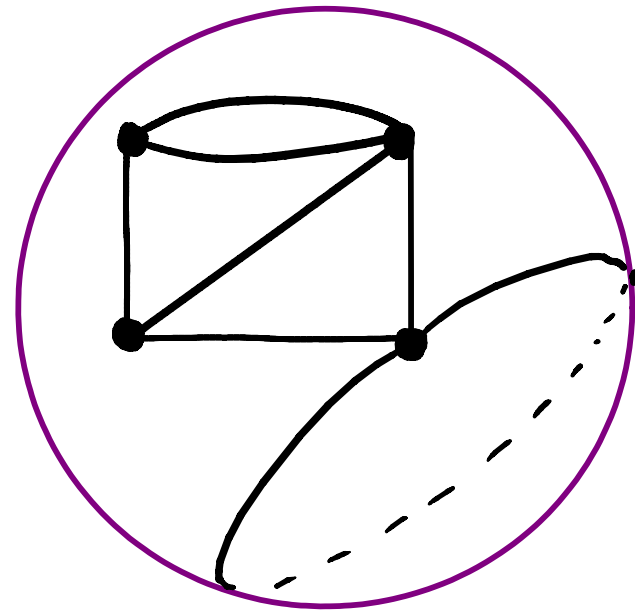
Carte planaire = graphe connexe

+ plongement de ce graphe
dans le ~~plan~~, considéré
à déformation près.

la sphère



=

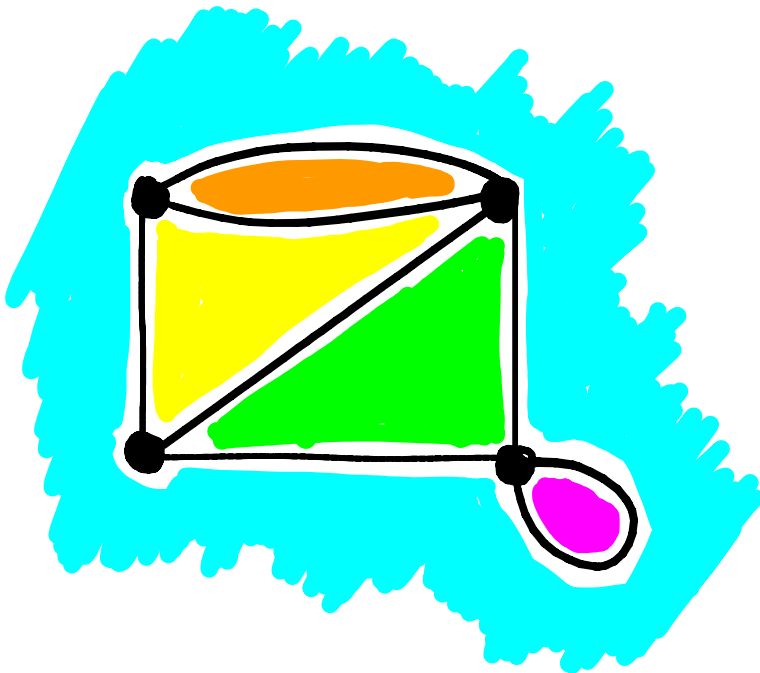


CARTES PLANAIRES

Carte planaire = graphe connexe

+ plongement de ce graphe
dans le plan, considéré
à déformation près.

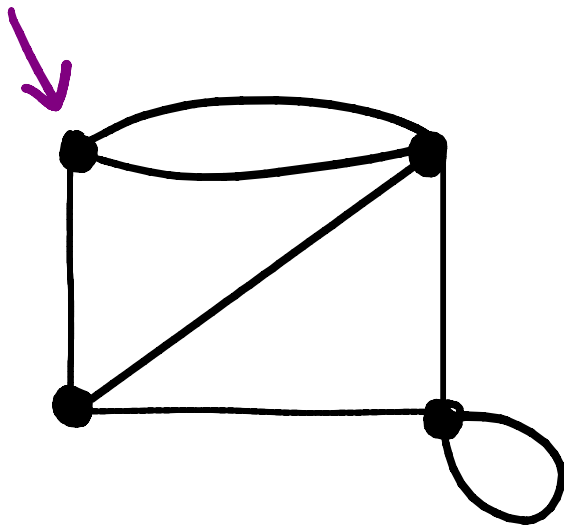
faces



CARTES PLANAIRES

Carte planaire = graphe connexe

+ plongement de ce graphe dans le plan, considéré à déformation près.

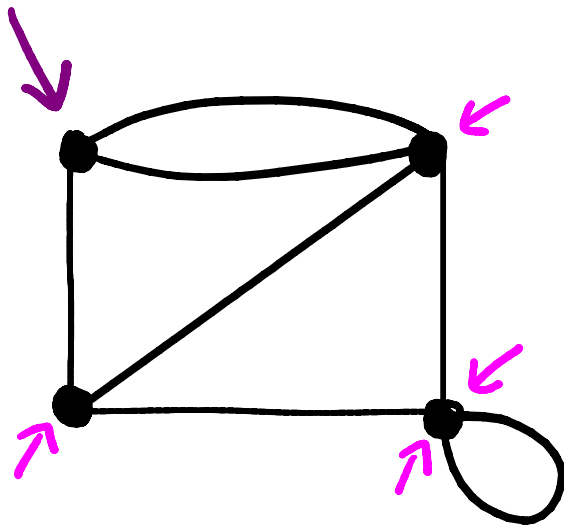


On enracine la carte sur un coin de la face externe.

CARTES PLANAIRES

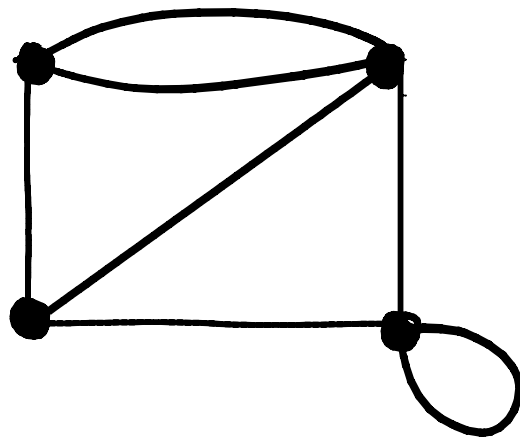
Carte planaire = graphe connexe

+ plongement de ce graphe dans le plan, considéré à déformation près.

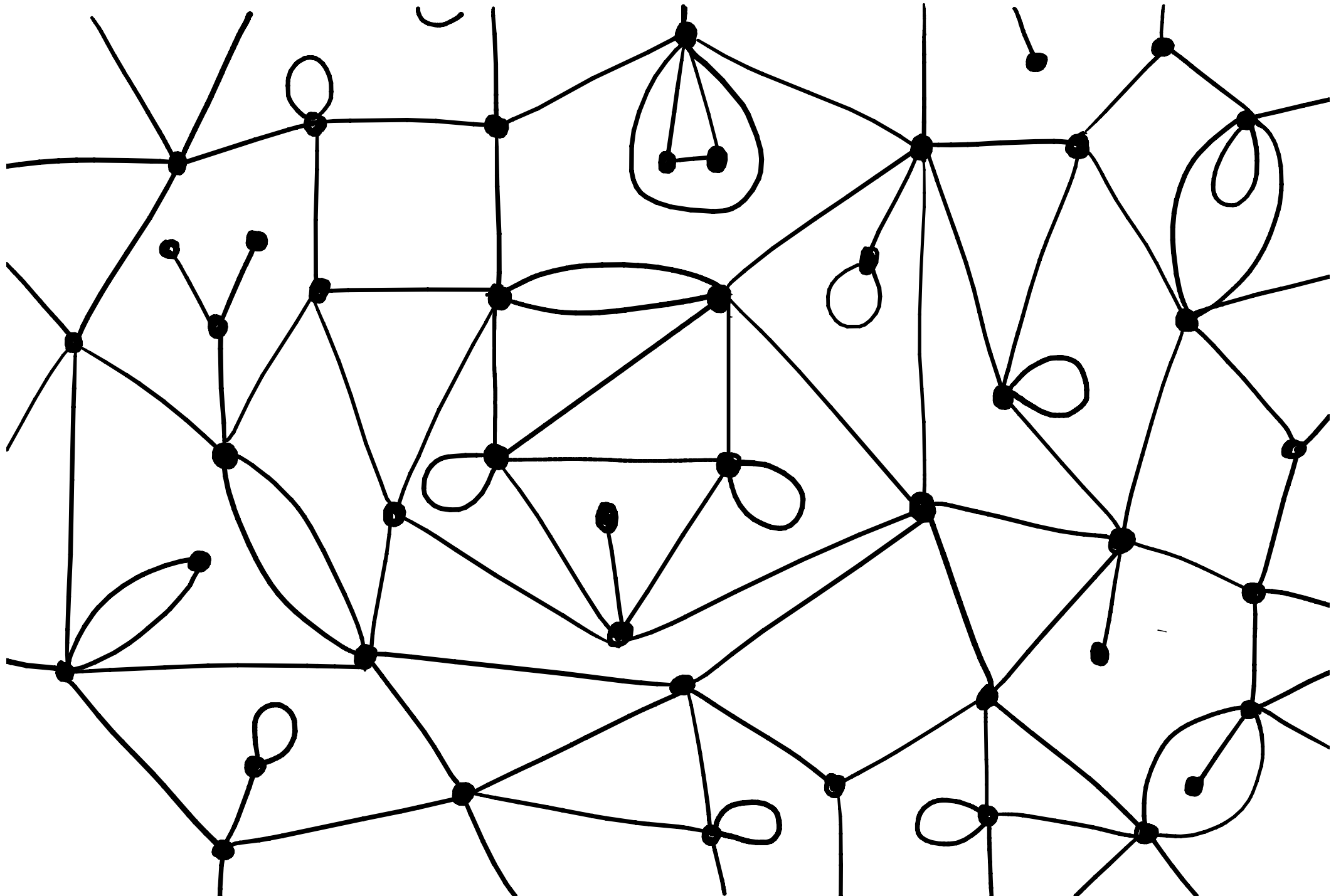


On enracine la carte sur un coin de la face externe.

GRANDES CARTES



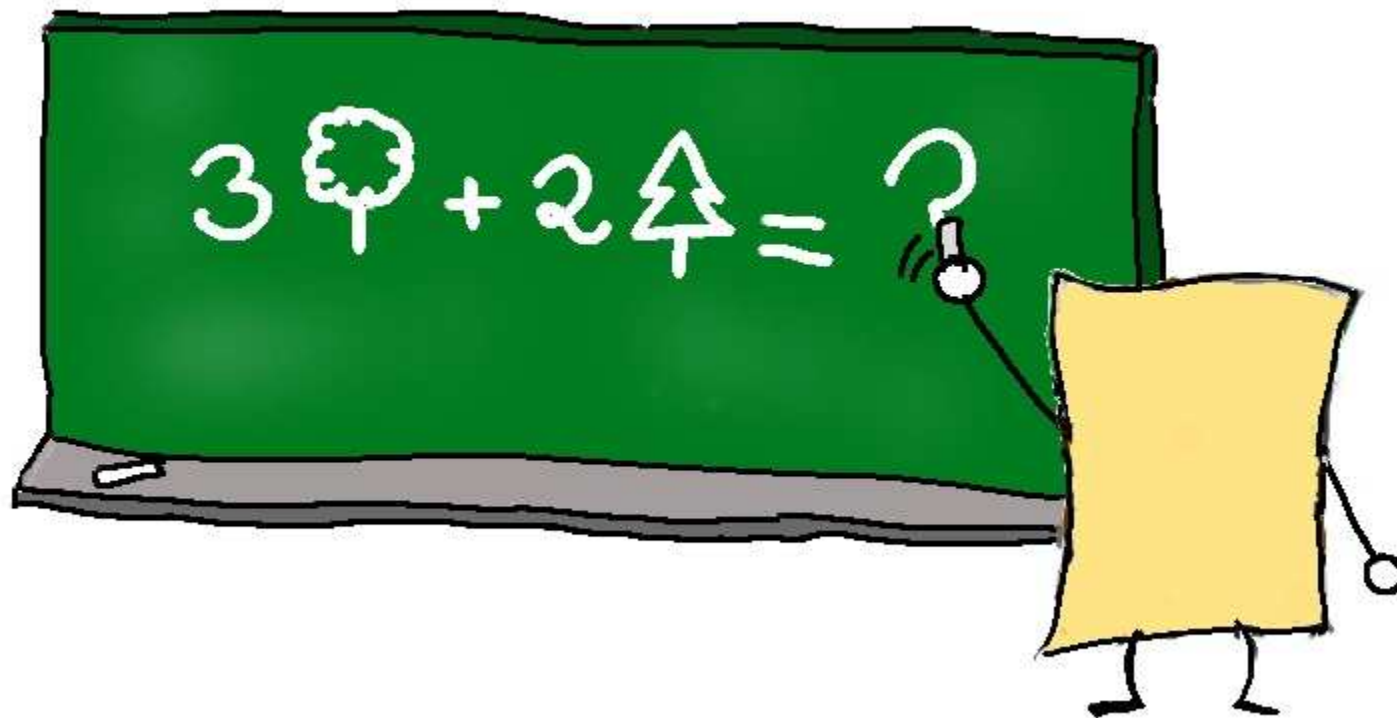
GRANDES CARTES



DOMAINES D'APPLICATION

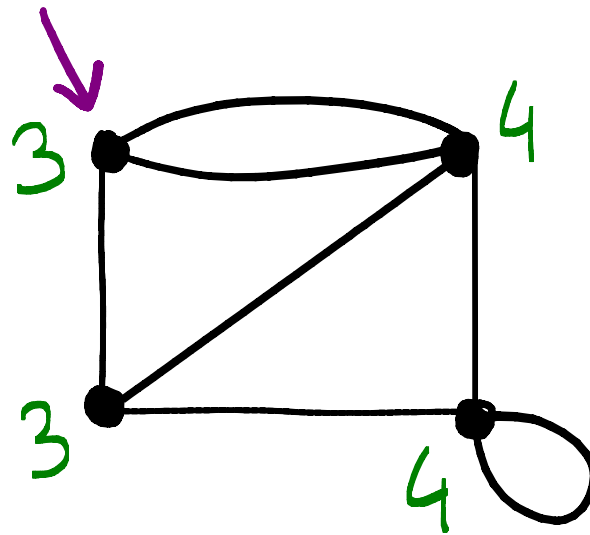
- physique statistique
- probabilités (intégrale de matrices)
- géométrie algorithmique
- factorisation de permutations
- tous les domaines dans lesquels interviennent des surfaces...

ÉNUMÉRATION DES CARTES TÉTRAVALENTES



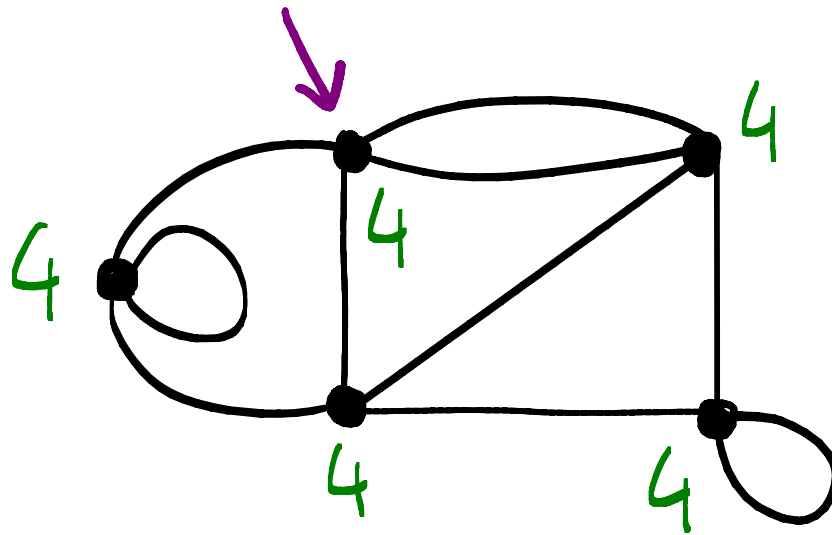
ÉNUMÉRATION DES CARTES TÉTRAVALENTES

Carte tétravalente = carte où chaque sommet a pour degré 4.



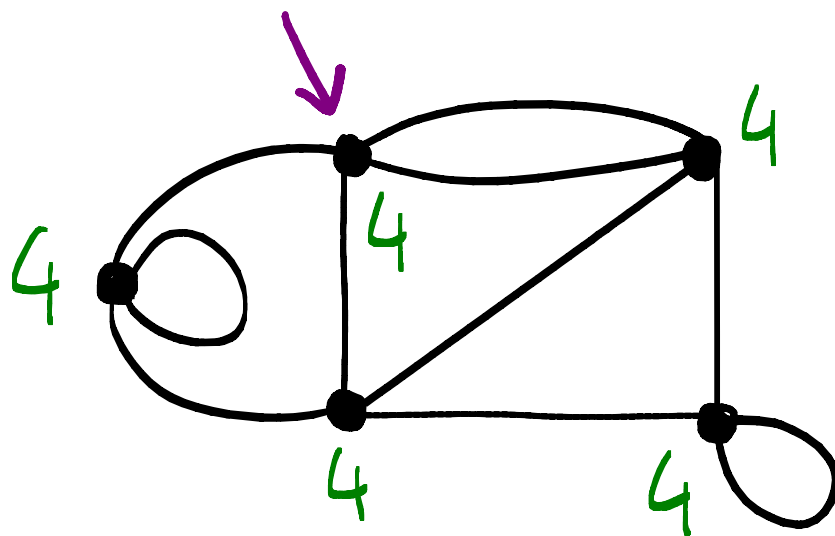
ÉNUMÉRATION DES CARTES TÉTRAVALENTES

Carte tétravalente = carte où chaque sommet a pour degré 4.



ÉNUMÉRATION DES CARTES TÉTRAVALENTES

Carte tétravalente = carte où chaque sommet a pour degré 4.

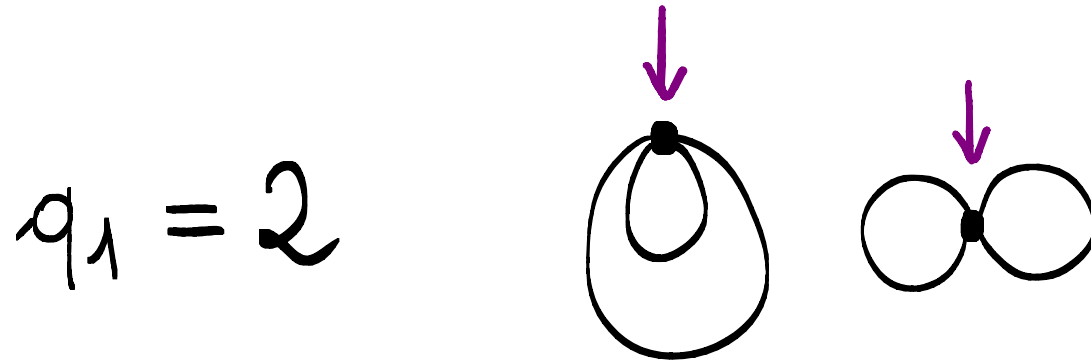


q_n = nombre de cartes tétravalentes à $(n+2)$ faces

$$= 2 \frac{3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$$

ÉNUMÉRATION DES CARTES TÉTRAVALENTES

Carte tétravalente = carte où chaque sommet a pour degré 4.



q_n = nombre de cartes tétravalentes à $(n+2)$ faces

$$= 2 \frac{3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

$$q_n = 2 \frac{3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$$

Formule de Stirling:

$$q_n \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} 12^n n^{-5/2}$$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

$$q_n = 2 \frac{3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$$

Formule de Stirling:

typique des cartes planaires

$$q_n \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} 12^n n^{-5/2}$$

NATURE DE LA SÉRIE GÉNÉRATRICE

Série génératrice des cartes tétravalentes :

$$Q(z) = \sum_{n \geq 1} q_n z^n$$

Nature de la série génératrice?

rationnelle \rightarrow algébrique \rightarrow holonome \rightarrow différentiellement algébrique

$$Q = \frac{P_1}{P_2}$$

admet un
poly annulateur

satisfait une EDL

satisfait une ED polynomiale

NATURE DE LA SÉRIE GÉNÉRATRICE

Série génératrice des cartes tétravalentes :

$$Q(z) = \sum_{n \geq 1} q_n z^n$$

Nature de la série génératrice?

rationnelle \rightarrow algébrique \rightarrow holonome \rightarrow différentiellement algébrique

$$Q = \frac{P_1}{P_2}$$

admet un
poly annulateur

satisfait une EDL

satisfait une ED polynomiale

Il existe $m \geq 1$ et $(m+1)$ polynômes P_0, \dots, P_m tq :

$$P_m(z) \frac{\partial^m Q}{\partial z^m} + \dots + P_1(z) \frac{\partial Q}{\partial z} + P_0(z) Q = 0$$

NATURE DE LA SÉRIE GÉNÉRATRICE

Série génératrice des cartes tétravalentes :

$$Q(z) = \sum_{n \geq 1} q_n z^n$$

Nature de la série génératrice?

rationnelle \rightarrow algébrique \rightarrow holonome \rightarrow différentiellement algébrique

$$Q = \frac{P_1}{P_2}$$

admet un
poly annulateur

satisfait une EDL

satisfait une ED polynomiale

Il existe un polynôme P à $(m+2)$ variables tq

$$P\left(z, \frac{\partial Q}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^m Q}{\partial z^m}, Q\right) = 0.$$

NATURE DE LA SÉRIE GÉNÉRATRICE

Série génératrice des cartes tétravalentes :

$$Q(z) = \sum_{n \geq 1} q_n z^n$$

Nature de la série génératrice?

rationnelle \rightarrow algébrique \rightarrow holonome \rightarrow différentiellement algébrique

$$Q = \frac{P_1}{P_2}$$

admet un
poly annulateur

satisfait une EDL

satisfait une ED polynomiale

$$Q = T - zT^3$$

$$T = 1 + 3zT^2$$

NATURE DE LA SÉRIE GÉNÉRATRICE

Série génératrice des cartes tétravalentes :

$$Q(z) = \sum_{n \geq 1} q_n z^n$$

Nature de la série génératrice?

rationnelle \rightarrow algébrique \rightarrow holonome \rightarrow différentiellement algébrique

$$Q = \frac{P_1}{P_2}$$

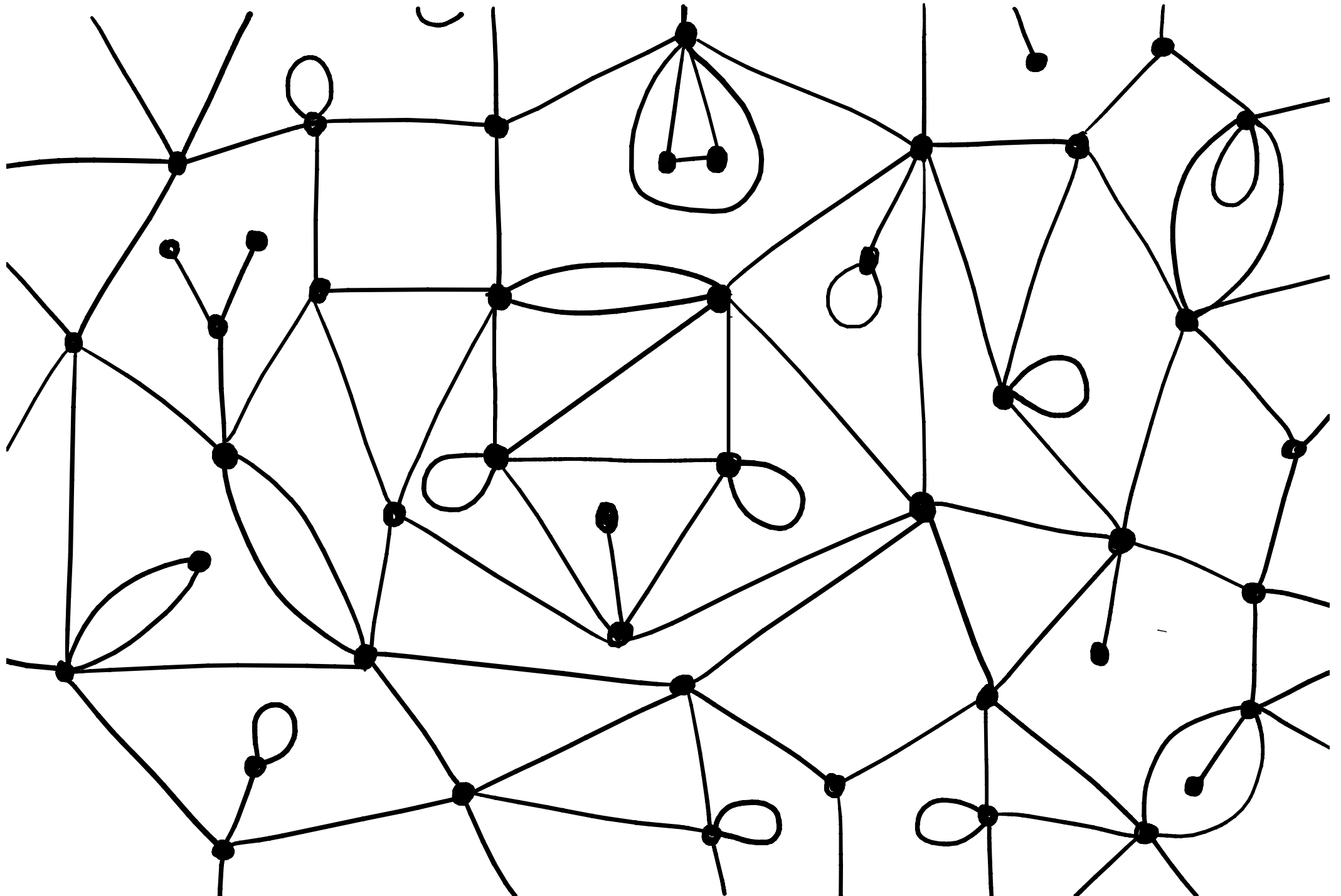
admet un
poly annulateur

satisfait une EDL

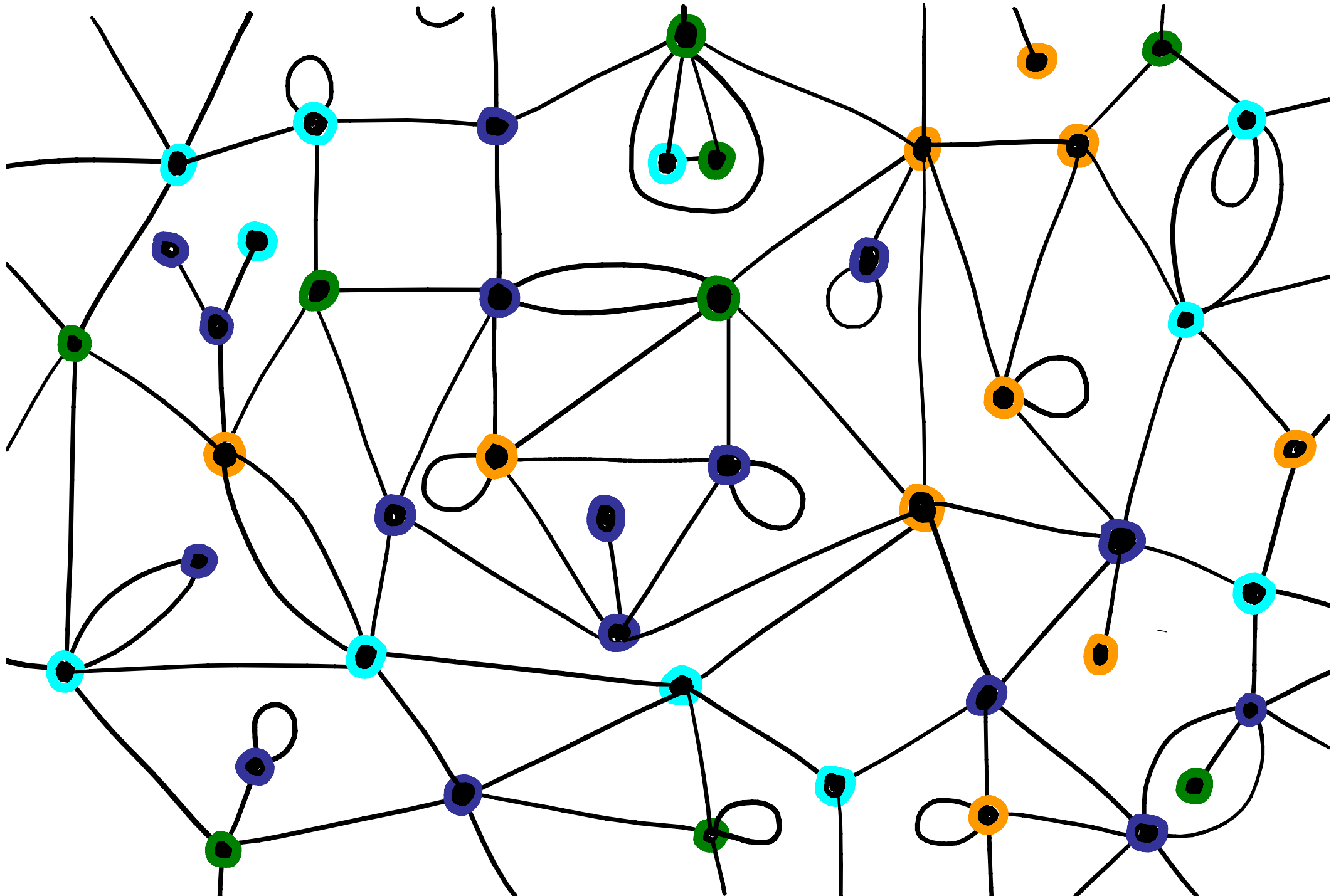
satisfait une ED polynomiale

$$Q = T - zT^3 \quad T = 1 + 3zT^2$$

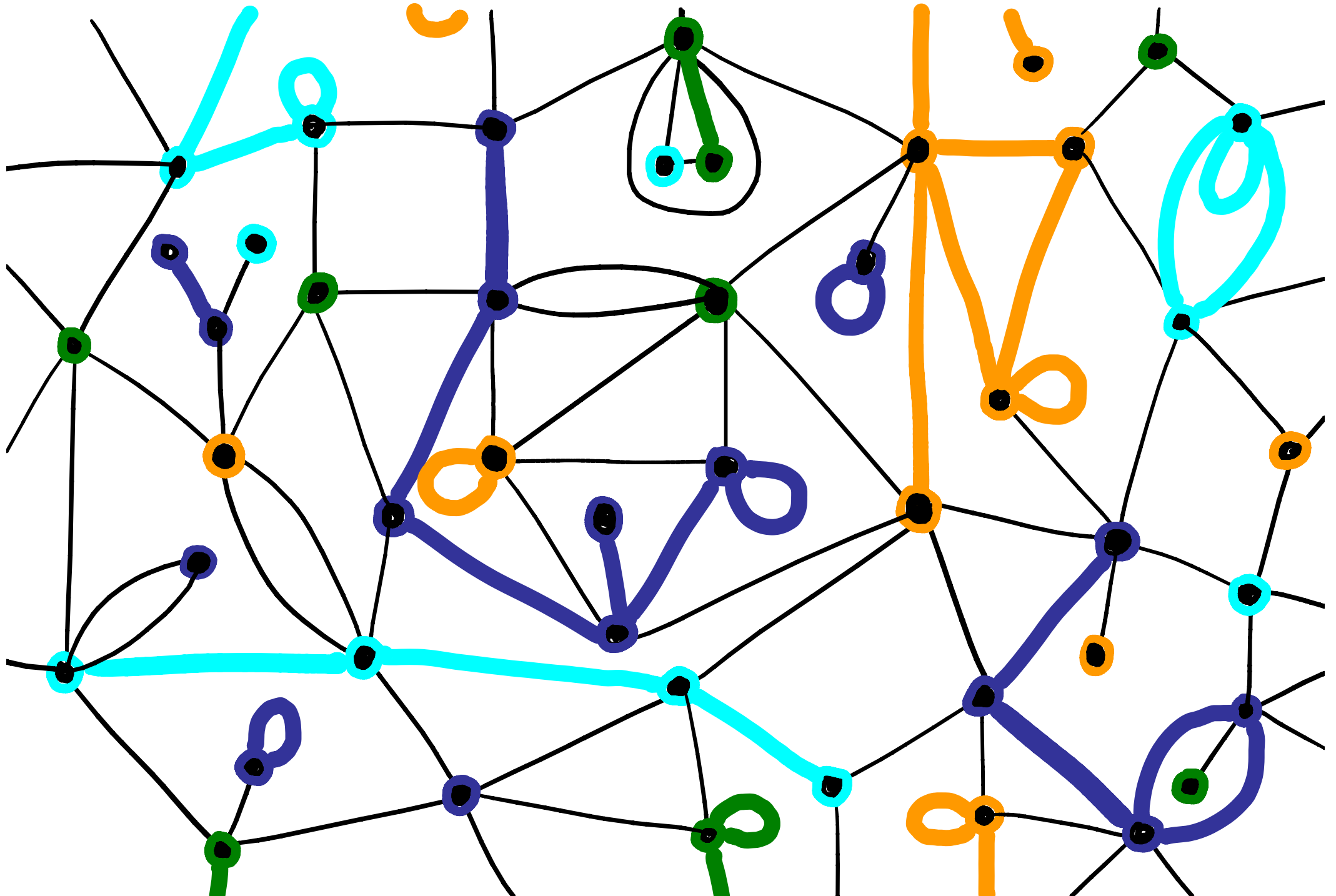
MODÈLE DE POTTS



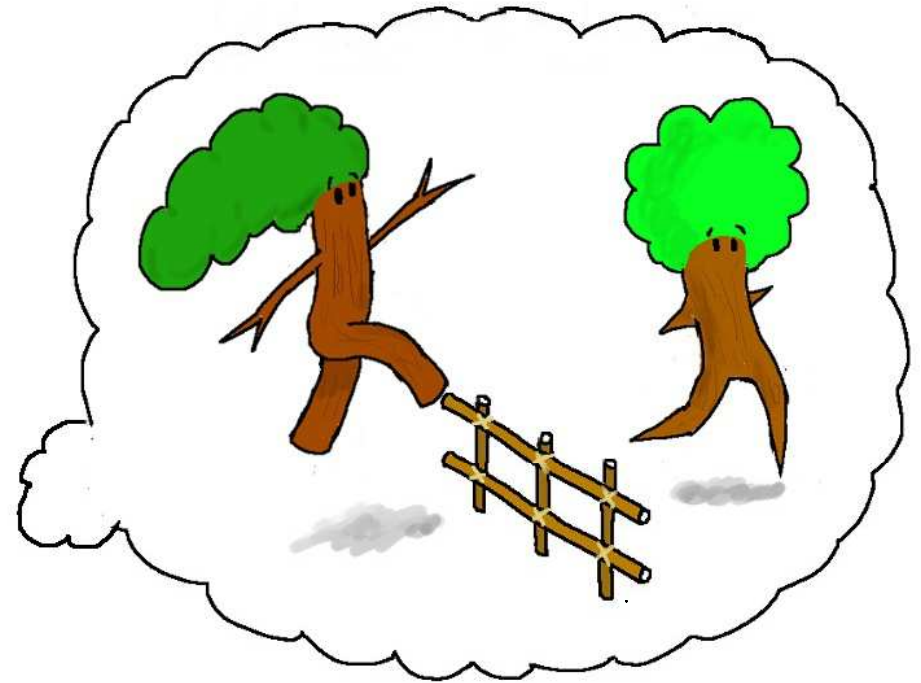
MODÈLE DE POTTS



MODÈLE DE POTTS



CARTES FORESTIÈRES

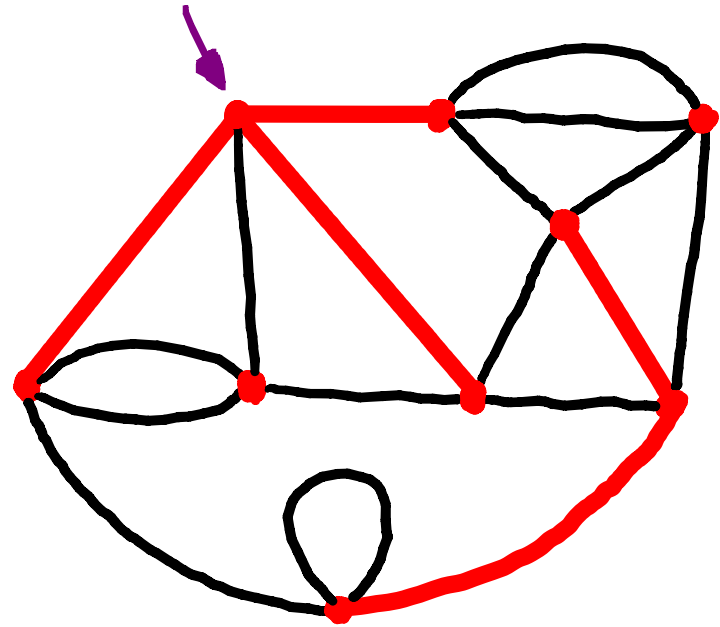


CARTES FORESTIÈRES : DÉFINITION

Forêt couvrante de $G =$

graphe F tel que

- $\text{Sommets}(F) = \text{Sommets}(G)$
- $\text{Arêtes}(F) \subseteq \text{Arêtes}(G)$
sans cycle

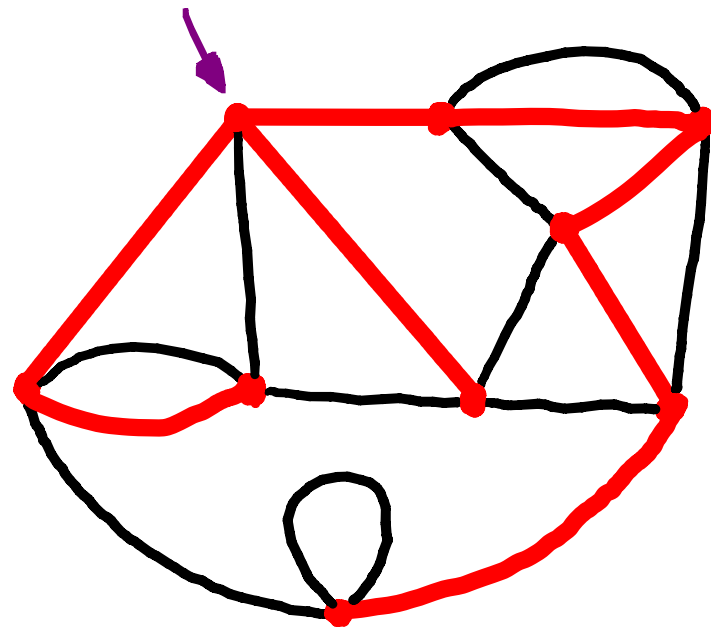


Carte forestière $(C, F) =$ carte plane $C +$ forêt couvrante F

D'autres structures: Arbres couvrants, coloriage, percolation
modèle de Potts/Ising, chemins auto-évitants... [Tutte, Mullin,
Kazakov, Borot, Bouttier, Guitter, Sportiello, Eynard,
Duplantier, Bousquet-Mélou, Schaeffer, Bernardi, Angel ...]

CARTES FORESTIÈRES : DÉFINITION

Carte planaire +
arbre couvrant
=
Chemin dans le
quart de plan



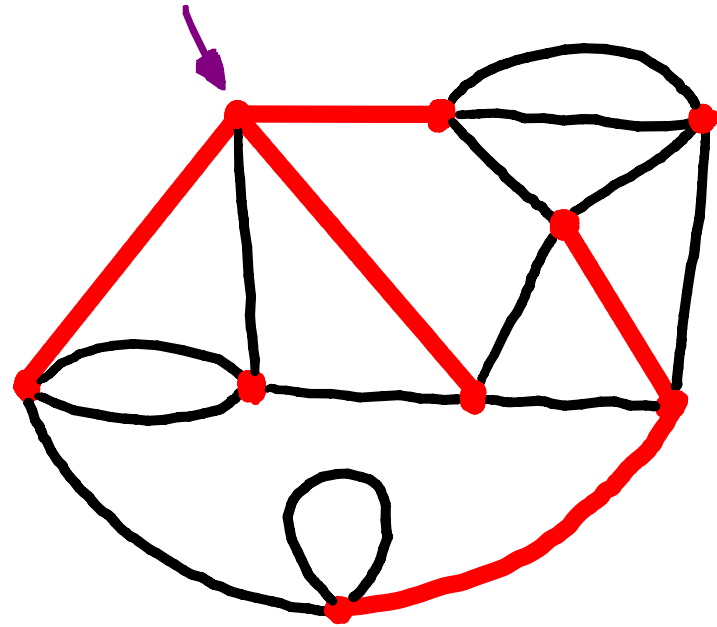
D'autres structures: Arbres couvrants, coloriage, percolation
modèle de Potts/Ising, chemins auto-évitants... [Tutte, Mullin,
Kazakov, Borot, Bouttier, Guitter, Sportiello, Eynard,
Duplantier, Bousquet-Mélou, Schaeffer, Bernardi, Angel ...]

CARTES FORESTIÈRES : DÉFINITION

Forêt couvrante de $G =$

graphe F tel que

- $\text{Sommets}(F) = \text{Sommets}(G)$
- $\text{Arêtes}(F) \subseteq \text{Arêtes}(G)$
sans cycle



Carte forestière $(C, F) =$ carte plane $C +$ forêt couvrante F

$$F(z, u) = \sum_{\substack{(C, F) \text{ carte} \\ \text{forestière tétravalente}}} z^{\# \text{faces}} u^{\# \text{composantes} - 1}$$

VALEURS SPÉCIALES DE μ

$$F(z, \mu) = \sum_{\substack{(C, F) \text{ carte} \\ \text{forestière t\u00e9tra\u00e9valente}}} z^{\# \text{faces}} \mu^{\# \text{composantes} - 1}$$

* $\mu = 1$: for\u00eat\u00e9s couvrants

* $\mu = 0$: arbres couvrants [Mullin, 1967]

* $\mu = -1$: orientations acycliques et
o\u00f9 la racine est accessible (sur les
quadrangulations) [Las Vergnas, 1984]

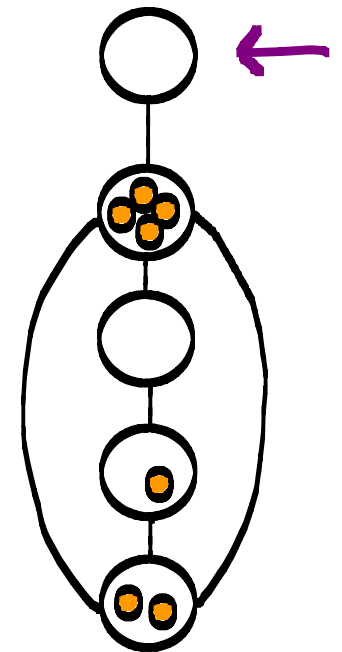
VALEURS GÉNÉRIQUES DE μ

- 1) Sous-graphes connexes sur quadrangulations (comptés par cycles)
- 2) Polynôme de Tutte $T_M(\mu + 1, 1)$
- 3) Modèle du tas de sable [Merino Lopez, Cori, Le Borgne]
- 4) Limite $q \rightarrow 0$ du modèle de Potts

Domaine naturel
 $\mu \in [-1, +\infty)$

3)

$$F(z, \mu) = \sum_{\text{quadrangulation} + \text{configuration} \text{ récurrente } C} z^{\# \text{somets}} (\mu + 1)^{\text{niveau}(C)}$$



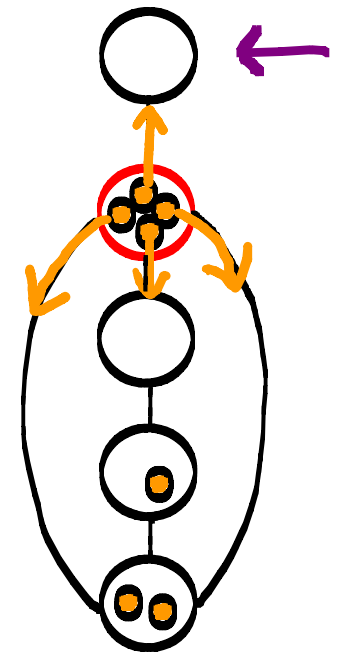
VALEURS GÉNÉRIQUES DE μ

- 1) Sous-graphes connexes sur quadrangulations (comptés par cycles)
- 2) Polynôme de Tutte $T_M(\mu + 1, 1)$
- 3) Modèle du tas de sable [Merino Lopez, Cori, Le Borgne]
- 4) Limite $q \rightarrow 0$ du modèle de Potts

Domaine naturel
 $\mu \in [-1, +\infty)$

3)

$$F(z, \mu) = \sum_{\text{quadrangulation} + \text{configuration} \text{ récurrente } C} z^{\# \text{somets}} (\mu + 1)^{\text{niveau}(C)}$$



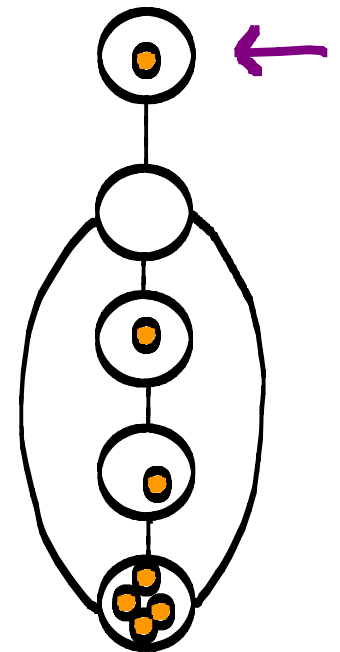
VALEURS GÉNÉRIQUES DE μ

- 1) Sous-graphes connexes sur quadrangulations (comptés par cycles)
- 2) Polynôme de Tutte $T_M(\mu+1, 1)$
- 3) Modèle du tas de sable [Merino Lopez, Cori, Le Borgne]
- 4) Limite $q \rightarrow 0$ du modèle de Potts

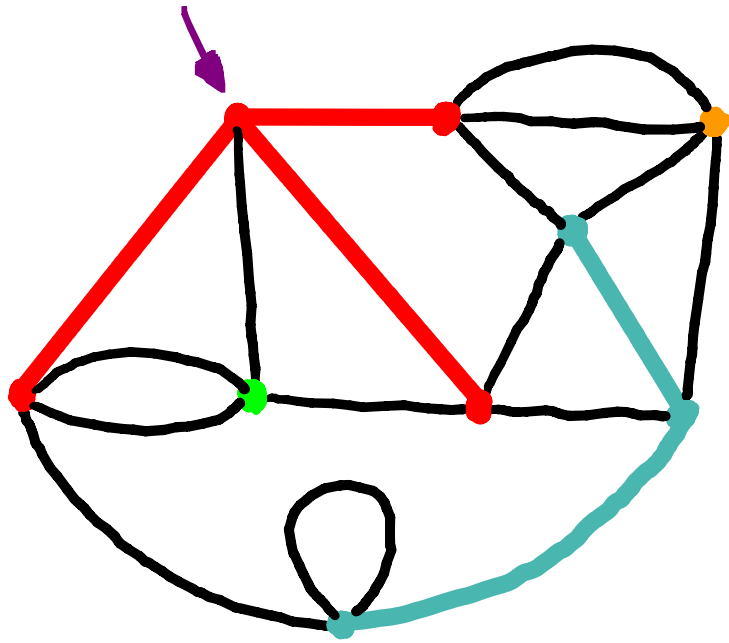
Domaine naturel
 $\mu \in [-1, +\infty)$

3)

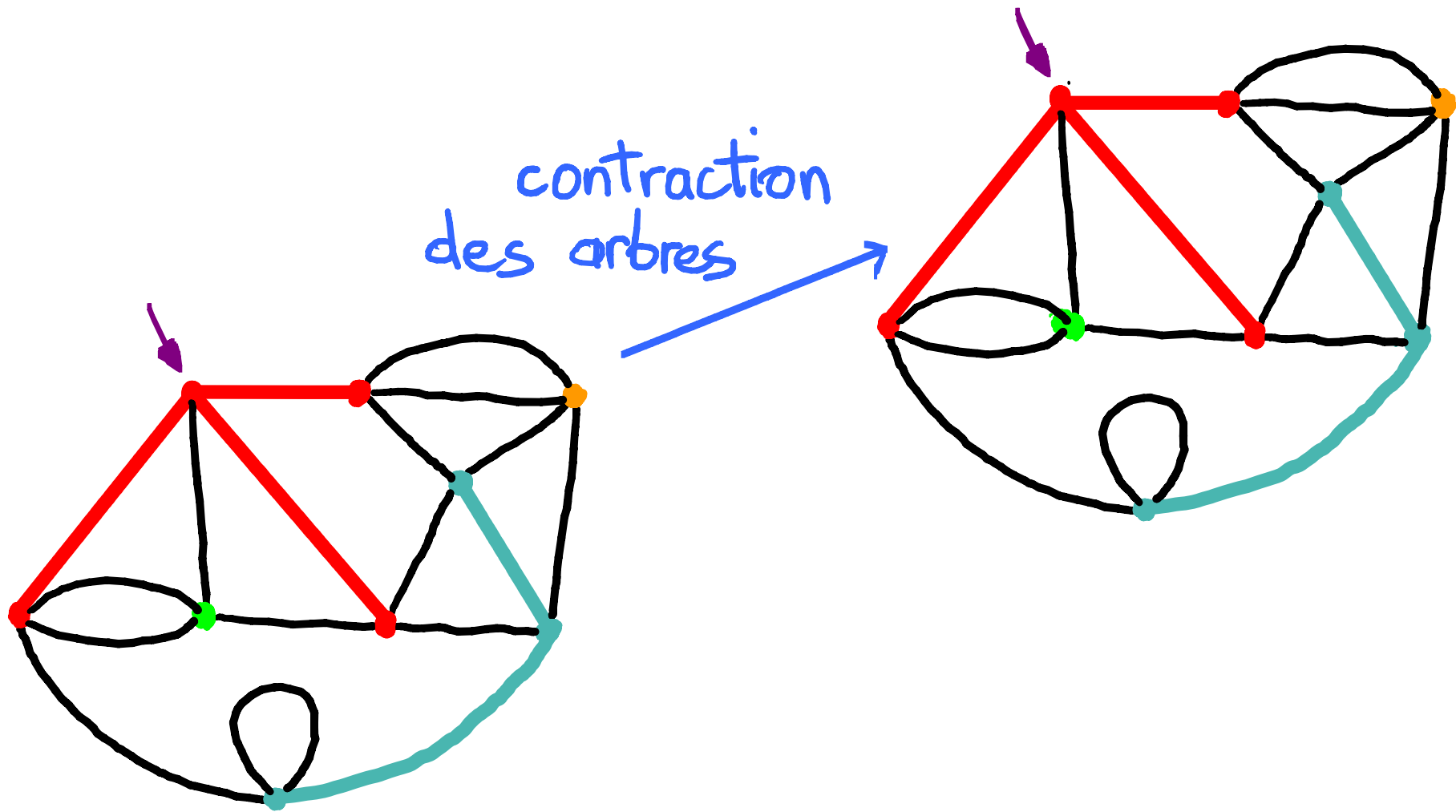
$$F(z, \mu) = \sum_{\text{quadrangulation} + \text{configuration} \text{ récurrente } C} z^{\# \text{somets}} (\mu+1)^{\text{niveau}(C)}$$



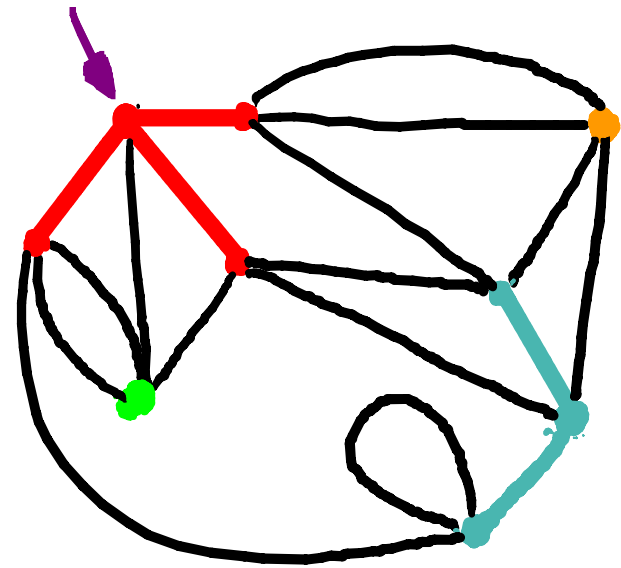
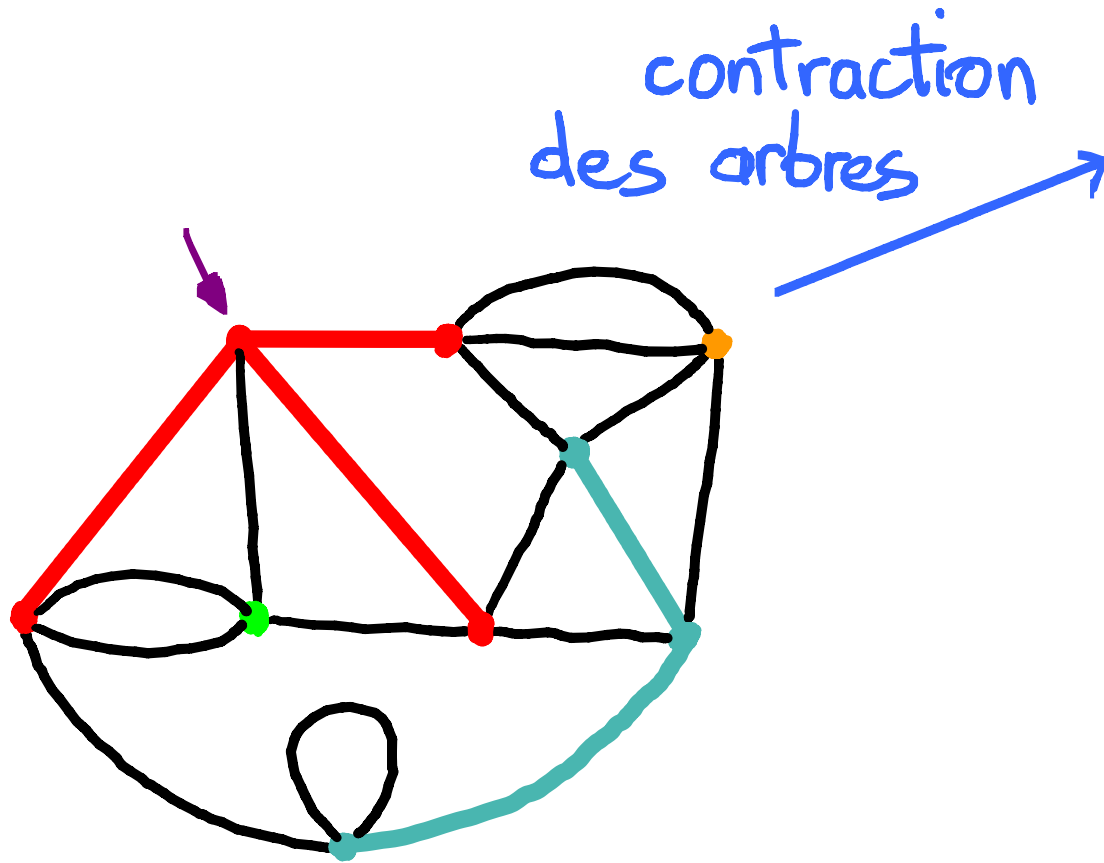
DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



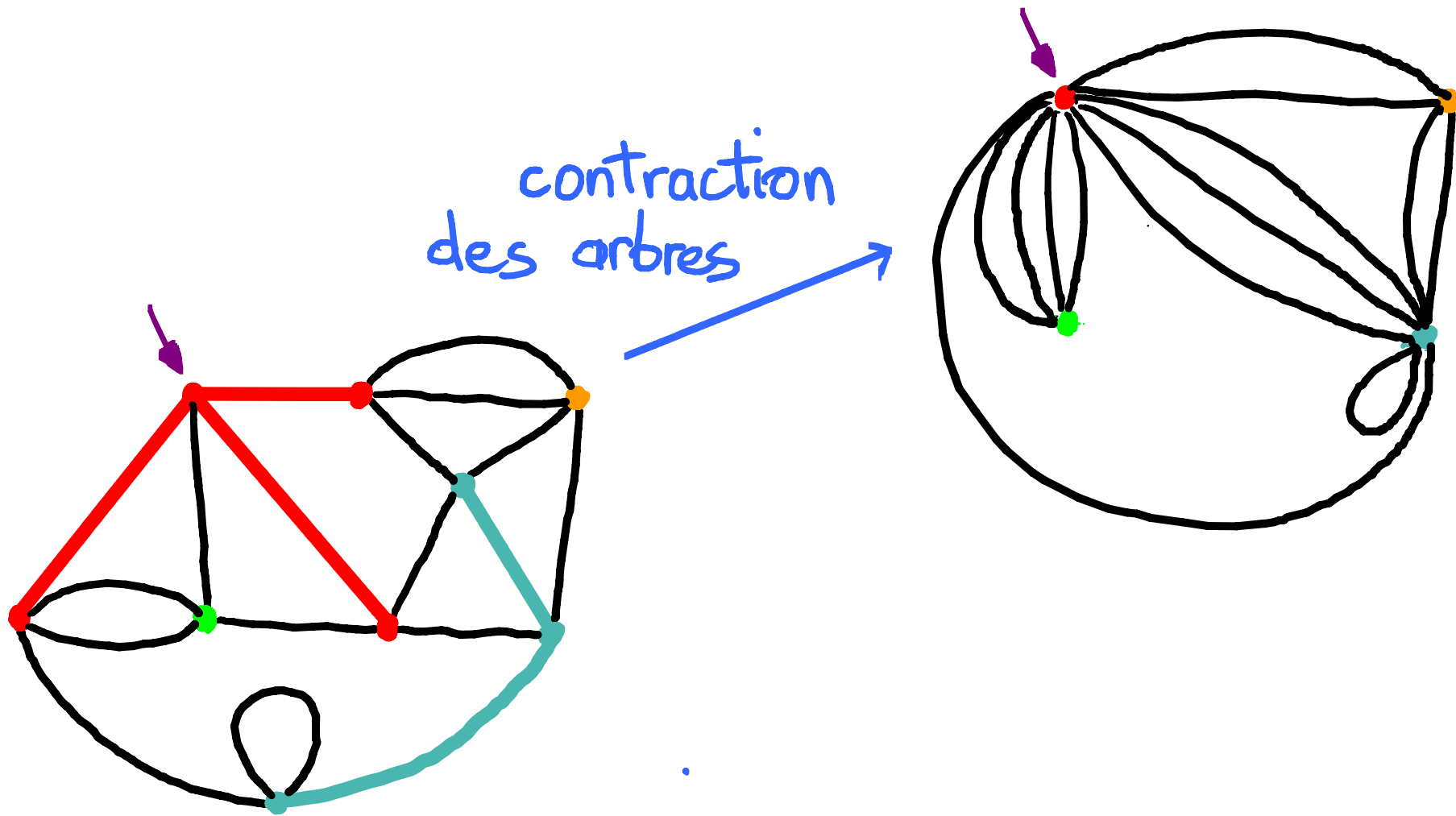
DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



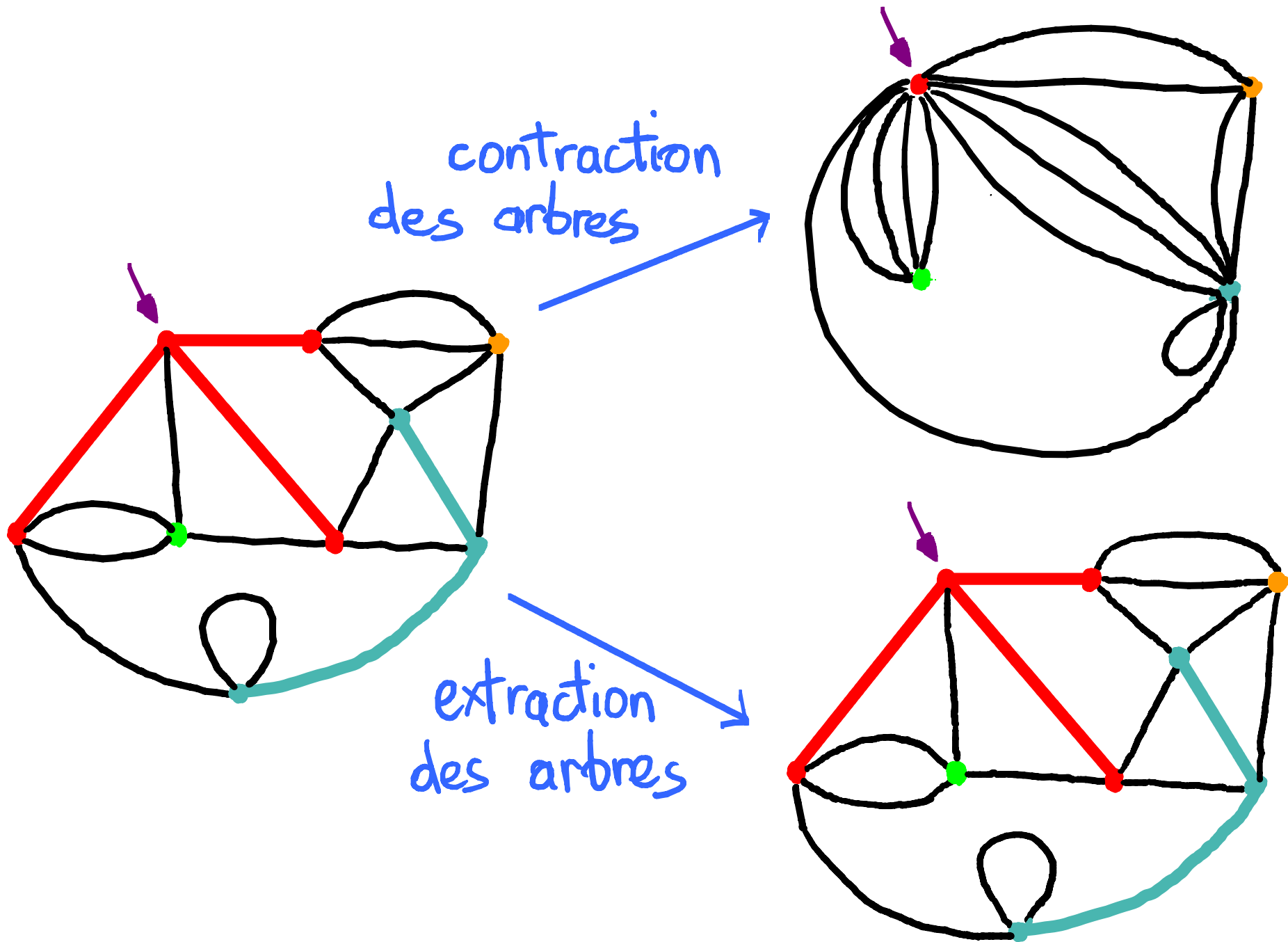
DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



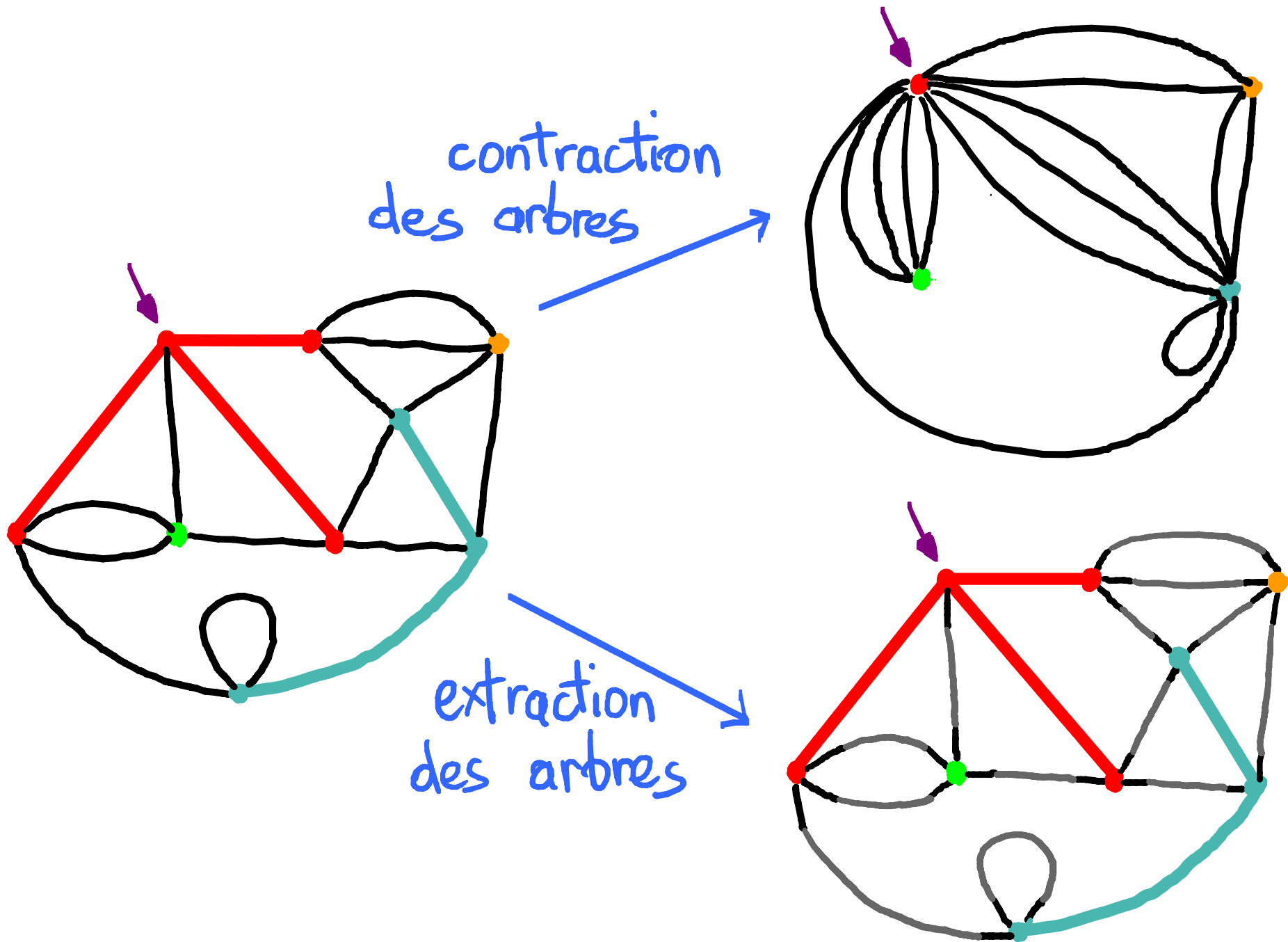
DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



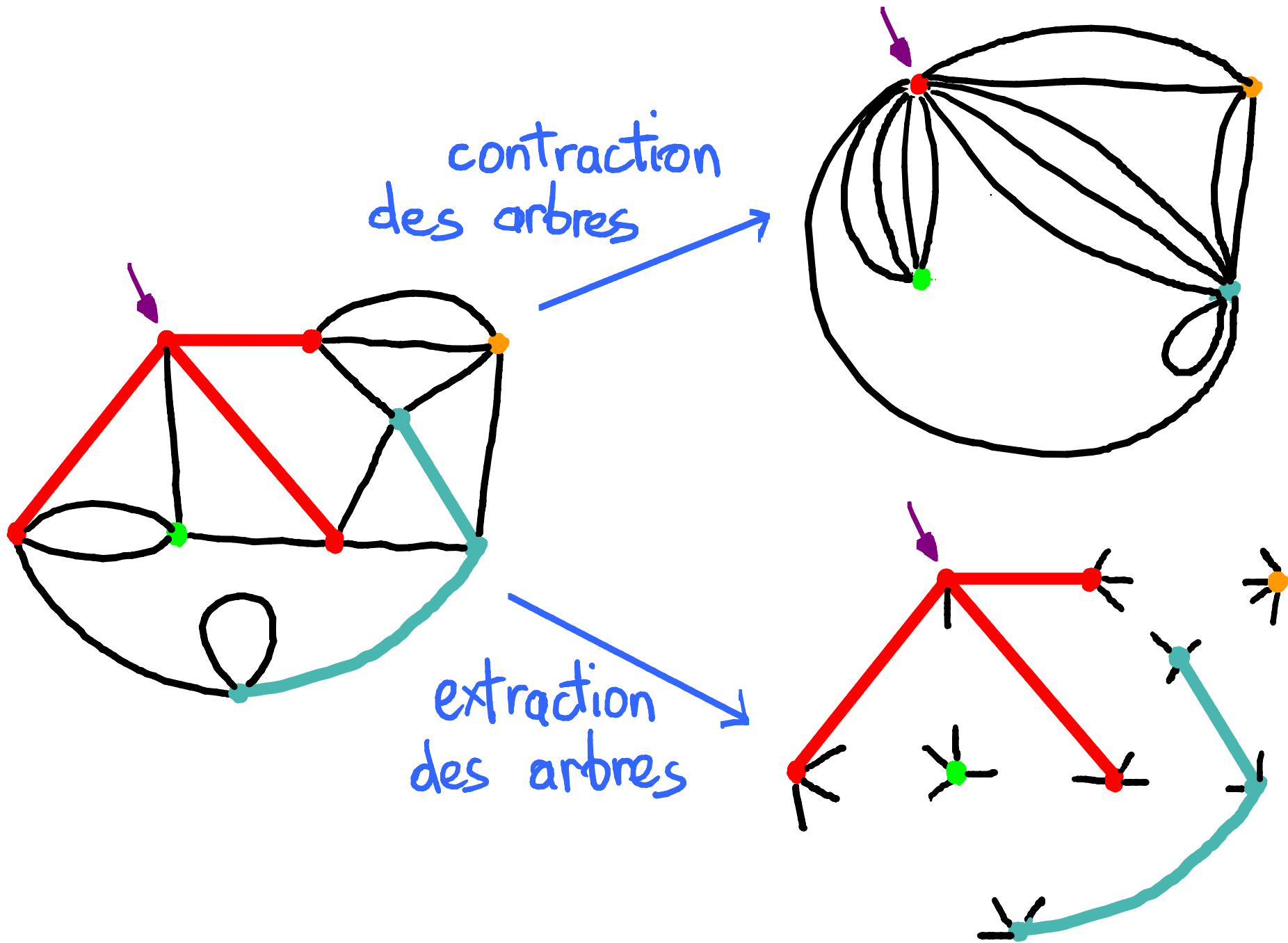
DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



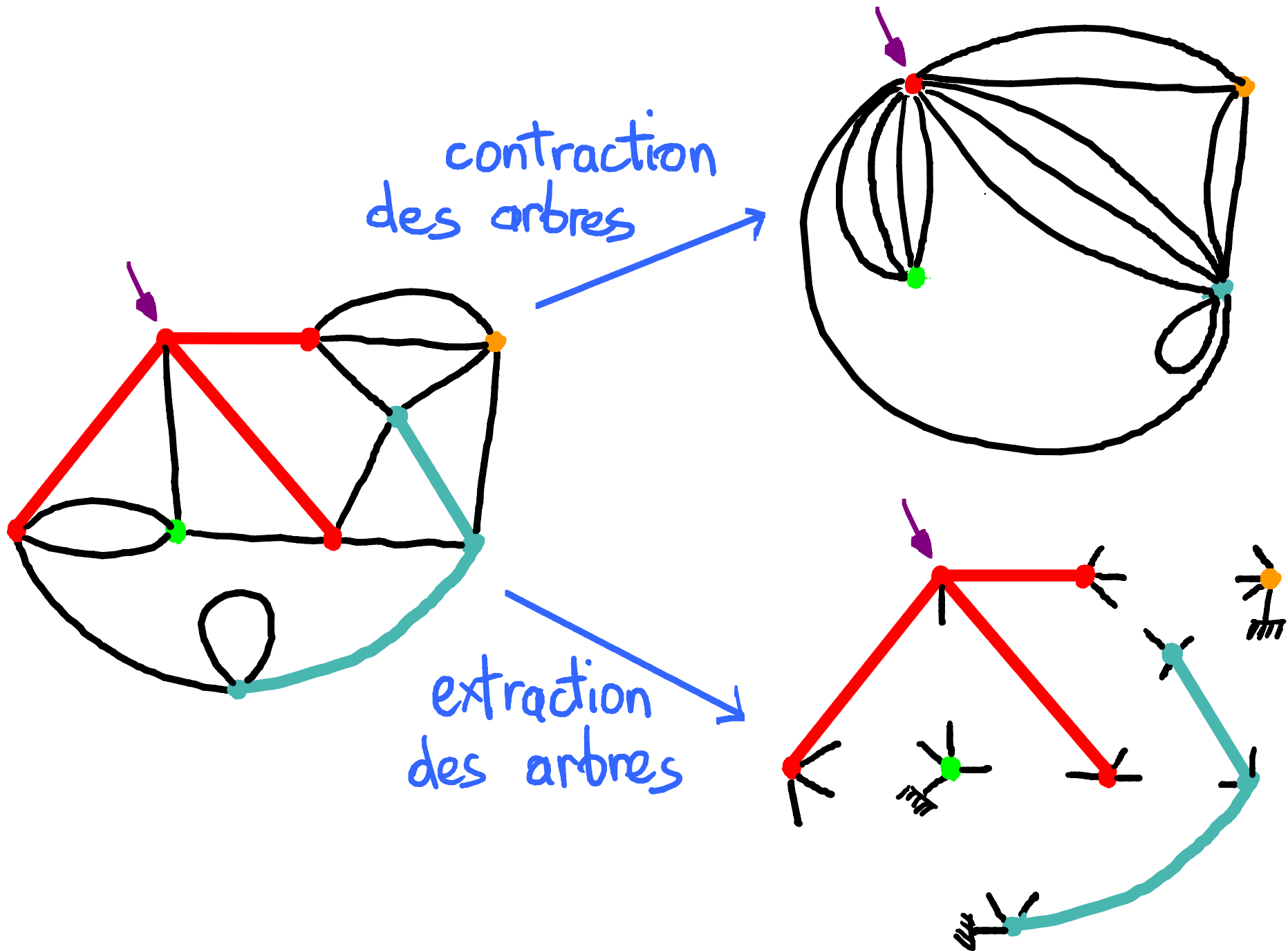
DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



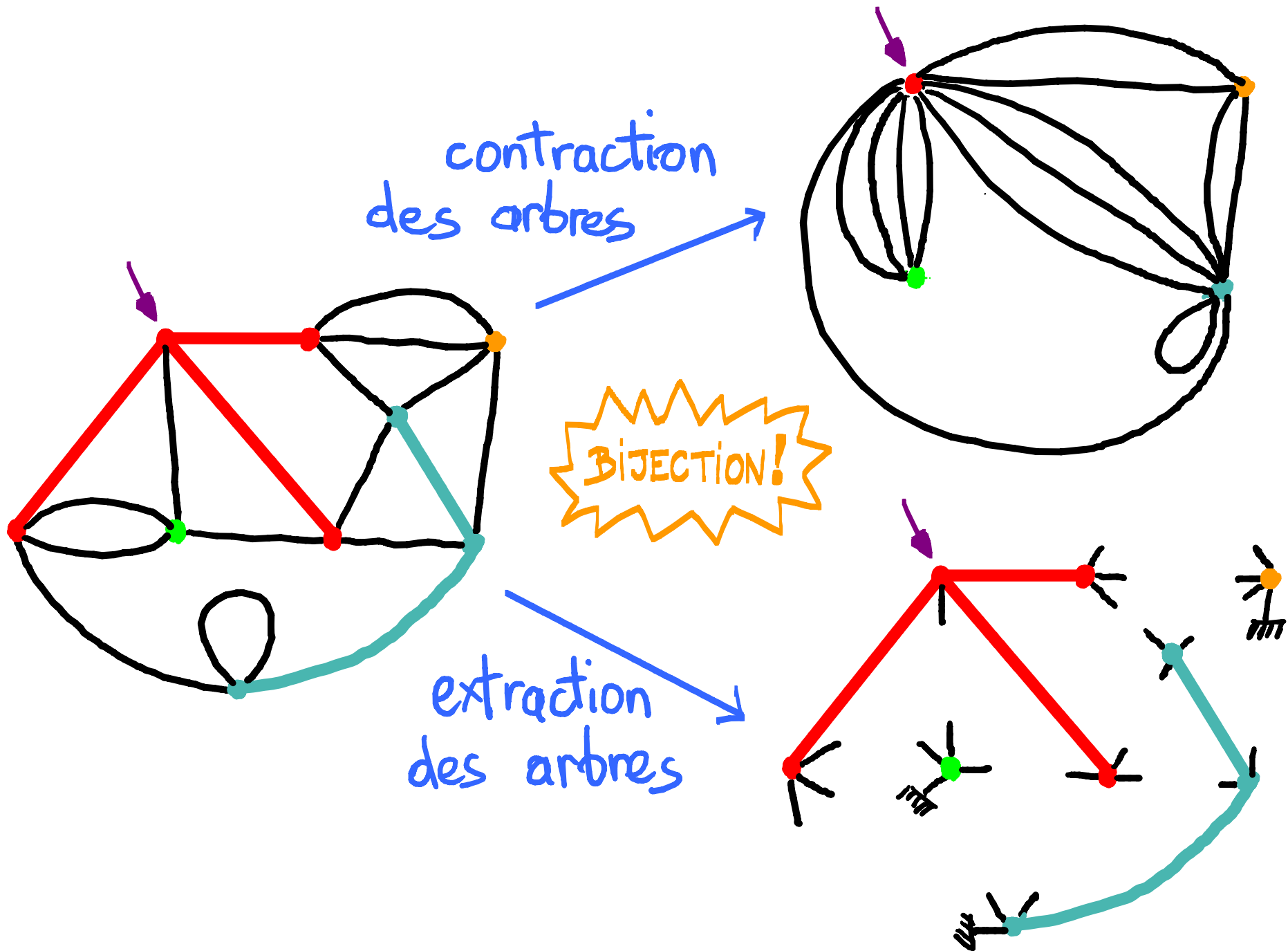
DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



DES CARTES FORESTIÈRES AUX CARTES GÉNÉRALES



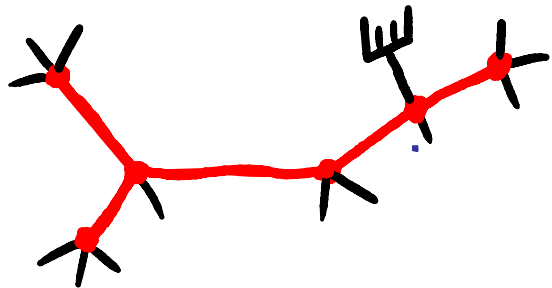
TRADUCTION EN TERMES DE SÉRIES GÉNÉRATRICES

$M(z, u; g_1, g_2, g_3, \dots; h_1, h_2, h_3, \dots) =$
série génératrice des cartes planaires avec un poids:

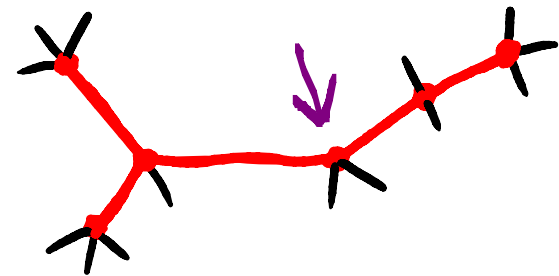
- z par face,
- $u g_k$ par sommet non racine de degré k
- h_k si la racine a pour degré k

$$F(z, u) = M(z, u; t_1, t_2, t_3, \dots; t_1^c, t_2^c, t_3^c, \dots)$$

$t_k = \#$ arbres tétravalents à k feuilles enracinés sur une feuille



$t_k^c = \#$ arbres tétravalents à k feuilles enracinés sur un coin



TRADUCTION EN TERMES DE SÉRIES GÉNÉRATRICES

$M(z, u; g_1, g_2, g_3, \dots; h_1, h_2, h_3, \dots) =$
série génératrice des cartes planaires avec un poids:

- z par face,
- $u g_k$ par sommet non racine de degré k
- h_k si la racine a pour degré k

Cette série génératrice est connue!

cf [Bouttier - Guitter, 2012]

(et M' a une forme plus sympathique que M)

Notation: $x' = \frac{\partial X}{\partial z}$

LA SÉRIE GÉNÉRATRICE DES CARTES FORESTIÈRES

Théorème : Il existe une unique série formelle R en z avec terme constant et coefficients dans $\mathbb{Q}[u]$ telle que :

$$R = z_0 + u \sum_{i \geq 2} \frac{(3i-3)!}{(i-1)!^2 i!} R^i$$

De plus,

$$F' = 4 \sum_{i \geq 2} \frac{(3i-2)!}{(i-2)! i!^2} R^i$$

LA SÉRIE GÉNÉRATRICE DES CARTES FORESTIÈRES

Théorème : Il existe une unique série formelle R en z avec terme constant et coefficients dans $\mathbb{Q}[u]$ telle que :

$$R = z + u \sum_{i \geq 2} \frac{(3i-3)!}{(i-1)!^2 i!} R^i$$

De plus,

$$F' = 4 \sum_{i \geq 2} \frac{(3i-2)!}{(i-2)! i!^2} R^i$$

pour $u=0$, [Mullin]

$$R = z \quad \text{et} \quad F' = 4 \sum_{i \geq 2} \frac{(3i-2)!}{(i-2)! i!^2} z^i \quad \text{ndonome.}$$

LA SÉRIE GÉNÉRATRICE DES CARTES FORESTIÈRES

Théorème : Il existe une unique série formelle R en z avec terme constant et coefficients dans $\mathbb{Q}[u]$ telle que :

$$R = z + u \phi(R)$$

De plus,

$$F' = \Theta(R)$$

où

$$\phi(x) = \sum_{i \geq 2} \frac{(3i-3)!}{(i-1)!^2 i!} x^i, \quad \Theta(x) = 4 \sum_{i \geq 2} \frac{(3i-2)!}{(i-2)! i!^2} x^i.$$

UNE EQUATION DIFFERENTIELLE POUR F

$$\mathbb{R} = \mathfrak{z} + u \phi(\mathbb{R}) \quad F' = \Theta(\mathbb{R})$$

Prop F est \mathbb{D} -algébrique

(Raison fondamentale: ϕ and Θ sont holonomes)

UNE EQUATION DIFFERENTIELLE POUR F

$$\mathbb{R} = \mathfrak{z} + u \phi(\mathbb{R}) \quad F' = \Theta(\mathbb{R})$$

Prop F est \mathbb{D} -algébrique

(Raison fondamentale: ϕ and Θ sont holonomes)

Une équation différentielle peut-elle être explicitement calculée?

UNE EQUATION DIFFERENTIELLE POUR F

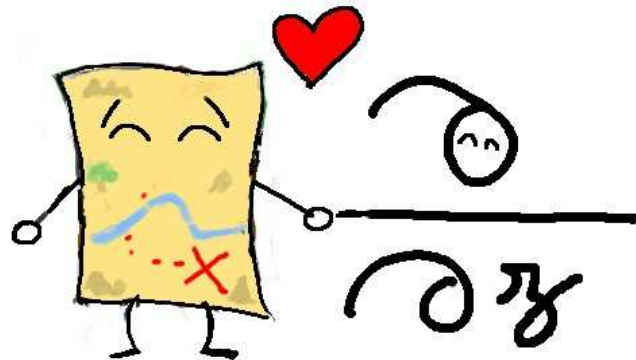
$$\mathbb{R} = \mathbb{C} + u \phi(\mathbb{R}) \quad F' = \Theta(\mathbb{R})$$

Prop F est \mathbb{D} -algébrique

(Raison fondamentale: ϕ and Θ sont holonomes)

Une équation différentielle peut-elle être explicitement calculée?

OUI!



UNE EQUATION DIFFERENTIELLE POUR F

$$\begin{aligned} & 9F'^2 F''^5 \mu^6 + 36F'^2 F''^3 F''' \mu^5 \eta + 144F'^2 F''^4 \mu^5 - 12(21\eta - 1)F'F''^5 \mu^5 + 432F'^2 F''^2 F''' \mu^4 \\ & - 48(24\eta - 1)F'F''^3 F''' \mu^4 \eta + 864F'^2 F''^3 \mu^4 - 96(27\eta - 2)F'F''^4 \mu^4 + 4(27\eta - 1)(15\eta - 1)F''^5 \mu^4 \\ & + 1728F'^2 F'' F''' \mu^3 \eta - 288(21\eta - 2)F'F''^2 F''' \mu^3 \eta + 10368F'F''^2 \mu^2 \eta^3 + 16(27\eta - 1)(21\eta - 1)F''^3 F''' \mu^3 \eta \\ & + 2304F'^2 F''^2 \mu^3 - 288(31\eta - 4)F'F''^3 \mu^3 - 64(6\mu\eta - 162\eta^2 + 33\eta - 1)F''^4 \mu^3 + 2304F'^2 F''' \mu^2 \eta \\ & - 2304(6\eta - 1)F'F'' F''' \mu^2 \eta - 192(8\mu\eta - 54\eta^2 + 29\eta - 1)F''^2 F''' \mu^2 \eta - 768(2\mu + 189\eta - 7)F''^3 \mu^2 \eta^3 \\ & + 2304F'^2 F'' \mu^2 - 3072(3\eta - 1)F'F''^2 \mu^2 - 192(24\mu\eta - 27\eta^2 + 55\eta - 2)F''^3 \mu^2 - 1536(21\eta - 2)F'F''' \mu \eta \\ & - 768(12\mu\eta + 81\eta^2 + 24\eta - 1)F'' F''' \mu \eta + 1536(9\eta + 2)F'F'' \mu - 512(39\mu\eta + 81\eta^2 + 51\eta - 2)F''^2 \mu \\ & + 36864F' \eta - 1024(12\mu\eta - 162\eta^2 + 33\eta - 1)F''' \eta - 1024(36\mu\eta + 27\eta - 1)F'' - 24576\eta = 0. \end{aligned}$$

équation différentielle d'ordre 2 en F' et de degré 7
(mais pas en F)

UNE EQUATION DIFFERENTIELLE POUR F

$$\begin{aligned} & 9F'^2 F''^5 \mu^6 + 36F'^2 F''^3 F''' \mu^5 \eta + 144F'^2 F''^4 \mu^5 - 12(21\eta - 1)F'F''^5 \mu^5 + 432F'^2 F''^2 F''' \mu^4 \\ & - 48(24\eta - 1)F'F''^3 F''' \mu^4 \eta + 864F'^2 F''^3 \mu^4 - 96(27\eta - 2)F'F''^4 \mu^4 + 4(27\eta - 1)(15\eta - 1)F''^5 \mu^4 \\ & + 1728F'^2 F'' F''' \mu^3 \eta - 288(21\eta - 2)F'F''^2 F''' \mu^3 \eta + 10368F'F''^2 \mu^2 \eta^3 + 16(27\eta - 1)(21\eta - 1)F''^3 F''' \mu^3 \eta \\ & + 2304F'^2 F''^2 \mu^3 - 288(31\eta - 4)F'F''^3 \mu^3 - 64(6\mu\eta - 162\eta^2 + 33\eta - 1)F''^4 \mu^3 + 2304F'^2 F''' \mu^2 \eta \\ & - 2304(6\eta - 1)F'F'' F''' \mu^2 \eta - 192(8\mu\eta - 54\eta^2 + 29\eta - 1)F''^2 F''' \mu^2 \eta - 768(2\mu + 189\eta - 7)F''^2 \mu \eta^3 \\ & + 2304F'^2 F'' \mu^2 - 3072(3\eta - 1)F'F''^2 \mu^2 - 192(24\mu\eta - 27\eta^2 + 55\eta - 2)F''^3 \mu^2 - 1536(21\eta - 2)F'F''' \mu \eta \\ & - 768(12\mu\eta + 81\eta^2 + 24\eta - 1)F'' F''' \mu \eta + 1536(9\eta + 2)F'F'' \mu - 512(39\mu\eta + 81\eta^2 + 51\eta - 2)F''^2 \mu \\ & + 36864F' \eta - 1024(12\mu\eta - 162\eta^2 + 33\eta - 1)F''' \eta - 1024(36\mu\eta + 27\eta - 1)F'' - 24576\eta = 0. \end{aligned}$$

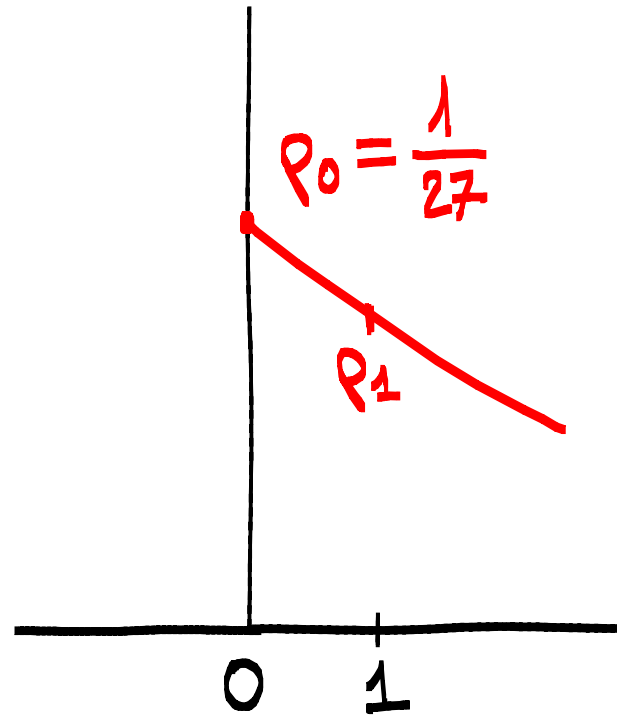
équation différentielle d'ordre 2 en F' et de degré 7
(mais pas en F)

(De plus, c'est la plus petite)

RAYON DE CONVERGENCE

Fixons μ ,

$\rho_\mu =$ rayon de convergence de $F(z, \mu) = \sum_n f_n(\mu) z^n$.



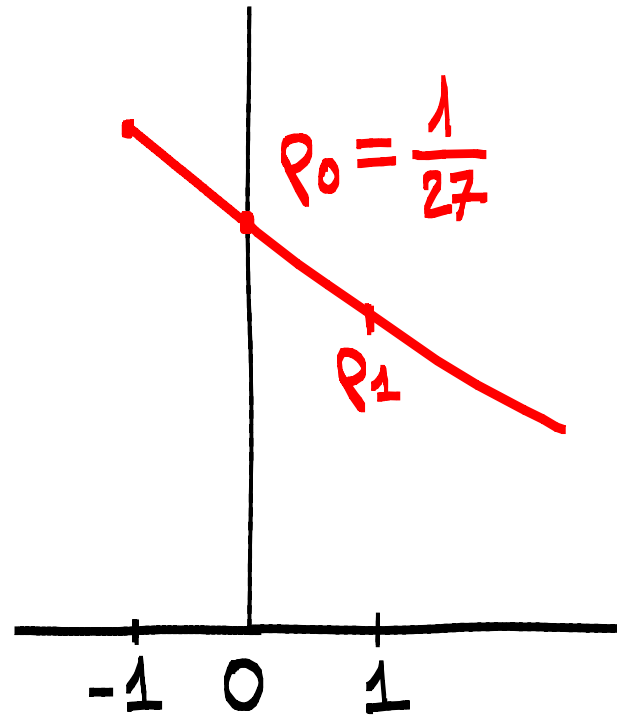
$$\begin{cases} \rho_\mu = z_\mu - \mu \phi(z_\mu) \\ \phi'(z_\mu) = \frac{1}{\mu} \end{cases}$$

RAYON DE CONVERGENCE

Fixons μ dans $[-1, +\infty)$,

$\rho_\mu =$ rayon de convergence de $F(z, \mu) = \sum_n f_n(\mu) z^n$.

ρ_μ est affine
sur $[-1, 0]$!



$$\begin{cases} \rho_\mu = z_\mu - \mu \phi(z_\mu) \\ \phi'(z_\mu) = \frac{1}{\mu} \end{cases} \quad (\mu > 0)$$

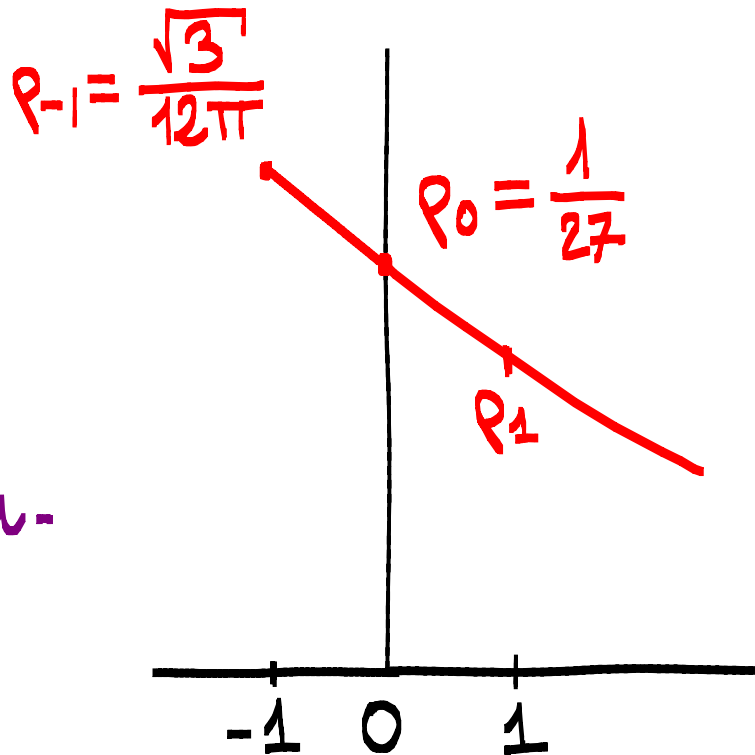
RAYON DE CONVERGENCE

Fixons μ dans $[-1, +\infty)$,

$\rho_\mu =$ rayon de convergence de $F(z, \mu) = \sum_n f_n(\mu) z^n$.

ρ_μ est affine
sur $[-1, 0]$!

$$\rho_\mu = \frac{1}{27}(1+\mu) - \frac{\sqrt{3}}{12\pi}\mu.$$



$$\begin{cases} \rho_\mu = z_\mu - \mu \phi(z_\mu) \\ \phi'(z_\mu) = \frac{1}{\mu} \end{cases} \quad (\mu > 0)$$

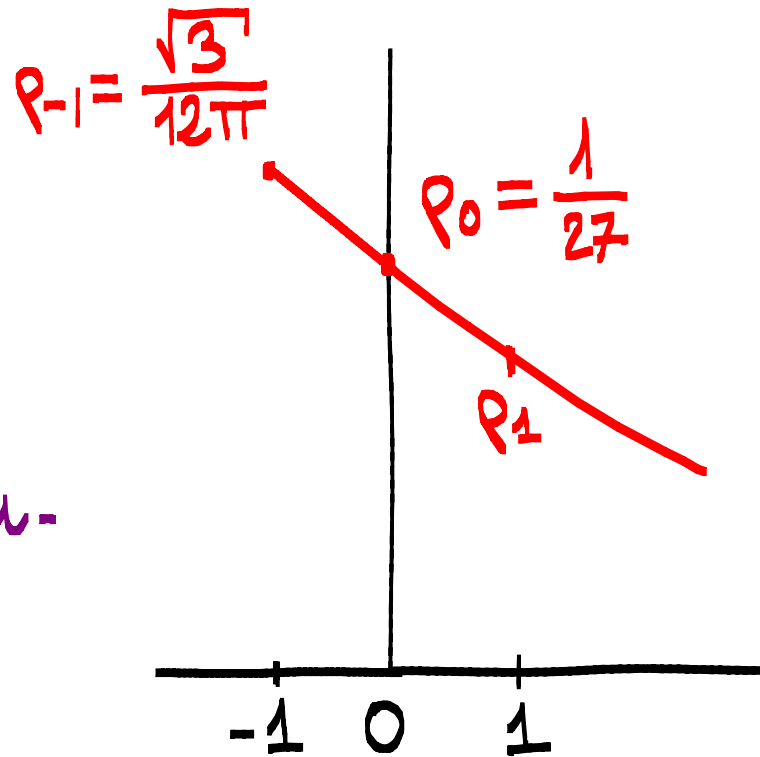
RAYON DE CONVERGENCE

Fixons μ dans $[-1, +\infty)$,

$\rho_\mu =$ rayon de convergence de $F(z, \mu) = \sum_n f_n(\mu) z^n$.

ρ_μ est affine
sur $[-1, 0]$!

$$\rho_\mu = \frac{1}{27}(1+\mu) - \frac{\sqrt{3}}{12\pi}\mu.$$



$$\begin{cases} \rho_\mu = z_\mu - \mu \phi(z_\mu) \\ \phi'(z_\mu) = \frac{1}{\mu} \end{cases} \quad (\mu > 0)$$

Cor ρ_{-1} est transcendant :
 $F(z, -1)$ n'est pas holonome.

TRANSITION DE PHASE EN 0

$$f_n(u) = [z^n] F(z, u)$$

$$-1 \leq u < 0$$

$$f_n(u) \sim \frac{c u \rho u^{-n}}{n^3 \ln^2 n}$$

Nouvelle
"classe d'universalité"
pour les cartes

$$u = 0$$

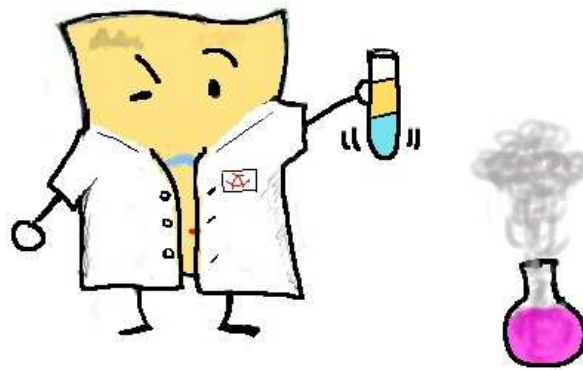
$$f_n(u) \sim \frac{c u \rho u^{-n}}{n^3}$$

cartes avec un
arbre couvrant

$$0 < u$$

$$f_n(u) \sim \frac{c u \rho u^{-n}}{n^{5/2}}$$

↑
typique



TRANSITION DE PHASE EN 0

$$f_n(u) = [z^n] F(z, u)$$

$$-1 \leq u < 0$$

$$f_n(u) \sim \frac{c u \rho u^{-n}}{n^3 \ln^2 n}$$

Nouvelle
"classe d'universalité"
pour les cartes

$$u = 0$$

$$f_n(u) \sim \frac{c u \rho u^{-n}}{n^3}$$

cartes avec un
arbre couvrant

$$0 < u$$

$$f_n(u) \sim \frac{c u \rho u^{-n}}{n^{5/2}}$$

typique

holonome

Cor :

Pour $u \in [-1, 0[$, $F(z, u)$ n'est pas holonome.

EXTENSION DES RÉSULTATS -

CONCERNANT L'ÉNUMÉRATION DITE EXACTE :

→ toutes les classes de cartes
avec prescription des degrés

CONCERNANT L'ÉNUMÉRATION ASYMPTOTIQUE

→ cartes où le degré de chaque sommet
est pair et supérieur à 4

(ex: cartes avec pour degré possible

$\{6\}$
 $\{8\}$

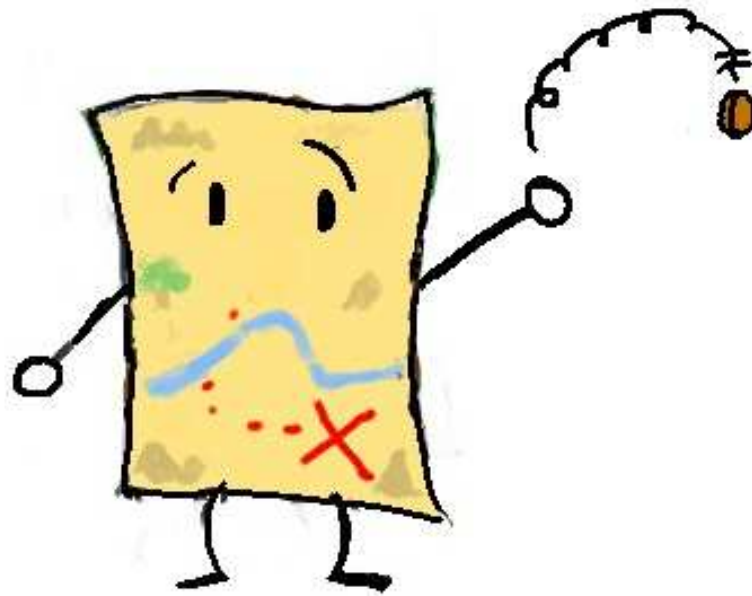
$\{4, 40, 106\}$

$\{4, 6, 8, 10, \dots\}$)

→ cartes cubiques*

(le degré de chaque sommet est 3)

RÉSULTATS PROBABILISTES



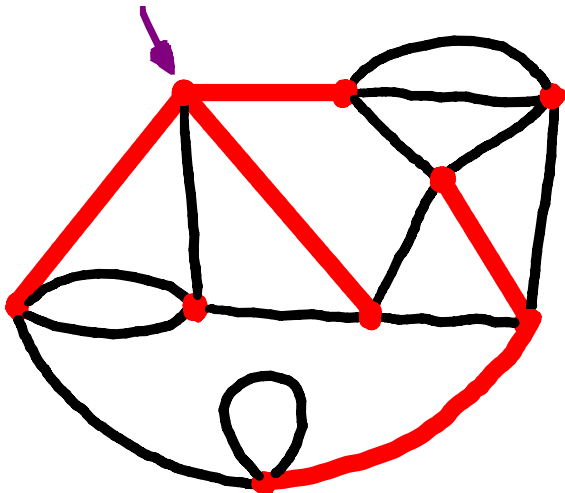
NOMBRE DE COMPOSANTES

Fixons $u \in [0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$ (nombre de faces)
distribution de probabilité $\mathbb{P}_u =$

$$\mathbb{P}_u(C, F) = \frac{u^{\# \text{composantes}}}{f_n(u)}$$

$C_n =$ v.a. sous \mathbb{P}_u qui compte le nombre de composantes.

Ex:



Ici $C_n = 4$

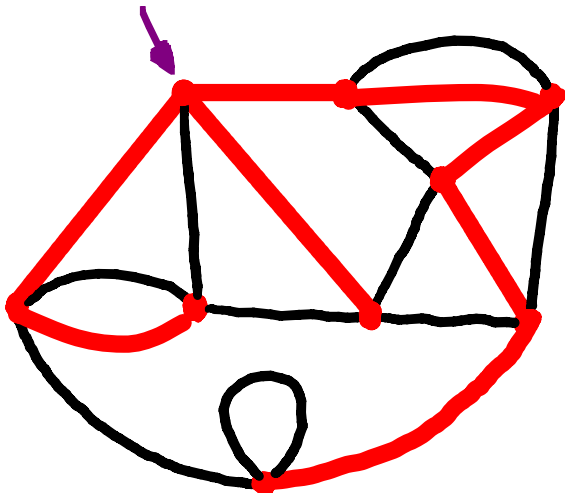
NOMBRE DE COMPOSANTES

Fixons $u \in [0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$ (nombre de faces)
distribution de probabilité $\mathbb{P}_u =$

$$\mathbb{P}_u(C, F) = \frac{u^{\# \text{composantes}}}{f_n(u)}$$

$C_n =$ v.a. sous \mathbb{P}_u qui compte le nombre de composantes.

Ex:



Si $u = 0$,

$$C_n = 1$$

NOMBRE DE COMPOSANTES

Fixons $u \in [0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$ (nombre de faces)
distribution de probabilité $\mathbb{P}_u =$

$$\mathbb{P}_u(C, F) = \frac{u^{\# \text{composantes}}}{f_n(u)}$$

$C_n =$ v.a. sous \mathbb{P}_u qui compte le nombre de composantes.

Prop

$$C_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$$

$$m_n \sim K_u \times n \quad \sigma_n^2 \sim \lambda_u \times n \quad (u \neq 0)$$

TAILLE DE LA COMPOSANTE RACINE

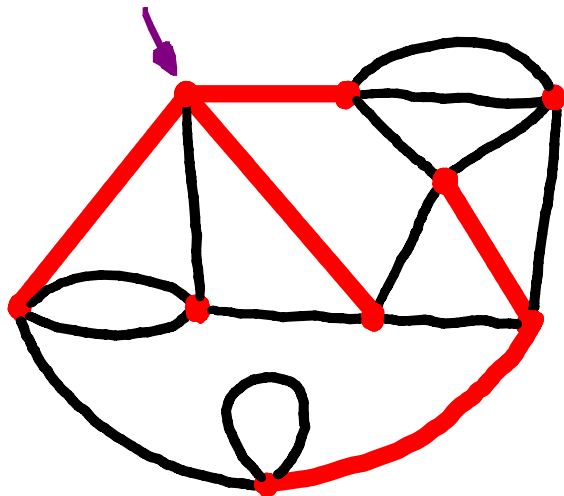
Fixons $u \in [0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$ (nombre de faces)

distribution de probabilité $\mathbb{P}_u =$

$$\mathbb{P}_u(C, F) = \frac{u^{\# \text{composantes}}}{f_n(u)}$$

$S_n =$ nombre de sommets dans la composante racine

Ex:



Ici $S_n = 4$

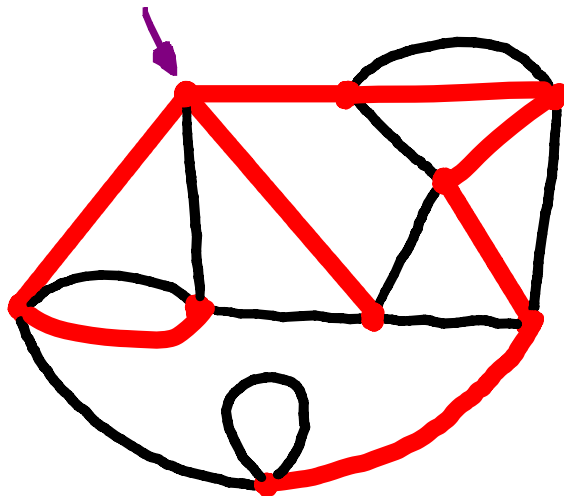
TAILLE DE LA COMPOSANTE RACINE

Fixons $u \in [0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$ (nombre de faces)
distribution de probabilité $\mathbb{P}_u =$

$$\mathbb{P}_u(C, F) = \frac{u^{\# \text{composantes}}}{f_n(u)}$$

$S_n =$ nombre de sommets dans la composante racine

Ex:



Si $u = 0$,

$$S_n = n - 2$$

TAILLE DE LA COMPOSANTE RACINE

Fixons $u \in [0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$ (nombre de faces)

distribution de probabilité $\mathbb{P}_u =$

$$\mathbb{P}_u(C, F) = \frac{u^{\# \text{composantes}}}{f_n(u)}$$

$S_n =$ nombre de sommets dans la composante racine

Prop

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_u(S_n = k) = \frac{4(3k)!}{(k-1)! k! (k+1)!} \frac{z_u^k}{\phi'(z_u)}$$

NIVEAU D'UNE CONFIGURATION RÉCURRENTÉ

Fixons $u \in [-1, +\infty[$, n nombre de faces

$$P'_u(Q, C) = \frac{(u+1)^{\text{niveau}(C)}}{Z_n(u)}$$

Q = quadrangulation

C = config. récurrente du tas de sable

N_n = v.a. qui compte le niveau de la configuration

Prop $\mathbb{E}(N_n) \sim c_u \times n$ c_u analytique sauf en 0

et pour $u > 0$,

$N_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ $m_n \sim c_u \times n$ $\sigma_n^2 \sim d_u \times n$

NIVEAU D'UNE CONFIGURATION RÉCURRENTÉ

Fixons $u \in [-1, +\infty[$, n nombre de faces

$$P_u'(Q, C) = \frac{(u+1)^{\text{niveau}(C)}}{f_n(u)}$$

Q = quadrangulation

C = config. récurrente du tas de sable

N_n = v.a. qui compte le niveau de la configuration

Prop $\mathbb{E}(N_n) \sim c_u \times n$ c_u analytique sauf en 0

et pour $u \geq -1$ ← conjecture

$N_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ $m_n \sim c_u \times n$ $\sigma_n^2 \sim d_u \times n$



MERCI POUR
VOTRE ATTENTION

